

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

55. Band, Heft 6/10

15. April 1955.

S. 241–488

Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

● **Nicolle, Jacques:** Die Symmetrie und ihre Anwendungen. Geleitwort von Louis de Broglie. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1954. 172 S.

Die Schrift (eine Übersetzung aus dem Französischen) will eine kurze allgemeine Einführung in die Lehre der Symmetrie, wie sie in der unbelebten und auch in der belebten Natur in Erscheinung tritt, geben. Sie gliedert sich in zwei Teile: A I. Allgemeine Grundlagen, II. Endliche oder begrenzte Mengen, III. Unendliche oder unbegrenzte Mengen, B. IV. Kristallographie, V. Symmetrie und Dissymmetrie in physikalischen Erscheinungen, VI. Die Symmetrie und die Untersuchung der Moleküle, VII. Botanik und Symmetrie, VIII. Biologie und Symmetrie. — Gegenüber der Originalausgabe sind am Schluß noch zahlreiche Literaturhinweise durch den Verlag hinzugefügt worden.

W. Nowacki.

● **Gröbner, Wolfgang:** Über die gegenwärtige Krise unserer Kultur. Studium generale 7, 122–130 (1954).

● **Kline, Morris:** Freshman mathematics as an integral part of western culture. Amer. math. Monthly 61, 295–305 (1954).

● **Chaundy, T. W., P. R. Barrett and Charles Batey:** The printing of mathematics. Oxford: University Press 1954. IX, 105 p. 15 s.

● **Jenaer Jahrbuch 1954.** Wissenschaftliche Veröffentlichungen des Zeißwerkes. 1. Teil. Jena: VEB Gustav Fischer Verlag 1954. 304 S. DM 20,—.

Einige Arbeiten aus diesem Buch werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt.

● **Pincherle, Salvatore:** Opere scelte. Vol. I. Rom: Edizioni Cremonese 1954. 396 S. L. 3500.

Aus Anlaß des 100. Geburtstages von Salvatore Pincherle (* Triest, 11. 3. 1853), „uno dei grandi fondatori della Analisi funzionale, insegnante indimenticabile che illuminò con le sue lezioni parecchie generazioni di giovani, esempio mirabile di vita morale e civile“, hat die Unione Matematica Italiana, deren Gründer und erster Präsident er war, die Herausgabe einer Auswahl seiner wissenschaftlichen Veröffentlichungen in zwei Bänden veranlaßt. Der vorliegende erste Band enthält den Nachruf, den U. Amaldi auf Pincherle in der Academia Nazionale dei Lincei gehalten hat, ein Verzeichnis aller Veröffentlichungen in chronologischer Anordnung und 15 Abhandlungen. Den Anfang bildet „Notice sur les travaux“ [Acta math. 46, 341–362 (1925)], worin Pincherle auf Veranlassung von Mittag-Leffler in 6 Abschnitten über seine wissenschaftlichen Arbeiten ausführlich berichtete. Die weiteren 14 Arbeiten folgen in chronologischer Ordnung und umfassen u. a. seine wichtigsten Beiträge zur Weierstraßschen Funktionentheorie und Funktionalanalysis, zur Theorie der verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen und zur Integration der linearen Differentialgleichungen mittels bestimmter Integrale, soweit sie bis 1897 erschienen sind. Druck und Ausstattung des Bandes entsprechen allen Anforderungen.

O. Volk.

● **Ruffini, Paolo:** Opere matematiche. Tomo Terzo. Roma: Edizioni Cremonese 1954. XVII, 254 p.

This volume contains the mathematical letters of Ruffini, „matematico e medico reputatissimo“ in seven groups: I. On the non-solubility of algebraic equations of degree >4 , the problem which occupied Ruffini almost throughout his life. Here one also finds some letters which Cauchy wrote to Ruffini, in particular one where Cauchy expresses the intention to propose Ruffini to the Académie des Sciences „lorsqu'il s'agit de nommer un correspondant pour la section de géométrie“. — II. On the foundations of the infinitesimal calculus. — III. On the elliptic transcendents. — IV. On trigonometrical series, where, as the editor points out, a discussion on the use of divergent series in analysis can be found. — V. On the theory of surfaces of second degree and on numerical equations. — VI. On the application of

mathematics to mechanics and hydraulics. — VII. On the erection of an astronomical observatory in Modena.
H. Schwerdtfeger.

● **Volterra, Vito: Opere Matematiche. Memorie e note. Vol. I: 1881—1892.** Roma: Accademia Nazionale dei Lincei 1954. XIII, 604 p. Lire 8000.

Mit Ausnahme der in Buchform erschienenen Veröffentlichungen sollen alle wissenschaftlichen Abhandlungen von Vito Volterra (geb. 1860, gest. 1940) in chronologischer Reihenfolge abgedruckt werden, damit der Leser die Entwicklung der mathematischen Ideen des Autors verfolgen kann. Der vorliegende erste Band enthält 37 Arbeiten aus den Jahren 1881—1892, hauptsächlich zur theoretischen Physik (partielle Differentialgleichungen), aber auch die für die Funktionalanalysis wichtig gewordenen Arbeiten über „Funktionen, die von anderen Funktionen abhängen“ und die Versuche zur Ausdehnung der komplexen Funktionentheorie auf mehr als zwei Dimensionen. Dem Band vorangestellt sind die Gedächtnisreden von Castelnuovo und Somigliana aus dem Jahre 1946 bei Gelegenheit der Rekonstituierung der Akademie sowie eine kurze von J. Pérès verfaßte Biographie. Der stattliche Band ist im Format und in den Typen der „Rend. Lincei“ gedruckt.
G. Doetsch.

Geschichte.

● **Becker, Oskar: Grundlagen der Mathematik.** (Orbis Academicus.) Freiburg/München: Verlag Karl Alber 1954. XI, 422 S. 62 Abb.

Verf. gibt eine sehr beachtliche Auswahl aus Originalstücken zur Grundlegung der Mathematik, und zwar, soweit es sich um fremdsprachliche Texte handelt, in vorzüglicher deutscher Übersetzung. Er beschränkt sich auf möglichst zurückhaltende einleitende Berichte, um die Autoren ausgiebig selbst zu Wort kommen zu lassen. Vorzüglich gelungen sind die Kapitel über Vorgriechische Mathematik, über die Begründung der wissenschaftlichen Mathematik bei den Griechen, über die kritische Mathematik des 19. Jh. und die Grundlagenforschung des 20. Jh. Weniger geglückt ist das Kapitel über die Grundlegung der neueren abendländischen Mathematik im 17. Jh. Hier fehlen entscheidende Stücke (Viète, Fermat, Roberval, Torricelli, Ricci, Sluse, Huygens usw.). Sorgfältig gearbeitete Verzeichnisse der Quellen, der einschlägigen Fachwerke, der Namen und der Sachen beschließen das ausgezeichnet ausgestattete Werk.
J. E. Hofmann.

Hofmann, Jos. E.: Archimedes von Syrakus. Archimedes 6, Heft 5, 4. S. (1954).

In allgemein verständlicher Weise gibt Verf. ein knappes eindrucksvolles Bild vom Leben, von den Werken und der heute noch nachwirkenden Bedeutung des großen griechischen Mathematikers. Er stellt seine Lebensumstände, sein Arbeiten und Wirken in den geschichtlichen Zusammenhang des 3. vorchristlichen Jahrhunderts, kennzeichnet seine Leistungen auf dem Gebiet der Mechanik, der Geometrie, der Infinitesimalmathematik, der Arithmetik, der Physik und der Technik, sowie deren Abhängigkeit von gewissen philosophischen Lehren der Griechen, schildert das Schicksal seiner Schriften und ihrer arabischen Übersetzungen im Laufe der Jahrhunderte, seinen Einfluß auf die Mathematiker der Renaissance und des Frühbarock und erläutert zum Schluß den Zusammenhang der archimedischen Methoden mit der modernen Infinitesimalrechnung.
E. Löffler.

Dijksterhuis, E. J.: Die Integrationsmethoden von Archimedes. Nordisk mat. Tidsskrift 2, 5—23 (1954).

In diesem Vortragsauszug (1951 Kongr. internat. Wissenschaftsgeschichte Bremen, 1953 Tagung Ges. Geschichte der exakten Wissenschaften Kopenhagen) gibt Verf. einen wohlgedachten und tiefgründigen Überblick über die wissenschaftliche Situation, aus der heraus die Archimedischen Arbeiten verstanden werden müssen. Er illustriert das Wesentliche durch Gegenüberstellung von kennzeich-

nenden Beispielen (Parabelquadratur, Kugeloberfläche, Kugelinhalt) für die Kompressionsmethode, die Approximationsmethode und die Schwerpunktmethode.

J. E. Hofmann.

Dijksterhuis, E. J.: Von Sehne zu Sinus, von Umbra zu Tangens. Euclides, Groningen 29, 271—285 (1954) [Holländisch].

Hofmann, Jos. E.: Über das unmittelbare Nachwirken der Portaschen Quadratur krummlinig begrenzter ebener Figuren. Arch. internat. Hist. Sci. 26, 16—34 (1954).

Diese Arbeit bringt Beispiele für das Nachwirken der Methoden, die Giambattista della Porta (1538—1615) in einem Werkchen von 1601/10 angewandt hat, über das Verf. früher berichtet hat (dies. Zbl. 52, 2). Er gibt einen Überblick über ein kleines mathematisches Werk eines Theologen, P. Aurineto, das 1637 erschienen ist und in dem Portas Irrtümer widerlegt, darüber hinaus auch einige weitere interessante Gedankengänge entwickelt werden. Als weiterer Kritiker Portas (allerdings ohne ihn zu nennen) tritt der Franzose A. de Lionne (1583—1663) auf in einer Studie über kreisförmig begrenzte, elementar quadrierbare Figuren, die erst lange nach ihrem Entstehen von V. Léotaud im Jahre 1854 mit einigen Zusätzen herausgegeben wurde. Sie führt vieles, was Porta nur angedeutet hatte, weiter aus. Verf. berichtet über die wichtigsten Gedanken, die in dieser Schrift entwickelt sind, wobei wiederum sorgfältig auf die Quellen hingewiesen wird. In einem Schlußabschnitt würdigt er die Bedeutung der Ergebnisse, Ansätze und Tendenzen der drei alten Autoren für die spätere Zeit und betont, daß dahinter etwas mehr steckt, als man bei flüchtiger Durchsicht vermuten möchte.

E. Löffler.

Nobile, Vittorio: Sull'argomento galileiano della quarta giornata dei „Dialoghi“ e sue attinenze col problema fondamentale della geodesia. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser., 15, 426—433 (1954).

In Fortsetzung früherer Untersuchungen über die wissenschaftliche Rolle Galileis (s. dies. Zbl. 41, 339) untersucht der Verf. dessen Betrachtungen über Ebbe und Flut am vierten Tag der „Dialoge“ und zeigt, wie sich die irrige Ansicht verbreiten konnte, daß hier grundlegende Fehler Galileis vorlägen. *K. Vogel.*

Pauc, C. Y.: Leibniz in Paris. Scripta math. 20, 37—50 (1954).

Es handelt sich um eine sehr ausführliche Inhaltsangabe von J. E. Hofmann, Leibniz' mathematische Studien in Paris (Berlin 1948, s. dies. Zbl. 31, 97) und Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik (München 1949, s. dies. Zbl. 32, 193), worin mehrere bei Hofmann nur angedeutete belangreiche Einzelheiten genauer ausgeführt sind.

J. E. Hofmann.

• Bobinger, Maximilian: Christoph Schissler der Ältere und der Jüngere. (Schwäbische Geschichtsquellen und Forschungen, Band 5.) Augsburg-Basel: Verlag Die Brigg 1954. VIII, 140 S., 7 Textabb., 44 Photos v. Geräten usw. DM 14.40.

Verf. behandelt in dieser wertvollen Monographie nach kurzer Einleitung über die Situation der Naturwissenschaften, des deutschen Kunsthandwerks und des Augsburger Milieus im 16. Jh. zunächst Leben und Wirken des „Gürtlermeisters“ Chr. Schissler (1531 ?/1608) und seines Sohnes Joh. Chr. (geb. vor 1561, † nach 1625). Mit besonderer Liebe geht er den über die ganze Welt verstreuten mathematischen und astronomischen Geräten der beiden Schissler nach, die neben hohem handwerklichem Können auch bestentwickelten künstlerischen Sinn verraten. Hauptsächlich sind Maßstäbe, Zirkelinstrumente, Automaten, Geschützaufsätze, Armillarsphären, astronomische Bestecke, Sonnenuhren usw. zu nennen. Das mit ausgezeichneten Abb. geschmückte Werk wird durch sorgfältige Verzeichnisse der nachweisbaren Instrumente, des einschlägigen Schrifttums und durch ein gutes Personen- und Sachregister abgeschlossen.

J. E. Hofmann.

Boyer, C. B.: Carnot and the concept of deviation. Amer. math. Monthly 61, 459—463 (1954).

• Bolyai, Ianoş: Scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidean (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. (Rumänisch mit Wiedergabe des lateinischen Textes.) Bucureşti: Editura Academiei Republicii Populare Române 1954. 213 p.

Das Buch beginnt mit einem Vorwort von G. Vrănceanu, in dem der Zusammenhang der Bolyai-Lobatschevskyschen Schöpfung mit der modernen Raumlehre und den relativistischen Theorien aufs einleuchtendste und knappste dargelegt wird. Es folgt eine biographische Notiz über das Leben und die gegenseitigen Beziehungen und Auseinandersetzungen beider Bolyai. Sie ist eine Bearbeitung der bekannten biographischen Forschungen von Engel-Stäckel und L. Schlesinger über diese Mathematiker, aber auch der weniger zugänglichen, ungarisch verfaßten Biographie von J. Bedőházi. Das Buch enthält weiter die Wiedergabe des lateinischen Textes des berühmten Appendix und, unmittelbar folgend, dessen rumänische Übersetzung von Herrn I. Tóth. Die wissenschaftliche Bedeutung des Buches wird durch die Übersetzung von V. F. Kagans Kommentar zu Bolyais Appendix erhöht. Tiefliegende methodologische und axiomatische Ergänzungen, die auf Modernisierung und Erklärung des Textes zielen, werden dadurch dem Nichtrussischleser zum ersten Male bekannt gemacht. Das Buch schließt mit der Übersetzung der von Stäckel und Kürschák entzifferten Bemerkungen, mit denen der enttäuschte, eifersüchtige, aber gerechte Johann Bolyai sein Exemplar von Lobatschevskys „Geometrische Untersuchungen über die Parallellinien“ versah.

D. Barbilian.

● Geronimus, J. L.: Pafnuti Ljwowitsch Tschebyschew (1821—1894). Lösung kinematischer Probleme durch Näherungsmethoden. Berlin: VEB Verlag Technik 1954. 64 S. DM 4.—.

In dieser überarbeiteten Übersetzung eines Auszuges aus dem Sammelwerk „Skizzen über die Arbeiten hervorragender russischer Persönlichkeiten der Mechanik“ (Moskau 1952) des Verf. wird ein Überblick über das Leben und Schaffen P. L. Tschebyschews gegeben. Hierbei wird in einer oft nur wenig strengen Weise (vgl. etwa S. 12, 13) über die Tschebyschewschen Überlegungen zur Approximation von Funktionen, über seine Behandlung des Wattschen Zentrifugalregulators, sowie insbesondere über seine verschiedenen Untersuchungen über Mechanismen zur angenäherten Geradföhrung berichtet. Auch die übrigen Wirkungsgebiete Tschebyschews werden gewürdigt; zum Schluß wird auf neuere russische Untersuchungen betreffend Mechanismen hingewiesen. — Trotz des lobpreisenden Stils dieses mit vielen sauberen Figuren ausgestatteten Heftchens und mehrerer (vom Ref.) nicht kontrollierbarer Prioritätsbehauptungen vermittelt der Verf. ein gutes Bild der bedeutenden Persönlichkeit Tschebyschews.

H. R. Müller.

Le Lionnais, F.: La contribution de la Grande Bretagne au développement des sciences mathématiques depuis un siècle. Osiris 11, 40—49 (1954).

Vladimir Konstantinovič Arkad'ev. Žurn. eksper. teor. Fiz. 26, 513—517 (1954) [Russisch].

Bailey, W. N.: Ernest William Barnes. J. London math. Soc. 29, 498—503 (1954).

Segre, Beniamino: Fabio Conforto. Archimede 6, 91—94 (1954).

Elenco delle pubblicazioni del Prof. Fabio Conforto. Archimede 6, 127—130 (1954).

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

Gouarné, René: Remarques sur la méthode des polygones. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 383—385 (1954).

Il s'agit d'un procédé de calcul des déterminants en vue d'une formulation pratique du polynôme caractéristique. Cette présentation retrouve les résultats de la méthode des polygones [Samuel, C. r. Acad. Sci., Paris 229, 1236 (1949)], qu'elle rattache à la théorie classique des déterminants et montre, dans son application, l'intérêt de l'usage des tableaux de partition.

S. Bays.

Feyerherm, Arlin M.: Distribution of Kronecker products of matrices. (Abstract of a thesis.) Iowa State College, J. Sci. 28, 313 (1954).

Dupare, H. J. A. and W. Peremans: A property of positive definite matrices. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1954—006, 5 p.

Let A be an $n \times n$ positive-definite matrix. Then the m -th compound of A

is positive-definite. Let Z_1, \dots, Z_k be $n \times m$ matrices. Then $Z'_r A Z_s$ is an $m \times m$ matrix ($r, s = 1, 2, \dots, k$) and the relation $\det_{r,s} (\det Z'_r A Z_s) \geq 0$ holds. There is some discussion of the case in which equality holds.

J. L. Brenner.

Parker, W. V.: A note on normal matrices. Amer. math. Monthly **61**, 330—331 (1954).

Eine n -reihige normale Matrix $A = (a_{\alpha\lambda})$ sei in Teilmatrizen $A = (A_{\alpha\beta})$ mit $1 \leq \alpha, \beta \leq k$ derart aufgespalten, daß das charakteristische Polynom von A das Produkt der charakteristischen Polynome der Matrizen $A_{\alpha\alpha}$ ist. Dann gilt $A_{\alpha\beta} = 0$ für $\alpha \neq \beta$.

W. Specht.

Čebotarev, G. N.: Über die Lösung der Matrizengleichung $e^B \cdot e^C = e^{B+C}$. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **96**, 1109—1112 (1954) [Russisch].

Let B, C be matrices of order N . In the paper the author answers completely for $N = 2$, the problem about under which condition the relation $e^B \cdot e^C = e^{B+C}$ is valid. There are two known cases: 1) B, C are commutative which is evident. 2) e^B, e^C and e^{B+C} are scalar, which was studied by Frechet. — The author treats the remaining case as follows: Let $e^B = \beta_0 E + \beta_1 B$, $e^C = \gamma_0 \cdot E + \gamma_1 C$, and $e^{B+C} = \delta_0 E + \delta_1 (B + C)$, then we have $\beta_0 \gamma_0 E + \beta_1 \gamma_0 B + \beta_0 \gamma_1 C + \beta_1 \gamma_1 BC = \delta_0 E + \delta_1 (B + C)$. Since $\beta_1 \gamma_1 \neq 0$, for otherwise we have case 2), BC can be expressed as linear combination of E, B, C , say $BC = \lambda E + \mu B + \nu C$. Since $(B - \nu E)(BC - CB) = 0$, ν is a characteristic root of B , similarly μ is that of C . Further the right hand of $(B - \nu E)(C - \mu E) = (\nu\mu + \lambda)E$ is singular, we have $\nu\mu + \lambda = 0$. From this equation the author found explicitly the solution of the problem. The results were applied by the author to find a compact form of the boundary problem of Riemann.

L. K. Hua.

Gautschi, Werner: Bounds of matrices with regard to an Hermitian metric. Compositio math. **12**, 1—16 (1954).

Wenn H eine positive Hermiteische Form in n Variablen ist, so läßt sich durch $\|x\|_H = \sqrt{x^* H x}$ eine Vektornorm für n -dimensionale Vektoren definieren. Sind dann A eine $(m \times n)$ -Matrix und H, K zwei positive Hermiteische Formen der Ordnungen m, n , so wird durch

$$\Omega_{H,K}(A) = \max_{\|x\|_K=1} \|Ax\|_H \text{ bzw. } \omega_{H,K}(A) = \min_{\|x\|_K=1} \|Ax\|_H$$

eine obere bzw. untere Schranke von A in bezug auf das Formenpaar H, K definiert. Unter diesen Bildungen ist Ω eine Vektornorm. Es gelten dann insbesondere die folgenden Beziehungen, in denen A, B rechteckige Matrizen mit existierendem Produkt sind und L eine positive Hermiteische Form geeigneter Ordnung ist:

$$\Omega_{H,K}(AB) \leq \Omega_{H,L}(A) \Omega_{L,K}(B), \omega_{H,K}(AB) \geq \omega_{H,L}(A) \omega_{L,K}(B), \Omega_{H,K}(AB) \geq \omega_{H,L}(A) \Omega_{L,K}(B).$$

Sind ferner $\Omega(A), \omega(A)$ diejenigen Schranken, die der Euklidischen Vektornorm entsprechen, so gilt $\sqrt{h''/k'} \omega(A) \leq \omega_{H,K}(A) \leq \Omega_{H,K}(A) \leq \sqrt{h'/k''} \Omega(A)$, wo h'', k'' die Maxima und h', k' die Minima der Formen H, K sind. Ferner gilt $\Omega_{K,H}(A^*) = \Omega_{H^{-1},K^{-1}}(A)$ und, wenn A quadratisch ist, $\omega_{K,H}(A^*) = \omega_{H^{-1},K^{-1}}(A)$. Im nächsten Abschnitt der Arbeit werden verschiedene Beispiele für die eingeführten Begriffsbildungen behandelt, und im letzten Abschnitt eine von Ledermann herrührende Abschätzung von $\Omega(A)$ für den Fall, daß jede Kolonne von A viele verschwindende Elemente enthält, auch für die hier behandelte Begriffsbildung verallgemeinert. Endlich wird die Frage diskutiert, wann die Größen $\Omega_{H,H}(A), \omega_{H,H}(A)$ gleich dem maximalen, bzw. minimalen absoluten Betrag der Fundamentalwurzeln der quadratischen Matrix A werden können.

A. Ostrowski.

Ostrowski, A. M.: On nearly triangular matrices. J. Res. nat. Bur. Standards **52**, 319—345. (1954).

In der $n \times n$ -Matrix $A = (a_{\mu\nu})$ sei stets $a_{\mu\mu} = 1$, $|a_{\mu\nu}| \leq m$ für $\mu > \nu$ und $|a_{\mu\nu}| \leq M$ für $\mu < \nu$. Ist m klein, so unterscheidet sich A wenig von der Dreiecksmatrix D , welche aus A durch Ersetzung von m durch 0, d. h. durch Nullsetzen der Elemente unter der Diagonale entsteht. Gegenstand der Untersuchung ist der Vergleich der inversen Matrizen A^{-1} und D^{-1} . Mit den für numerische Anwendungen geeignetsten Norm-Definitionen, nämlich $|A|_1 = \max \sum_{\mu=1}^n |a_{\mu\nu}|$ und $|A|_\infty = \max \sum_{\nu=1}^n |a_{\mu\nu}|$, spricht sich das Hauptergebnis so aus: Es ist $|A^{-1} - D^{-1}|_p \leq (1 + M)^{n-1} \delta / (1 - \delta)$, wenn $M \geq 3/2n$ und $n \geq 4$; bzw. $\leq 6n m / (1 - 2nm)$, wenn $M \leq 3/2n$

und $m < 1/2n$; bzw. $\leq (n-1)m/[1-(n-1)m]$, wenn $m = M < 1/(n-1)$. Dabei ist $p = 1, \infty$ zugelassen. In der ersten Ungleichung bedeutet $1 - \delta$ den kleinsten Wert, welchen $|\det A|$ unter den angegebenen Voraussetzungen erreichen kann; er läßt sich durch m und M in der folgenden Form darstellen: $\delta = M_n m / (1 - \theta M/M)$, $M_n = [(1 + M)^n - nM - 1]/M$, $0 < \theta < 1$. Genau dann sind alle Matrizen A mit gegebenen m, M nichtsingulär, wenn $m/(1+m)^n < M/(1+M)^n$ im Fall $m < M$, bzw. wenn $(n-1)m < 1$ im Fall $m = M$. Zahlentafeln zur bequemen Berechnung der Schranken sind beigelegt. Die Ergebnisse werden aus komplizierteren Formeln gewonnen, die sich auf den allgemeineren Fall beziehen, daß m und M noch von der Zeilennummer abhängen. Als eine weitere Anwendung dieser allgemeinen Formeln sei der folgende Vergleichssatz für die Inversen zweier Dreiecksmatrizen A, B hervorgehoben: Es sei $a_{\mu\mu} = b_{\mu\mu} = 1$; $|a_{\mu\nu}| \leq M_\mu$ und $|a_{\mu\nu} - b_{\mu\nu}| \leq \varepsilon$ ($\mu < \nu$); $a_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} = 0$ ($\mu > \nu$). Dann ist $|A^{-1} - B^{-1}| \leq \prod_{\mu=1}^{n-1} (1 + M_\mu + \varepsilon) - \prod_{\mu=1}^{n-1} (1 + M_\mu)$. H. Wielandt.

Horn, Alfred: Doubly stochastic matrices and the diagonal of a rotation matrix. Amer. J. Math. **76**, 620—630 (1954).

Vorgegebene reelle Zahlen d_1, \dots, d_n lassen sich genau dann als die Diagonalelemente einer Hermiteschen Matrix mit vorgegebenen Eigenwerten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ auffassen, wenn der Punkt D mit den Koordinaten (d_1, \dots, d_n) in der konvexen Hülle derjenigen Punkte liegt, die aus $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ durch alle möglichen Permutationen der Koordinaten entstehen; d_1, \dots, d_n sind genau dann die Diagonalelemente einer geeigneten reellen orthogonalen Matrix mit der Determinante $+1$, wenn D in der konvexen Hülle derjenigen Punkte $(\pm 1, \dots, \pm 1)$ liegt, für welche das Produkt aller n Koordinaten den Wert $+1$ hat. Ähnliche Kennzeichnungen als konvexe Punktmengen erhält der Verf. auch für die Diagonalen aller reellen orthogonalen sowie aller unitären Matrizen. H. Wielandt.

Fan, Ky: Some remarks on commutators of matrices. Arch. der Math. **5**, 102—107 (1954).

In der Gruppe aller Matrizen mit nicht verschwindenden Determinanten über dem komplexen Zahlkörper ist jede Matrix mit der Determinante 1 stets ein Kommutator zweier Matrizen [K. Shoda, Jap. J. Math. **13**, 361—365 (1937)]. O. Tausky [R. von Mises Memorial Vol. 67—68 (New York, 1954)] hat diesen Satz folgendermaßen verallgemeinert. Zwei Matrizen lassen sich dann und nur dann in der Form $X = A_1 A_2 A_3$, $Y = A_3 A_2 A_1$ darstellen, wenn $\det X = \det Y$ ist. Der Verf. zeigt, daß diese beiden Sätze äquivalent sind, indem er den folgenden allgemeinen Satz beweist: Zwei Elemente x, y aus einer beliebigen Gruppe lassen sich dann und nur dann in der Form $x = a_1 a_2 \cdots a_{2n+1}$, $y = a_{2n+1} \cdots a_2 a_1$ darstellen, wenn $x y^{-1}$ das Produkt von n Kommutatoren ist. Der in dieser Arbeit angegebene Satz, daß der oben erwähnte Satz auch in der unitären Gruppe gilt, findet sich schon bei M. Tôyama (dies. Zbl. **45**, 297), wo der Satz, auch für die unimodulare unitäre Gruppe, unitäre simplektische Gruppe und unimodulare orthogonale Gruppe mit dem Grad > 2 bewiesen ist. Zum Schluß beweist der Verf. zwei analoge Sätze für normale Matrizen und für Hermitesche Matrizen. K. Shoda.

Rubinstejn, G. Š.: Allgemeine Lösung eines endlichen Systems von linearen Ungleichungen. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 2 (60), 171—177 (1954).

Dieser Aufsatz stellt eine Ergänzung dar zu dem umfassenden Artikel von Černikov über Systeme linearer Ungleichungen (dies. Zbl. **50**, 12). Für das lineare Ungleichungssystem

(1) $\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k - a_j \leq 0$ ($j = 1, \dots, m$) wird die allgemeine Lösung in der Form (2) $x = \sum_{i=1}^t \theta_i x^i + y$ aufgestellt. Dabei sind x^1, \dots, x^t den t verschiedenen Minimalbegrenzungen des Lösungspolyeders M von (1) angehörige Punkte und y ein willkürlicher Punkt des Konus K , d. i. das Lösungspolyeder des homogenen Systems (3) $\sum_k a_{jk} x_k < 0$; die $\theta_1, \dots, \theta_t$ sind nicht-negative Zahlen mit der Summe Eins. Ferner sei r der Rang der Matrix (a_{jk}) und y^1, \dots, y^{n-r} ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$\sum_k a_{jk} x_k = 0$; das Lösungspolyeder des aus (3) durch Hinzufügung der Gleichung $\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k + 1 = 0$ entstehenden Systems habe τ verschiedene Minimalbegrenzungen (im Falle der Inkompatibilität des Systems ist $\tau = 0$); auf jeder von diesen werde ein Punkt z^1, \dots, z^τ gewählt. Alsdann besteht K aus der Menge der Punkte $y = \sum_{i=1}^{n-r} c_i y^i + \sum_{i=1}^{\tau} d_i z^i$, wo die c_1, \dots, c_{n-r} beliebige reelle Zahlen und die d_1, \dots, d_τ irgendwelche nicht-negative Zahlen sind. Damit hat man nach (2) einen dem Fundamentalsatz über die Lösung von linearen Gleichungssystemen analogen Satz für die allgemeine Lösung von linearen Ungleichungssystemen. Es folgen einige Bemerkungen über die Berechnung der „Parameter“ in der allgemeinen Lösung (so nennt Verf. die Punkte x^i, y^i, z^i), was nach Ansicht des Verf. ohne Rechenmaschinen unmöglich ist.

H. Schwerdtfeger.

Wakulicz, A.: Sur les polynômes en x ne prenant que des valeurs entières pour x entiers. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 109—111 (1954).

Jedes ganzwertige Polynom $f(x)$ besitzt die Gestalt $a_0 + a_1 \binom{x}{1} + a_2 \binom{x}{2} + \dots + a_n \binom{x}{n}$ mit ganzen Koeffizienten a_v ; für diesen altbekannten Satz gibt Verf. den üblichen Beweis und folgert einige Zusätze.

W. Specht.

Obreschkoff, Nikola: Über die Wurzeln algebraischer Gleichungen mit reellen Koeffizienten. Arch. der Math. 5, 506—509 (1954).

The following theorems (1) and (2) are a refinement of Rolle's Theorem. (1) Let $\alpha < \beta$ be two real, successive roots of an algebraic equation (A) $f(x) = 0$ of n -th degree with real coefficients. Let β be a q -fold root and r the number of real roots larger than β . Let $\zeta = \beta - q(\beta - \alpha)/(n - r)$, and K the circle with the segment $[\alpha, \zeta]$ as diameter. Then, if (A) has no root in the circle K , the equation $f'(x) = 0$ has at least one root η for which $\alpha < \eta \leq \zeta$. The case $\eta = \zeta$ is only then possible, if α and β are the only real roots of (A) and the non-real roots lie on the boundary of K . An analogous theorem holds for number the $\zeta_1 = \alpha + p(\beta - \alpha)/(n - s)$, where s denotes the number of real roots which are smaller than the p -fold root α , and where (A) has no root in the circle K_1 . (2) If the real roots of (A) satisfy the same hypotheses as above, and if none of the complex roots lie in the region $K + K_1$, then $f'(x) = 0$ has at least one root η such that $\zeta_1 \leq \eta \leq \zeta$. (3) A simple proof is given of the following theorem of Laguerre (Oeuvres, t. 1, Paris 1898, p. 87—103), which gives very good approximations for the numerical solution of algebraic equations. Let $f(x) = 0$ be an n -th degree equation with only real and simple roots. Then, for every arbitrary number x between α_k and α_{k+1} , the equation

$$[(n-2)f'^2(x) - (n-1)f(x)f''(x)](X-x)^2 - 2f(x)f'(x)(X-x) - nf^2(x) = 0$$

has a root between α_k and x , and one between x and α_{k+1} . The solution of this equation gives

$$X_{1,2} = x + n f(x) / \left[-f'(x) \pm \sqrt{(n-1)[(n-1)f'^2(x) - n f(x)f''(x)]} \right].$$

Since the numbers $X_1 - x$ and $X_2 - x$ have different signs, for $X_2 > x$ the sign of $f(x)$ must be used in front of the radical.

E. Frank.

Parodi, Maurice: Condition suffisante pour que tous les zéros finis de la dérivée du rapport de deux polynômes d'Hurwitz soient à partie réelle négative; applications aux matrices H . C. r. Acad. Sci., Paris 239, 147—149 (1954).

Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei reelle Polynome verschiedener Grade mit den Nullstellen in der linken Halbebene. Der Verf. stellt unter Benutzung eines Satzes von Walsh eine hinreichende Bedingung dafür, daß die Ableitung des Quotienten dieser Polynome alle Nullstellen in der linken Halbebene hat. Als Anwendung leitet er den Satz her: Es seien $A = (a_{\mu\nu})$ und $B = (b_{\mu\nu})$ zwei reelle quadratische Matrizen der Ordnungen n und m , $n > m$, für die die Bedingungen erfüllt sind: $a_{\mu\mu} < 0$, $|a_{\mu\mu}| > \sum_{\nu \neq \mu} |a_{\mu\nu}|$, $b_{\mu\mu} < 0$, $|b_{\mu\mu}| > \sum_{\nu \neq \mu} |b_{\mu\nu}|$. Dann hat die Ableitung des Quo-

tienten der charakteristischen Funktionen dieser Matrizen alle Nullstellen in der linken Halbebene, wenn

$$\frac{n}{m} > \max_{\mu} \sum_{\nu} |a_{\mu\nu}| / \min_{\mu} \left[|b_{\mu\mu}| - \sum_{\nu \neq \mu} |b_{\mu\nu}| \right].$$

A. Ostrowski.

Boughon, Pierre: Enveloppes d'une famille à $n - 1$ paramètres de variétés de dimension $n - 1$ dans un espace de dimension n . C. r. Acad. Sci., Paris 239, 23—25 (1954).

On suppose le corps de base de caractéristique p . Soit $F(t_i, X_j) = 0$ l'équation de la famille, où les t_i et les X_j représentent respectivement les paramètres et les coordonnées. A côté de l'enveloppe (classique), obtenue par l'élimination des t_i dans le système (*) $F = F'_{t_i} = 0$, peuvent apparaître d'autres obtenues par l'élimination des t_i dans des systèmes déduits du (*) par substitution de quelques unes des équations $F'_{t_i} = 0$ par d'autres de la forme $G(t_i, X_j^p) = 0$.

G. Ancochea.

Foulkes, H. O.: Plethysm of S -functions. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 246, 555—591 (1954).

The plethysm $\{m\} \otimes \{\mu\}$ may be expressed in terms of $\{m\}^4$, $\{m\}^2 \{m\}^{(2)}$, $\{m\} \{m\}^{(3)}$, $\{m\}^{(2)} \{m\}^{(2)}$ and $\{m\}^{(4)}$ where (μ) is a partition of 4 and $\{m\}^{(r)} = \{m\} \otimes S_r$. The author gives non-recursive methods for obtaining the coefficient of any given $\{\lambda\}$ in each of these terms. The work involved is not heavy even when m is large. Tables are given for the coefficient in $\{m\} \otimes \{\mu\}$ of $\{4m - k, k\}$, $\{m + k, m + k, m - k, m - k\}$ and $\{m + 2k, m + k, m - k, m - 2k\}$. A simple formula is given for the coefficient of $\{\lambda\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ in $\{m\}^n$ when $\lambda_2 \leq m$; and, when n or $n - 1$ is a prime p , this coefficient is found to be congruent to 1, 0, or $-1 \pmod{p}$. A new proof is given for a result of J. A. Todd (this Zbl. 34, 160) on the coefficient of any $\{\lambda\}$ in $\{m\}^{(n)}$. It is shown that there are sets of S -functions with the same coefficient in $\{m\} \otimes \{\mu\}$. Thus the coefficient of $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ is the same as that of: (i) $\{2m - \lambda_4, 2m - \lambda_3, 2m - \lambda_2, 2m - \lambda_1\}$ when $\lambda_1 \leq 2m$; (ii) $\{\lambda_1 - 3\alpha, \lambda_2 + \alpha, \lambda_3 + \alpha, \lambda_4 + \alpha\}$ when $\lambda_2 \leq m$, $m - \lambda_2 \geq \alpha \geq -\lambda_4$ and α is even; (iii) $\{8m - 3\beta - \lambda_1, \beta - \lambda_4, \beta - \lambda_3, \beta - \lambda_2\}$ when $\lambda_2 \leq m$, $m + \lambda_4 \geq \beta \geq \lambda_2$ and β is even. When α and β are odd the coefficient of (ii) and (iii) is shown to be that of $\{\lambda\}$ in $\{m\} \otimes \{\nu\}$ where (ν) is the partition conjugate to (μ) . Extensions of these results, and also similar ones for the ordinary multiplication of S -functions, are obtained for $\{m\} \otimes \{\mu\}$ when (μ) is a partition of any n .

F. W. Posing.

Ibrahim, E. M.: Note on a paper by Murnaghan. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 1000—1001 (1954).

Bei der Berechnung des „Plethysm“ $\{8\} \otimes \{3\}$ [Vgl. D. E. Littlewood, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 239, 305—365 (1944)] macht Murnaghan von einem Theorem Gebrauch, von dem gezeigt wird, daß es ein Spezialfall eines Satzes des Verf. ist.

R. W. Weitzenböck.

Klingenberg, Wilhelm: Paare symmetrischer und alternierender Formen zweiten Grades. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 19, 78—93 (1954).

Es handelt sich um eine Klassifikation der Paare f, g von quadratischen oder alternierenden Formen in n Veränderlichen mit Koeffizienten aus einem Körper der Charakteristik $\neq 2$. Sie stellt eine Weiterentwicklung der von H. Weyl und O. Schreier (F. Klein-W. Blaschke, Vorlesungen über höhere Geometrie, Berlin 1926, S. 379ff.) stammenden Ansätze für reguläre Paare dar. Es ergibt sich eine Verfeinerung der klassischen Resultate von Frobenius.

R. W. Weitzenböck.

Carlitz, L.: A note on modular invariants. Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. 2, 28—31 (1954).

Let f_1, \dots, f_r be a set of forms with coefficients in $GF(q)$ subject to the transformations of the full linear group with coefficients in $GF(q)$. Let C_1, \dots, C_k be the classes of equivalent sets of forms; then L. E. Dickson has made use of the representation of any class invariant in $GF(q)$ as a linear function, with coefficients in $GF(q)$, of k „characteristic“ invariants I_1, \dots, I_k , defined by $I_j(C_i) = \delta_{ij}$. The author points out; firstly, that the characteristic invariants may be used to represent class invariants with values in any field Φ ; secondly, that if Φ contains at least k

elements there is an invariant J such that each class invariant with values in Φ is a polynomial in J , with coefficients in Φ . M. C. R. Butler.

Gruppentheorie:

Stolt, Bengt: Weitere Untersuchungen zur Gruppenaxiomatik. Ark. Mat. 3, 89—101 (1954).

In einer früheren Arbeit hat Verf. Axiomensysteme aufgestellt, die vollständig sind, d. h. die eine Gruppe definieren. Dabei hat er zuerst einige ziemlich schwache Axiome gegeben. Er hat dann ferner sämtliche Systeme untersucht, die aus der gegebenen Axiomenmenge gebildet werden können. Dabei ist er aber zu sogenannten unbestimmten Systemen gekommen, die er weder als vollständig noch als unvollständig bezeichnen konnte. Nun kann er zeigen, daß vier von den früher unbestimmten Systemen vollständig sind, ferner daß diese Systeme auch irreduzibel sind, d. h. daß sie so beschaffen sind, daß keine Untersysteme der gegebenen Systeme eine Gruppe definieren. In dieser Arbeit werden auch Axiome eingeführt, die stärker als die vom Verf. früher eingeführten Axiome sind, wodurch er kürzere vollständige Axiomensysteme als seine früheren geben kann. H. Bergström.

Szász, G.: Über die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen kommutativer multiplikativer Strukturen. Acta Sci. math. 15, 130—142 (1954).

Unlängst bekam Verf. (dies. Zbl. 51, 252) das prinzipiell wichtige Resultat, daß die Assoziativitätsbedingungen für eine multiplikative (algebraische) Struktur, bestehend aus mindestens vier Elementen, ein unabhängiges Axiomensystem bilden. Hier untersucht er das analoge, aber schwierigere Problem für den kommutativen Fall. Natürlich folgen aus der Kommutativität gewisse fast triviale Abhängigkeiten zwischen den Assoziativitätsaxiomen. Das Hauptresultat der Arbeit besagt, daß keine weiteren Abhängigkeiten vorhanden sind, wenn die vorgelegte multiplikative Struktur mindestens vier Elemente enthält. In jedem Fall werden alle vollständigen unabhängigen Teilsysteme der Assoziativitätsaxiome (für kommutative multiplikative Strukturen) aufgestellt. L. Rédei.

Thurston, H. A.: Some properties of partly-associative operations. Proc. Amer. math. Soc. 5, 487—497 (1954).

Fortsetzung früherer Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 29, 222; 46, 17, 52) über $(\nu + 1)$ -äre Operationen, die die polyadische Operation von E. L. Post (dies. Zbl. 25, 12) verallgemeinern. Die $(\nu + 1)$ -äre Operation über der Menge S , die jeder Folge von $\nu + 1$ Elementen s_0, \dots, s_ν , abgekürzt $(\nu + 1)$ -Tupel $s_\nu^0 \in S^{\nu+1}$, ein einziges Element $s \in S$ zuordnet, wird in der auf Lukasiewicz zurückgehenden Weise durch Voraussetzung des Operationssymbols, etwa $*$ oder \dagger , geschrieben. Dies macht Klammern überflüssig. Ein $(2\nu + 1)$ -Tupel gibt $\nu + 1$ verschiedene 2-mal fortgesetzte „Produkte“ $* s_{l-1}^0 * s_{2\nu}^l$ (für $l = 0, 1, \dots, \nu$), wo man für $l = 0$ auch $*^2 s_{2\nu}^0$ schreibt. $(k\nu + 1)$ -Tupel ergeben k -mal fortgesetzte Produkte, u. a. $*^k s_{k\nu}^0$. Die folgenden verallgemeinerten (Halb-)Gruppeneigenschaften werden betrachtet: l -Regularität (Kürzungsregeln), d. h. $* a_{l-1}^0 b a_{\nu}^{l-1} = * a_{l-1}^0 c a_{\nu}^{l-1} \Rightarrow b = c$. l -Umkehrbarkeit, d. h. Lösbarkeit der Gleichung $* a_{l-1}^0 x a_{\nu}^{l-1} = b$. Einfache Umkehrbarkeit, d. h. l -Umkehrbarkeit für ein l , $0 < l < \nu$, oder für $l = 0$ und $l = \nu$ gleichzeitig ($l = 0$ und $l = \nu$ werden sozusagen nur halb gezählt). Teilweise Assoziativität, d. h. Gleichheit gewisser 2-mal fortgesetzter Produkte über dieselbe Folge $s_{2\nu}^0: * a_{p-1}^0 * a_{2\nu}^p = * a_{q-1}^0 * a_{2\nu}^q$, $0 \leq p < q$; $*$ heißt insbesondere (j, k) -assoziativ, wo $j|k|\nu$ (d. h. $\nu = nk$, etc.), wenn dies für alle p und q mit $j|p$ und $k|(q-p)$ gilt. $(1, 1)$ -Assoziativität ist daher allgemeine Assoziativität und ergibt mit allgemeiner Umkehrbarkeit (für alle l) die polyadische Operation von Post. — Der Hauptsatz von Thurston erlaubt eine Art von Faktorzerlegung gewisser teilweise assoziativer Operationen in kürzere, ebenfalls teilweise assoziative Operationen und verallgemeinert den Satz von Post, daß jede polyadische Operation als fortgesetzte gewöhnliche (binäre) Gruppenoperation aufgefaßt werden kann. Er lautet: Zu jeder $(1, k)$ -assoziativen und einfach umkehrbaren $(nk + 1)$ -ären Operation $*$ über S gibt es eine (k, k) -assoziative $(k + 1)$ -äre Operation \dagger über einer Menge U , $U \supset S$, so daß für alle $s_{nk}^0 \in S^{nk+1}$ gilt: $* s_{nk}^0 = \dagger^n s_{nk}^0$. Der Beweis beruht, ähnlich wie bei Post, auf der Kon-

struktion einer „regulären“ Äquivalenz q in einer gewissen Menge endlicher Folgen aus S . Man könnte q geradezu graduiert nennen, da sie als Mengenvereinigung von Äquivalenzen q_m ($m = 0, \dots, n-1$) für $(mk+1)$ -Tupel aufgefaßt werden kann: $f_{mk}^0 q g_{mk}^0 \Leftrightarrow (\exists s_v^{mk+1}) (f_{mk}^0 s_v^{mk+1} = g_{mk}^0 s_v^{mk+1})$. Es wird gezeigt, daß solche Tupel f_{mk}^0, g_{mk}^0 einander in allgemeineren Gleichungen ersetzen können (Regularität). Die Menge U ist im wesentlichen die Menge der Äquivalenzklassen modulo q , wo jedoch für $m = 0$, d. h. für 1-Tupel, Äquivalenzklassen mit Elementen aus S identifiziert werden dürfen. Der Hauptsatz gestattet mehrere Varianten, die modifizierten Voraussetzungen entsprechen. Der zweite Teil enthält kompliziertere Ersetzungs- (Substitutions-)sätze, jedoch keine entsprechende reguläre Äquivalenz. Der dritte Teil betrachtet besondere Tupel, die verallgemeinerte Einheits-(Identitäts-)eigenschaften haben. Der Verf. erstrebt häufig größere Allgemeinheit durch Verwendung von Komplexen (abstrakten Untermengen) an Stelle einzelner Elemente von S , analog der üblichen Komplexrechnung z. B. in Gruppen. Es kommen mehrere leicht erkennbare Druckfehler vor. Im Lemma G und seinem

Beweis (p. 491) muß $k + \sum_{i=0}^k p_i$ stets durch $1 + k + \sum_{i=0}^k p_i$ ersetzt werden; folglich wird

dort $r = [(\sum p_i + k)/v]$ und $q = (r+1)v - k - \sum p_i$. D. Tamari.

Clifford, A. H.: Bands of semigroups. Proc. Amer. math. Soc. 5, 499—504 (1954).

Un demi-groupe D est dit „band“ de demi-groupes de type T s'il est réunion de sous-demi-groupes disjoints D_α ($\alpha \in I$), tous les D_α étant des demi-groupes de type T , tels que $D_\alpha D_\beta \subseteq D_\gamma$ où γ dépend seulement de α et β . En particulier, a) si $D_\alpha D_\beta \subseteq D_\gamma$ et $D_\beta D_\alpha \subseteq D_{\gamma'}$ entraînent $\gamma = \gamma'$, on a affaire à un demi-treillis de demi-groupes de type T ; b) si les D_α peuvent être munis de deux indices i et j tels que $D_{ij} D_{i'j'} \subseteq D_{ij'}$, on obtient une matrice de demi-groupes de type T . L'A. démontre le théorème général suivant: Tout „band“ de demi-groupes de type T est un demi-treillis de demi-groupes dont chacun est une matrice de demi-groupes de type T . Il étudie les cas particuliers où les D_α sont des demi-groupes simples, des demi-groupes complètement simples ou des groupes. Les notions de „band“ (et même de réunion) de demi-groupes simples et de demi-treillis de demi-groupes simples coïncident, de même que celles de „band“ (et de réunion) de demi-groupes complètement simples, de demi-treillis de demi-groupes complètement simples et de réunion de groupes. Les demi-treillis de groupes sont les réunions de groupes dont les idempotents sont permutables.

R. Croisot.

Evans, Trevor: An embedding theorem for semigroups with cancellation. Amer. J. Math. 76, 399—413 (1954).

Let \mathfrak{A} be a class of algebras. We say that \mathfrak{A} has the property E_n , if every countable \mathfrak{A} -algebra is embeddable in an \mathfrak{A} -algebra generated by n elements. We say that \mathfrak{A} has the property U_n , if there exists an n -generator \mathfrak{A} -algebra F possessing a denumerably infinite subset S such that every mapping of S onto a generating set of an \mathfrak{A} -algebra G can be extended to a homomorphism of F onto an \mathfrak{A} -algebra H containing G . Thus U_n implies E_n and means that the embedding can, moreover, be done „uniformly“. Groups and semigroups have property U_2 (Graham Higman, B. H. Neumann, Hanna Neumann, this Zbl. 34, 301; T. Evans, this Zbl. 47, 21); loops, quasigroups, and groupoids have property U_1 (T. Evans, loc. cit.). In all these cases \mathfrak{A} is a variety of algebras, and F can be taken as a free algebra of the variety. In the present paper the author shows: For semigroups with cancellation, with or without neutral element, U_n is false for all n , E_2 is false (but he conjectures E_4 to be true). But U_2 holds for cancellation semigroups without non-trivial subgroups. This result is used to derive from Turing's example (A. M. Turing, this Zbl. 37, 301) a two-generator cancellation semigroup which is finitely related, and for which the word problem is unsolvable.

Hanna Neumann.

Liber, A. E.: Zur Theorie der verallgemeinerten Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 25—28 (1954) [Russisch].

Ein Element g einer Halbgruppe \mathfrak{G} heißt im verallgemeinerten Sinne (i. v. S.) invertierbar, wenn in \mathfrak{G} (mindestens) ein i. v. S. inverses Element existiert, d. h. ein Element \bar{g} mit $g\bar{g}g = g$ und $\bar{g}g\bar{g} = \bar{g}$. Nach V. V. Vagner wird eine verallgemeinerte (v.) Gruppe definiert als eine solche Halbgruppe, in der jedes Element i. v. S. invertierbar ist und je zwei idempotente Elemente vertauschbar sind. Verf. zeigt, daß diese beiden Eigenschaften der folgenden äquivalent sind: Zu jedem Element g gibt es genau ein i. v. S. inverses g^{-1} . Weitere Sätze behandeln diejenigen

v. Gruppen, in denen stets $gg^{-1} = g^{-1}g$ gilt. Schließlich werden die idempotenten Elemente einer v. Gruppe (\mathfrak{G} betrachtet). Diese bilden eine v. Gruppe \mathfrak{J} . Null- und Einselement von \mathfrak{J} (falls vorhanden) geben Anlaß zur Bildung der Komplexe $(\mathfrak{G}_0$ bzw. \mathfrak{G}_e , bestehend aus allen $g \in \mathfrak{G}$, für die $g^{-1}g = 0$ bzw. $= e$. Stets ist \mathfrak{G}_0 eine Gruppe, \mathfrak{G}_e dagegen nur unter weiteren Voraussetzungen. *R. Kochendörffer.*

● Alexandroff, P. S.: Einführung in die Gruppentheorie. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik. II.) Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1954. 120 S.

Das vorliegende Werk wendet sich an Leser mit geringen mathematischen Vorkenntnissen, etwa an Schüler der letzten Oberschulklassen, und setzt sich das Ziel, diese mit den wichtigsten gruppentheoretischen Grundbegriffen vertraut zu machen. Im Gegensatz zu manchen populären Büchern, die einer spielerischen Darstellungsform zuliebe eine gewisse Oberflächlichkeit in Kauf nehmen, handelt es sich hier durchaus um ein wissenschaftliches Werk im strengen Sinne, dessen Verständnis zwar durch viele geschickt gewählte Beispiele erleichtert wird, das aber stets die ernsthafte Mitarbeit des Lesers erfordert. In den einzelnen Kapiteln wird folgendes behandelt: 1. Der Begriff der Gruppe. 2. Permutationsgruppen. 3. Einige allgemeine Bemerkungen über Gruppen. Der Begriff des Isomorphismus. 4. Zyklische Untergruppen einer vorgegebenen Gruppe. 5. Einfache Bewegungsgruppen. 6. Invariante Untergruppen. 7. Homomorphe Abbildungen. 8. Klasseneinteilung von Gruppen nach einer gegebenen Untergruppe. Restklassengruppen. *R. Kochendörffer.*

Plotkin, B. I.: Über Nilgruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 999—1001 (1954) [Russisch].

The author calls a group G a nilgroup if for every pair x, y of elements of G there exists a natural number k (depending on x and y) such that the k -fold repeated commutator $[\dots [x, y], y] \dots]$ is the unit element of G . Groups with this property have also been called Engel groups (K. W. Gruenberg, this Zbl. **50**, 19). The author proves the following properties of nilgroups: Every torsion-free nilgroup is an R -group. If a nilgroup has an ascending normal soluble series of finite or infinite length, then it is locally nilpotent. A torsion-free nilgroup with minimal condition for isolated subgroups is nilpotent. *K. A. Hirsch.*

Lazard, Michel: Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. **71**, 101—190 (1954).

An N -series of a group G is a series $G = H_1 \supset H_2 \supset \dots$ such that if $x \in H_i$, $y \in H_j$ then $[x, y] \in H_{i+j}$. The lower central series is the best-known example. If G has an N -series with trivial intersection, G is called an N -group. The author associates with an N -series a certain graduated Lie ring: its additive group is the direct sum of the quotients H_i/H_{i+1} written additively, and its Lie (or „bracket“) multiplication is obtained from commutation in G by postulating distributivity. The graduation is defined by calling the elements of H_i/H_{i+1} „homogeneous of degree i “. This generalizes the well-known construction introduced by Magnus (this Zbl. **25**, 242) for the lower central series and by Zassenhaus (this Zbl. **21**, 200) for the dimension groups modulo a prime number. The interrelations between groups, their N -series, and the corresponding Lie rings are then studied: not only are known results of Magnus, Witt, Zassenhaus, and others shown to spring from a common root, but they are carried further in a number of directions. As an example the dimension groups modulo arbitrary integers. Some of the results have already been briefly described by the author (this Zbl. **50**, 253). The first part of the paper closes with the statement and discussion of a number of unsolved problems that naturally arise in the context. — In the second part the Baker-Hausdorff formula is used for the study of nilpotent groups and N -series. The author's results connecting his „typical sequences“ with Philip Hall's „commutator collecting process“ and the inversion of the Baker-Hausdorff formula, briefly described in two notes (this Zbl. **50**, 20; **51**, 15), are now treated in full detail. The method yields *inter alia* a new proof of results of Mal'cev (this Zbl. **34**, 17; **38**, 171) on locally nilpotent locally infinite groups, and incidentally weakens the assumption of local nilpotence to nilpotence of all 3-generator subgroups. One remarkable theorem establishes a correspondence between Lie rings of prime characteristic p with the property that every 3-generator subring has class less than p , and p -groups in which every 3-generator subgroup has class less than p ; in this corre-

spondence subrings and subgroups correspond to each other, and in particular ideals and normal subgroups. An illustrative example is made of a Lie ring of characteristic 5 and the corresponding group; this is of exponent 5 and order 5^{91} , has 4 generators and class 5, and every 3-generator subgroup of it has class 4 or less. For numerous further results the reader has to be referred to the paper itself.

B. H. Neumann.

Hall, P.: The splitting properties of relatively free groups. *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. 4, 343—356 (1954).

A variety of groups is the class of all groups satisfying certain laws (or „identical relations“); in every variety \mathfrak{B} there are the *reduced free* (or „relatively free“) groups $F_r(\mathfrak{B})$ of rank r , one for each cardinal number r . The variety \mathfrak{B} has the *Schreier property* if every subgroup of $F_r(\mathfrak{B})$ is an $F_s(\mathfrak{B})$. (Examples: the variety of all groups, and that of the abelian groups.) A group $G \in \mathfrak{B}$ has the *splitting property* if whenever $H \leq \mathfrak{B}$ is an extension of a normal subgroup K by G , then H splits over K . Every $F_r(\mathfrak{B})$ has the splitting property. For varieties with the Schreier property the converse is also true. The main result of the paper is a complete characterization of the groups with the splitting property when \mathfrak{B} is a *nilpotent variety* (i. e. one consisting of nilpotent groups of bounded class) of exponent m (i. e. satisfying the law $x^m = 1$). If $m = 0$ or if m is a prime power, then every group G with the splitting property is an $F_r(\mathfrak{B})$; while if m is divisible by s distinct primes, G is the direct product of s reduced free groups of varieties that can be easily characterized in terms of \mathfrak{B} . Various aspects of the problem what groups of a variety \mathfrak{B} can have the splitting property are discussed. Next finite reduced free groups are studied. The *lower nilpotent series* of a finite group G is defined by starting from G and taking, step by step, the (unique) least normal subgroup with nilpotent factor group in its predecessor. The *lower p -series*, where p is a prime, is defined by starting from G and taking, step by step, the (unique) least normal subgroup whose factor group has, alternating, order a power of p and order prime to p . The main result about finite reduced free groups $F_r(\mathfrak{B})$ is that such a group splits over every term of its lower nilpotent series and of its lower p -series for every p ; the factor group is in each case a splitting group of \mathfrak{B} , and a reduced free group, again of rank r , of the minimal variety to which it belongs. In the final section known splitting properties of finite groups are discussed, compared, and put in proper perspective by means of a number of counter-examples.

B. H. Neumann.

Erdős, J.: The theory of groups with finite classes of conjugate elements. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* 5, 45—58 und russ. Zusammenfassg. 58 (1954).

Following Baer (this Zbl. 31, 197) a group is called an FC-group if every element has only a finite number of distinct conjugates. The author gives a lucid and elementary account of such groups, proving all the relevant results of Baer (op. cit. and this Zbl. 46, 22), Dietzmann (this Zbl. 16, 294), B. H. Neumann (this Zbl. 43, 24). In order to make the treatment self-contained and simple, the author avoids the use of Schreier's theorem that a subgroup of finite index in a finitely generated group is finitely generated, by proving it for the special case of FC-groups; and he avoids the need for splitting extensions and direct products with amalgamated subgroups, which featured in the last-quoted paper, by a neat proof of the following fact: Let G be a finitely generated FC-group and let m be a positive integer such that the m^{th} power of every element of G lies in the centre and, if not the unit element, has infinite order — such a number exists — then $(xy)^m = x^m y^m$ for all $x, y \in G$. As one of the applications of the theory a very brief proof of the following theorem of Fedorov (this Zbl. 42, 18) is given: If in a group the trivial subgroup and only the trivial subgroup has infinite index, then the group is infinite cyclic. Finally examples are constructed to show that the results obtained are best possible.

B. H. Neumann.

Chehata, C. G.: Simultaneous extension of partial endomorphisms of groups. *Proc. Glasgow math. Assoc.* 2, 37—46 (1954).

The partial endomorphisms μ_1 and ν_1 of a group G_1 , i. e. homomorphisms mapping subgroups A and C of G_1 onto subgroups $A\mu_1 = B$ and $C\nu_1 = D$ of G_1 , are said to be simultaneously extendable to total endomorphisms, if there exists a supergroup G of G_1 possessing endomorphisms μ and ν which on A and C coincide with μ_1 and ν_1 respectively. To every element ω of the free semi-group Ω generated by elements denoted again by μ and ν corresponds an endomorphism of G , and thus a normal subgroup L_ω of G , viz. the intersection of the kernel of ω with G . These L_ω have the following properties: (i) $L_\omega \subset L_{\omega\omega'}$ for any two elements $\omega, \omega' \in \Omega$; (ii) $L_\mu \cap A$ is the kernel of μ_1 and $L_\nu \cap C$ is the kernel of ν_1 ; (iii) $(L_{\mu\nu} \cap A)\mu_1 = L_\nu \cap B$ and $(L_{\nu\mu} \cap C)\nu_1 = L_\mu \cap D$. Conversely, the existence of a system of normal subgroups L_ω of G_1 satisfying (i)—(iii) ensures that μ_1 and ν_1 can be simultaneously extended to total endomorphisms of a supergroup of G_1 . This theorem contains as a special case the result by B. H. Neumann and the reviewer on the extension of a single partial endomorphism [*Proc. London math. Soc.*, III. Ser. 2, 337—348 (1952)]; it is proved by the same method of step by step extension, applied alternately to μ_1 and ν_1 . The same method also deals with the simultaneous extension

of an arbitrary number of partial endomorphisms. A number of corollaries include in particular the result that any number of partial endomorphisms of an abelian group can be simultaneously extended to total endomorphisms of an abelian supergroup.

Hanna Neumann.

Haimo, Franklin: Automorphisms generated by a class of subnormal subgroups. Duke math. J. **21**, 349–353 (1954).

Ist $G = N_0$, N_{i+1} ein Normalteiler von N_i und $N_m = 1$, bilden also die N_i eine Normalkette von G , so ordnet Verf. dieser Normalkette die Gruppe aller den Bedingungen $x^i = x$ modulo N_{i+1} für x in N und $0 \leq i \leq m$ erfüllenden Automorphismen σ von G zu. Enthält etwa N_{m-1} das Zentrum einer jeden der Untergruppen N_i , so ist diese Automorphismengruppe nilpotent – das $(m-1)$ -ste Glied der absteigenden Zentrenkette wird gleich 1; und sind etwa die letzten Glieder der vorliegenden Normalkette gerade die Glieder der aufsteigenden Zentrenkette, so kann man die Auflösbarkeit dieser Automorphismengruppe zeigen. R. Baer.

Scott, W. R.: On the order of the automorphism group of a finite group. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 23–24 (1954).

Teilt p^n , p Primzahl, die Ordnung $G:1$ einer abelschen Gruppe G , so teilt p^{n-1} die Ordnung $A(G):1$ ihrer Automorphismengruppe $A(G)$ [H. Hilton, Mess. of Math., II. Ser. **38**, 132–134 (1990)]. Für allgemeine Gruppen G haben bisher I. N. Herstein und J. E. Adney (dies. Zbl. **46**, 249) bewiesen, daß aus $p^2|G:1$ folgt $p|A(G):1$. Verf. beweist für eine p -Sylowgruppe S von G , Z Durchschnitt von S mit dem Zentrum von G : Aus $S:Z \geq p^{n-1}$ oder $S:Z = 1$ oder $S:Z = p$ folgt $p^{n-1}|A(G):1$. Hieraus ergibt sich: Aus $p^3|G:1$ folgt $p^2|A(G):1$.

W. Gaschütz.

Kertész, A.: On subgroups and homomorphic images. Publ. math., Debrecen **3**, 174–179 (1954).

Der Ausgangspunkt des Verf. ist die Bemerkung, daß in der Theorie der abelschen Gruppen eine gewisse Dualität besteht, bei der die einander entsprechenden Begriffe sind: die freien und vollständigen abelschen Gruppen (G heißt vollständig, falls $n|G - G$ für jede natürliche Zahl n), ferner die Unter- und Faktorgruppen. Z. B.: jede abelsche Gruppe ist eine Unter- (Faktor-)gruppe einer passenden vollständigen (freien) abelschen Gruppe usw. Als eine weitere Illustration dieser Dualität beweist Verf.: hat jede, die abelsche Gruppe H als Unter- (Faktor-)gruppe besitzende Gruppe eine mit H isomorphe Faktor- (Unter-)gruppe, so muß H vollständig (frei) sein. Ferner wird auch der folgende selbstduale Satz bewiesen: jede, die Gruppe H als endomorphes Abbild besitzende Gruppe enthält dann und nur dann einen mit H isomorphen direkten Summanden, wenn H die direkte Summe einer vollständigen und einer freien abelschen Gruppe ist (einer der Summanden kann verschwinden). Zum Schluß zeigt Verf. durch Beispiele, daß die erwähnte Dualität für nichtkommutative Gruppen aufhört richtig zu sein.

L. Fuchs.

Ehrenfeucht, A. et J. Loś: Sur les produits cartésiens des groupes cycliques infinis. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 261–263 (1954).

C sei die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Ist T eine Menge, so sei C^T die Gruppe der Abbildungen $T \rightarrow C$, C^{T*} die Untergruppe derjenigen Funktionen von C , die nur auf endlich vielen Elementen einen von 0 verschiedenen Wert haben; ist $t \in T$, so sei e_t die charakteristische Funktion der Menge $\{t\}$. Es werden die folgenden Sätze angekündigt: (1) Ist h ein Homomorphismus von C^T in C , so ist $h(e_t) = 0$ nur für endlich viele $t \in T$. (2) Es gibt genau dann einen nicht identisch verschwindenden Homomorphismus von C^T in C , der die Elemente von C^{T*} auf 0 abbildet, wenn in T ein abzählbar additives Maß existiert, welches die Werte 0, 1 annimmt und auf T den Wert 1 hat. [Für abzählbares T sind (1), (2) vom Ref. bewiesen worden; dies. Zbl. **41**, 363.] Existiert kein solches Maß, so kann aus (1) und (2) auf die Struktur der Homomorphismengruppe von C^T in C und der Endomorphismengruppe von C^T geschlossen werden. Verff. sprechen ferner den folgenden Satz aus:

Ist die Gruppe H_G der Homomorphismen einer Gruppe G in die Gruppe C isomorph C^T , so läßt sich G darstellen als direkte Summe $A + B$, wobei A isomorph C^T und die Homomorphismengruppe H_B von B in C die Nullgruppe ist. *E. Specker.*

Wever, Franz: Über die Kennzeichnung von Relationen endlicher Gruppen. Arch. der Math. **5**, 326—331 (1954).

If $w(x_1, \dots, x_k)$ is a word in the generators of a free group of rank k , then $w = 1$ is an „identical relation“ (or „law“) of the group G , if $w(a_1, \dots, a_k) = 1$ for all choices of a_1, \dots, a_k in G . If the relation does not hold identically in G , but if G can be generated by k elements and the relation holds for every sequence of k generators of G , then the author calls the relation $w = 1$ a „characteristic relation“ of G . If $x^t = 1$ holds identically in G , then all characteristic relations of G are shown (Theorem 3) to follow from those of the form $x_1^d = f(x_1, \dots, x_k)$, where $0 \leq d \leq t$ and f is a commutator word (that is to say, contained in the derived group of the free group). — The author has drawn the reviewer's attention to a gap in the proof of Theorem 4, and so wishes to withdraw this theorem. The remark preceding Theorem 5 („Es ist nicht bekannt . . .“) is in error. The first reference is misprinted: the volume number should read 114 and the year 1937. *B. H. Neumann.*

Baer, Reinhold: Direkte Faktoren endlicher Gruppen. J. reine angew. Math. **192**, 167—179 (1953).

Bei der Zerfällung einer endlichen Gruppe G in ein Produkt $G = NH$, $N \cap H = 1$, N Normalteiler von G , spielt die Lage von N relativ zur Φ -Untergruppe $\Phi(G)$ eine wichtige Rolle. Z. B. ist $N \cap \Phi(G) = 1$ hinreichend für das Bestehen einer solchen Zerfällung. Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium ist nicht bekannt. Verf. untersucht nun die Existenz von Zerfällungen mit festem N in Abhängigkeit von $\Phi(G)$ unter der Einschränkung, daß neben N auch H Normalteiler von G und damit N direkter Faktor von G ist. Es ergibt sich hierbei die Notwendigkeit, zur vollständigen Charakterisierung solcher direkten Faktoren neben $\Phi(G) = \Phi_1(G)$ noch die iterierten Bildungen $\Phi_{i+1}(G) = \Phi(\Phi_i(G))$ heranziehen. Ist N abelsch, so gilt: N ist dann und nur dann direkter Faktor von G , wenn $\Phi_i(N) = N \cap G' \Phi_i(U)$ für jede Untergruppe U , $N \subseteq U \subseteq G$, und $i = 1, 2, \dots$ erfüllt ist. Ist G nilpotent, so ist schon die Gültigkeit dieser Beziehung für $U = G$ hinreichend. — Für nichtabelsches N fällt die Charakterisierung wesentlich komplizierter aus. Es ist dann notwendig und hinreichend $[Z(X) = \text{Zentrum von } X, Z(X \subset Y) \text{ Zentralisator von } X \text{ in } Y]:$ 1. a) $N' \Phi_i(N) = N \cap G' \Phi_i(U)$, b) $\Phi_i(U) = \Phi_i(N) \Phi_i[Z(N \subset U)]$ c) $G' \Phi_i(U)/N' \Phi_i(N) \cong Z(N \subset G)' \Phi_i[Z(N \subset U)] \Phi_i[Z(N)]$, U, i wie oben. — 1. a—c sind auch mit folgenden Bedingungen 2 oder 3 gleichwertig: 2. a) $N G' \Phi_i(U)/N \cong Z(N \subset G)' \Phi_i[Z(N \subset U)] \Phi_i[Z(N)]$, b) $\Phi_i(U) = \Phi_i(N) \Phi_i[Z(N \subset U)]$, U, i wie oben. 3. a) $G = N Z(N \subset G)$, b) $\Phi_i[Z(N)] = Z(N) \cap Z(N \subset G)' \Phi_i(V)$, für alle Untergruppen V , $Z(N) \subseteq V \subseteq Z(N \subset G)$, $i = 1, 2, \dots$. — Ist G nilpotent, so genügt es, wenn 1 oder 2 für $U = G$ oder 3 für $V = Z(N \subset G)$ erfüllt ist. *W. Gaschütz.*

Čunichin, S. A.: Über die Zerlegung π -trennbarer Gruppen in ein Produkt von Untergruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 725—727 (1954) [Russisch].

The author proves two factorisation theorems for Π -separable groups. (For the definitions see, for example, this Zbl. **39**, 17.) 1. Let m be a maximal Π -Sylow divisor of the order g of a Π -separable group G . Then to every decomposition of m into the product of two co-prime factors m_1 and m_2 , $m = m_1 m_2$, there corresponds a factorisation of G in the form of a product $G = M_1 M_2$; here M_1 and M_2 are subgroups of G for which m_1 and m_2 are maximal Π -Sylow divisors of the orders, respectively. 2. Let again $m = 1$ be a maximal Π -divisor of the order g of a Π -separable group G and $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, where p_1, p_2, \dots, p_k are the distinct prime divisors of m . Then G can be represented in the form of a product $G = P_1 P_2 \dots P_k$, where P_1, P_2, \dots, P_k are subgroups of G for which the numbers $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k^{\alpha_k}$ are maximal Π -Sylow divisors of the orders, respectively. Whether the additional properties (permutability, conjugacy) of P. Hall's well-known result can be satisfied for a suitable choice of the subgroups, is an open problem. The limitations of theorem 2 are illustrated by the alternating group A_5 for $\Pi = \{2, 5\}$. The group is the product of a cyclic group of order 5 and a dihedral group of order 12. *K. A. Hirsch.*

Frame, J. S., G. de B. Robinson and R. M. Thrall: The hook graphs of the symmetric group. Canadian J. Math. **6**, 316—324 (1954).

The right hook of the i, j^{th} node of a right or skew Young diagram $[\lambda]$ (see e. g. Rutherford, this Zbl. **38**, 16; Robinson, this Zbl. **36**, 154) consists of the nodes (i, k) , $j \leq k$ and the nodes (l, j) , $i \leq l$ [see Nakayama, Japanese J. Math. **17**, 165—184, 411—423 (1941)]. The total number

of nodes h_{ij} of the i, j^{th} hook is called the i, j^{th} hook number. The present authors introduce the concept of hook graph, which is the diagram with the i, j^{th} hook number h_{ij} placed on the i, j^{th} node. Using a well-known formula of Frobenius and Young (see Rutherford, *ibid.*, p. 26) for the degree f_λ of the irreducible representation belonging to the right diagram $[\lambda]$, they prove by elementary arguments that this degree equals $n! / H$ where H denotes the product of the numbers of the hook graph and n the number of nodes. This formula remains valid for the reducible representation corresponding to a skew diagram. Making elaborate use of the hook graph the authors greatly simplify the proofs and theorems (A, B, B', C) of Staal's paper (this Zbl. 36, 155). For instance, in order to find the hook graph of the q -quotient or star diagram $[\lambda]^*$ (see Robinson, this Zbl. 36, 155), divide the numbers of the hook graph by q and delete all except the integers. It is quite obvious that this diagram has the desired properties. Staal's (Nakayama's) theorem C is proved by a simple rule for hook removal in the hook graph. Also Nakayama's formula for the exponent of the highest power of p , dividing f_λ i.e. $e(\lambda) = e(n!) - e((n-a)!) + e(l_\lambda^*)$, where a is the number of nodes of the p -core, (see Robinson, this Zbl. 29, 199), follows immediately. The paper concludes with a rule for the construction of the q -core without actually removing hooks and some considerations about the leg length of a right hook (number of nodes beneath the corner).

J. Verhoeff.

Frame, J. S. and G. de B. Robinson: On a theorem of Osima and Nagao. Canadian J. Math. 6, 125—127 (1954).

Let S_n be the symmetric group of degree n and p be a prime number. Let B be a p -block of representations of S_n and let a be the number of nodes in the corresponding p -core (Brauer, this Zbl. 29, 199; Robinson, this Zbl. 29, 199). Put $n = a + b \cdot p$. Then the number of modular irreducible representations in B is determined by the number b only (Robinson, this Zbl. 46, 250) and is given by $l'_b = \sum p_{b_1} p_{b_2} \cdots p_{b_{p-1}} (\sum_{i=1}^{p-1} b_i = b, 0 \leq b_i \leq b)$, where p_x is the number of partitions of x (Osima, this Zbl. 52, 23; Nagao, this Zbl. 52, 23). The paper gives a new proof to this formula, on using the similar relation for the number of ordinary irreducible representations in B (Robinson, *l.c.*) and the generating function $L'(x) = 1 + l'_1 x + l'_2 x^2 + \cdots$. It proves also that the number of p -regular classes of S_n is equal to the number of partitions of n in which no summand appears as many as p times.

T. Nakayama.

Higman, D. G.: Modules with a group of operators. Duke math. J. 21, 369—376 (1954).

Let G be a group, S a subgroup of finite index in G , and Ω any set. The author considers those G - Ω -modules M such that M is a direct summand of every G - Ω -module H of which it is a G - Ω -submodule in such a way that M_S is a direct summand of H_S (where M_S, H_S denote the S - Ω -modules induced by M, H). Those M are characterized by the existence of an S - Ω -endomorphism χ of M such that $\sum x \chi x^{-1} = 1$ in the endomorphism ring of M (where the summation is to be extended over a full set of left representatives x for G over S). This result coincides in the case $S = 1$ with W. Gaschutz's generalization of Maschke's theorem (this Zbl. 47, 27). Another characterization of those M is that the G - Ω -module induced by M_S contains a direct summand equivalent to M . This contains a theorem of B. Eckmann (this Zbl. 50, 172). As an application, the author obtains theorems about induced indecomposable representations in a field of prime characteristic. These theorems are proved directly in his subsequent paper (see theorems A, B stated below).

P. Roquette.

Higman, D. G.: Indecomposable representations at characteristic p . Duke math. J. 21, 377—381 (1954).

Every finite group G with cyclic p -Sylow subgroups has only a finite number of classes of indecomposable representations over a field F of characteristic $p \neq 0$. Their degrees are bounded by the order g of G , and their number is bounded by $(p-2)[n(p-1)-p+1]$ if $g = p^2 n$ with $(p, n) = 1$. On the other hand, if the p -Sylow subgroups of G are not cyclic, then G possesses indecomposable representations over F of arbitrarily high degree. Moreover if F is infinite, then G possesses infinitely many classes of indecomposable representations of degree $\leq 2n$ over F . These results are consequences of the following theorems about induced indecomposable representations: (A) If S is a subgroup of G containing a p -Sylow subgroup of G ,

then one can obtain all indecomposable representations of G over F by decomposing the representations induced in G by all the indecomposable representations of S over F . (B) If S is any subgroup of G , then one can obtain all indecomposable representations of S over F by decomposing the representations induced in S by all the indecomposable representations of G over F .

P. Roquette.

Dieudonné, Jean: Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$. Commentarii math. Helvet. 28, 87—118 (1954).

The author continues his study of algebraic Lie groups over a field of characteristic p (this Zbl. 48, 255) by considering formal Lie groups over such a field [cf. Bochner, Ann. of Math., II. Ser. 47, 192—201 (1946)], of which algebraic Lie groups, considered locally, are shown to be a particular case. With every formal Lie group G of characteristic p a Lie hyperalgebra \mathfrak{G} is associated, which is an associative algebra consisting of all the left-invariant semi-derivations of the group space (cf. Dieudonné, this Zbl. 40, 159). In particular the usual Lie algebra \mathfrak{g}_0 of G , which consists of all left-invariant derivations, is contained in \mathfrak{G} ; in the classical case \mathfrak{G} reduces to the associative enveloping algebra of \mathfrak{g}_0 , but in the present case the structure of \mathfrak{G} is more complicated than that of \mathfrak{g}_0 and gives also more information about the group. Thus e.g. the group G is abelian if and only if its hyperalgebra \mathfrak{G} is abelian, a statement which becomes false if \mathfrak{g}_0 is substituted for \mathfrak{G} . — The structure of \mathfrak{G} is described in terms of the group G ; thus it is shown that a homomorphism of groups induces a homomorphism of their hyperalgebras, and some necessary conditions are given for the converse to hold. The paper concludes with a more detailed study of homomorphisms of formal Lie groups in the case of a perfect ground field: By a suitable choice of coordinates every such homomorphism can be expressed in the form $y_1 = x_1 p^{i_1}, \dots, y_m = x_m p^{i_m}, y_{m+1} = \dots = y_n = 0$ ($0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m$). *P. M. Cohn.*

Lazard, Michel: La non-existence des groupes de Lie formels non abéliens à un paramètre. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 942—945 (1954).

K étant un anneau commutatif avec unité, on considère l'algèbre A des séries formelles sans terme constant en x, y, z à coefficients dans K . Soit $f(x, y)$ un élément de A tel que (1°) les termes constants de $\partial f / \partial x$ et $\partial f / \partial y$ soient égaux à l'unité; (2°) on ait $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$. Dans les conditions la loi de composition $*$ définie dans A par $u * v = f(u, v)$ est une loi de groupe. L'A. montre que si K ne contient pas d'élément nilpotent non nul, A est un groupe abélien.

P. Dedecker.

Gluškov, V. M.: Nilpotente, lokal bikompakte Gruppen. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3 (61), 230—231 (1954) [Russisch].

Schöneborn, Heinz: Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen. II. Math. Z. 60, 17—30 (1954).

(Teil I, dies. Zbl. 55, 22). Der Verf. entwickelt die Charakterentheorie der Abelschen torsionstopologischen Gruppen, welche den Ring \mathbb{R}_p der ganzen p -adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich besitzen. Dabei ist die Topologie der in Betracht kommenden additiv geschriebenen Gruppe A durch ein Umgebungssystem \mathfrak{U} , bestehend aus (als „charakteristisch“ ausgezeichneten) Untergruppen und deren Nebenscharen, definiert, und wenn jede Restklassengruppe A/A_λ (A_λ : charakteristisch) eine Torsionsgruppe ist, so heißt A torsionstopologisch. Ein kommutativer Multiplikationsring P mit Einselement von A wird als ein „natürlicher Operatorenbereich“ von A bezeichnet, wenn (i) $P a = (a)$ (die kleinste das Element $a \in A$ enthaltende abgeschlossene Untergruppe von A), (ii) $\widetilde{M} \cdot a = \widetilde{M} \cdot a$ für jedes $a \in A$ und jede Untermenge $M \subseteq P$ (\widetilde{M} bedeutet die abgeschlossene Hülle in P bzw. A). Zwei Topologien in derselben Gruppe A heißen äquivalent, wenn sie in allen zyklischen Gruppen von A identische Topologien induzieren. Eine feinste Topologie in dieser Topologiekategorie heißt dann eine „ S -Topologie“ von A . Der Verf. entwickelt auch den Begriff der K -Topologie. Er nennt eine Gruppe einrangig, falls für beliebige Untergruppen E_1 und E_2 stets entweder $E_1 \subseteq E_2$ oder $E_2 \subseteq E_1$ gilt, und eine vollständige Gruppe A heißt K -topologisch, wenn jede Restklassengruppe A/A_λ (A_λ : charakteristisch) die abgeschlossene Hülle der Vereinigungsgruppe endlich vieler einrangiger Untergruppen ist. Dann wird unter einem Charakter der Gruppe A ein stetiger und offener Homomorphismus von A in $Z = \mathbb{R}_p^+ \mathbb{R}_p^+$ verstanden, wo \mathbb{R}_p^+ bzw. \mathbb{R}_p^+ die Additionsgruppe der p -adischen bzw. der ganzen p -adischen Zahlen bedeutet. Die Menge $C[A]$ aller Charaktere von A , wie gewöhnlich topologisiert, nennt man die Charaktergruppe von A . Ist A K -topologisch bzw. S -topologisch, so ist $C[A]$ S -topologisch bzw. K -topologisch. Ist A ferner eine primäre Gruppe, so gilt der Dualitätssatz: $A \simeq C[C(A)]$. Dabei heißt die Gruppe A primär, wenn für jede abgeschlossene Untergruppe B gilt: Ist $a \in A$ ein Element mit endlicher Ordnung mod B , so ist die Ordnung eine Potenz einer (festen) Primzahl p . Der Dualitätssatz gilt auch unter schwächeren

Bedingungen. Ein Teil der Resultate vorliegender Arbeit wurde unabhängig von I. Kaplansky [Proc. Amer. math. Soc. 4, 213—219 (1953)] erhalten, wie Verf. selbst bemerkt. *T. Tannaka.*

Cotlar, M. and R. Ricabarra: On the existence of characters in topological groups. Amer. J. Math. 76, 375—388 (1954).

The paper characterizes an abelian topological group G having sufficiently many continuous characters. A subset $B \subset G$ is called a big set, if G can be covered by a finite number of translations of B . Then G has sufficiently many continuous characters if and only if for every $s \in G$, $s \neq e$, there exists a big neighborhood O of the identity, such that $s \notin O^2$. The proof of the „only if“ part is very easy. Conversely, the above hypothesis implies for every $s \neq e$ the existence of a uniformly continuous function $f(x)$ of the form $\int_G q(x y) k(y^{-1}) d\mu(y)$ such that $f(s) \neq f(e)$.

Here μ is a finitely additive, translation-invariant positive measure, defined on subsets of G , $q(x)$ a positive definite function, $k(x)$ is uniformly continuous and integrable with respect to μ . Denote the totality of these functions $f(x)$ by R_0 . The proof of the main theorem is then completed by an application of Theorem 2. In order to formulate that part of this Theorem, which is essential for the main theorem, the following definitions and notations are used. If A is a family of functions on G , denote by $S^u(A)$ the set of functions with the following property: if $f(x) \in S^u(A)$, then for every $\varepsilon > 0$ there exists a subfamily $A' \subset A$ of uniformly equicontinuous functions such that for any finite subset $H \subset G$, and a suitable chosen $h(x) \in A'$ we have $|f(g) - h(g)| < \varepsilon$ ($g \in H$). Let $S^u(A)$ be the set of continuous characters in $S^u(A) \cup S^u(S^u(A)) \cup S^u(S^u(S^u(A))) \dots$. Then for every $f \in R_0$ we have $f \in S^u(S^u(f))$. This relation is then extended to a more wide class of functions, such that in the special case of locally compact groups Theorem 2 provides some known approximation theorems. The proofs apply only relatively simple methods of the functional analysis. Unfortunately, the lecture of this interesting paper is made difficult by several misprints and some inexactitude in the definitions. *L. Pukánszky.*

Horie, Nobuo: On the holonomy groups of the group-spaces. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 28, 161—167 (1954).

For the group space of a continuous group G_r a n. a. s. condition is given for the holonomy group to have p ($\leq r$) essential parameters and the relations between this group and G_r are investigated. It is proved that the holonomy groups for the $+$ - and for the $-$ -connexion are both groups of affine translations. It is possible to write the transformation attached to a closed curve in the form of an ordinary integral (instead of a product integral). p is equal to the a -rank of c_{ab}^a and thus equal to the order of the derived group of G_r . Hence $p = r$ if G_r is simple and $p = 0$ if G_r is abelian. *J. A. Schouten.*

Horie, Nobuo: On some properties of trajectories of the group-spaces. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 28, 169—178 (1954).

Auf eine Kurve C_{a_0} durch den Nullpunkt des Gruppenraumes einer kontinuierlichen Transformationsgruppe kann eine Transformation der ersten und der zweiten Parametergruppe angewandt werden, und es fragt sich, wann diese Kurven $C_{a_0}^{(+)}$ und $C_{a_0}^{(-)}$ als Ganzes oder sogar punktweise zusammenfallen. Es werden für beide Fälle notwendige und hinreichende Bedingungen aufgestellt. Ferner wird bewiesen, daß, wenn C_{a_0} geschlossen ist und $C_{a_0}^{(+)}$ und $C_{a_0}^{(-)}$ zusammenfallen, sie auch punktweise zusammenfallen. Es wird eine gruppentheoretische Deutung gegeben. *J. A. Schouten.*

Verbände. Ringe. Körper:

• Rédei, László: Algebra. I. Band. Budapest: Akadémiai Kiadó 1954. 637 S. Ft. 110,— [Ungarisch].

Dieser mit großer Umsicht geschriebene erste Band des als zweibändig geplanten großen algebraischen Lehrbuches des leitenden Forschers der ungarischen algebraischen Schule ist ein schon mit seinem Umfang imponierendes Werk. Das hier bearbeitete Material dient zur Einführung in die modernen Theorien der abstrakten Algebra und richtet sich im Großen nach dem ersten Band der modernen Algebra von van der Waerden, indem auch dieser Band sich außer mit den Grundbegriffen und Grundtatsachen der abstrakten Algebra besonders mit verschiedenen Kapiteln der Körpertheorie beschäftigt. In Abweichung von van der Waerden werden aber hier die Probleme sehr viel ausführlicher untersucht, viele neue, zum Teil vom Verf. herrührende Resultate herangezogen, außerdem wird der Stoff anders angeordnet, wie die folgende kurze

Inhaltsübersicht zeigt. Im ersten, einführenden Kapitel wird der Leser mit den wesentlichen mengentheoretischen Hilfsmitteln, insbesondere mit den transfiniten Methoden bekannt gemacht. Im zweiten Kapitel werden nach Erklärung der Grundbegriffe (Operation, Operator, algebraische Struktur) die allerwichtigsten algebraischen Strukturen, wie Halbgruppen, Gruppen, Ringe, Schiefkörper, Körper, definiert und ihre Haupteigenschaften einzeln diskutiert (leider läßt Verf. die Verbände ganz außer acht). Dann kommt die Untersuchung der Generatorsysteme, Unterstrukturen, Isomorphismen, Homomorphismen, der kompatiblen Klasseneinteilungen, Faktorstrukturen usw. Der Hauptsatz der homomorphen Abbildungen wird in der allgemeinen Fassung bewiesen und dann auf die erwähnten Strukturtypen angewandt. Nach den zwei Isomorphiesätzen wird der Beweis des Jordan-Hölder-Schreierschen Satzes nach der Zassenhausschen Methode durchgeführt. Um die Bedeutung der mit Operatoren versehenen Strukturen zu betonen, widmet Verf. das ganze dritte Kapitel den Operatorstrukturen und den an diese anschließenden Fragen, obwohl hier auch solche Untersuchungen Platz bekommen haben, die auch ohne Operatoren einen Sinn haben (freie Strukturen, durch Gleichungen definierte Strukturen, direktes Produkt usw.). Als Spezialfall des im wesentlichen von Hamilton herrührenden, aber erst in den früheren Arbeiten des Verf. bedeutend gewordenen „schiefen Produktes“ von Strukturen wird die Schreiersche (bzw. Everettsche) Erweiterungstheorie von Gruppen und Ringen ausführlicher untersucht. Dann wendet sich Verf. der Besprechung von Vektorräumen und Algebren zu und, um auch Algebren über nichtkommutativen Ringen erklären zu können, werden die Doppelvektorräume und Doppelalgebren eingeführt, wo die Elemente des Operatorbereiches von beiden Seiten wirken. Das verschränkte Produkt wird für Schiefkörper und Halbgruppen mit Eins-, aber ohne Nullelement, also etwas allgemeiner als gewöhnlich erklärt und als Spezialfälle sind die monomialen Ringe und Polynomringe erwähnt. Determinanten kommen auch zu Wort (mittels alternierender Einheiten). Die Quaternionen beschließen dieses Kapitel und damit auch die allgemeinen Betrachtungen, während die folgenden Teile des Buches einzelnen konkreten Kapiteln der Algebra gewidmet sind. So z. B. werden die (i. a. nichtkommutativen) euklidischen Ringe im nächsten Kapitel IV einer Untersuchung unterzogen. Die von Hurwitz stammende Zahlentheorie der ganzen Quaternionen ist jetzt gewiß zum ersten Male in ein algebraisches Lehrbuch hineingearbeitet. Kapitel V beschäftigt sich mit den endlichen abelschen Gruppen. Neben dem Fundamentalsatz wird hier auch der Hajóssche Satz über die Faktorisierung solcher Gruppen verhältnismäßig sehr einfach bewiesen. Es folgt nun ein Kapitel über Operatormoduln, wo die Untermoduln der Vektorräume, die Determinanten- und Elementarteiler einer Matrix, lineare Abhängigkeit und lineare Gleichungssysteme über Schiefkörpern usw. betrachtet werden. Kapitel VII befaßt sich mit verschiedenen Fragen in bezug auf Polynomringe. Verf. reproduziert nach Kronecker-Hensel die Theorie der eindeutigen kanonischen Darstellungen von den Idealen eines Polynomringes einer Veränderlichen über einem kommutativen euklidischen Ring, untersucht die durch ein Element erzeugten Ringe mit Einselement und zeigt, wie man mit Hilfe der verallgemeinerten Tschirnhausschen Transformation unter den letzterwähnten Ringen die nichtisomorphen aufsuchen kann. Im folgenden Kapitel beschäftigt sich Verf. mit der Steinitzchen Theorie der Körper und beweist u. a. die Möglichkeit der algebraischen Abschließung, deren Eindeutigkeit, der Zerlegbarkeit der transzendenten Erweiterungen in eine rein transzendente und eine darauffolgende algebraische usw. Hierbei werden auch endliche Körper, insbesondere Erweiterungen, unvollkommene Körper betrachtet. Im neunten Kapitel werden angeordnete Strukturen behandelt, insbesondere notwendige und hinreichende Bedingungen für die Möglichkeit einer Anordnung in Moduln (Torsionsfreiheit), in Körpern, Schiefkörpern und Ringen (formale Realität im Sinne von Artin-Schreier, Szele bzw. Johnson) aufgestellt. Das vorletzte Kapitel beschäftigt sich mit der Bewertungstheorie der Körper. Nach Einführung des Limesbegriffes wird gezeigt, wie sich ein gegebener bewerteter Körper mittels Fundamentalfolgen zu einem perfekten erweitern läßt, worauf als Anwendung die reellen und danach die komplexen Zahlen folgen. Die Krullschen Exponentenbewertungen werden nur für den Fall von archimedischer Wertgruppe (d. h. die speziellen) eingehend untersucht. Die Sätze von Ostrowski über die nicht-äquivalenten Bewertungen des rationalen Zahlkörpers bzw. die in bezug auf eine archimedische Bewertung perfekten Körper, das Henselsche Lemma usw. bilden die wichtigsten Themen dieses Kapitels. Das abschließende Kapitel XI behandelt die Galoissche Theorie und deren Anwendungen auf klassische Probleme. Die Ergebnisse werden sehr allgemein gefaßt, auch für den Fall von Primzahlcharakteristik. Zum Schluß wird die Existenz der Normalbasis in Galoiskörpern bestätigt. Das Literaturverzeichnis führt hauptsächlich Lehrbücher, Monographien, sowie in Lehrbüchern bisher weniger zitierte Aufsätze an. — Das ganze Buch hindurch strebt Verf. nach möglichster Allgemeinheit und legt besonderes Gewicht auf das Feststellen der natürlichen Schranken der erzielten Resultate. Dazu dienen die zahlreichen Gegenbeispiele im Text. Um das Lesen des Buches für Anfänger zu erleichtern und sie vor eventuellen Mißverständnissen zu bewahren, sind den Betrachtungen viele erklärende Bemerkungen beigelegt, die in Kleindruck gesetzt sind. Eine Spezialität des Werkes ist die Berücksichtigung von vielen Anwendungen der rein algebraischen Resultate in der Zahlentheorie. Die Ausführungen sind knapp gehalten, aber immer gut verständlich; vom Leser wird bloß eine gewisse Vertrautheit mit mathematischer Begriffsbildung nebst gewisser mathematischer Routine erwartet. Hoffentlich

wird dieses gut durchdachte, wertvolle Lehrbuch in naher Zukunft auch in deutscher Sprache erscheinen und so weiteren Kreisen der Studierenden der Algebra zugänglich gemacht werden.

L. Fuchs.

Frink, Orrin: Ideals in partially ordered sets. Amer. math. Monthly **61**, 223–234 (1954).

In this expository article the author considers the suitability of an extension of the definition of ideal from lattices to partially ordered sets. The proposed definition is: a subset A of the partially ordered set P is an ideal if A contains F^{**} with every finite subset F , where F^* is the set of upper bounds in P of F , and F^{**} is the set of lower bounds in P of F^* . The use of this notion in a ring with unit partially ordered by left divisibility, in the family of subsets of a space partially ordered by strict inclusion (the closure of A is contained in the interior of B), and the topologisation of a lattice or ordered set by taking the completely irreducible ideals and dual ideals for a subbase of open sets, are among the topics considered. Two slips to be corrected are: on page 226, last line the \dots should be replaced by \leq , and in page 232, line 13 the two \dots should be replaced by \leq . The implications of the new definition of ideal are not fully worked out in this article yet. *V. S. Krishnan.*

Sasaki, Usa: Orthocomplemented lattices satisfying the exchange axiom. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **17**, 293–302 (1954).

L'A. remarque d'abord que le treillis T des variétés linéaires fermées d'un espace de Hilbert est complet, relativement atomique ($a < b$ entraîne $a < a \cup p \leq b$ pour un certain point p), orthocomplémenté (il existe une application biunivoque $a \rightarrow a'$ de T sur T telle que $a \leq b$ entraîne $a' \geq b'$, $a' = a$ et $a \cap a' = 0$) et qu'il satisfait à l'axiome d'échange ($p \leq q$ et $a \cap p = 0$ entraîne $q \leq p \cup a$) ainsi qu'à la condition suivante: $a \leq b'$ entraîne, quel que soit $c \leq b$, $(c \cup a) \cap b = c \cup (a \cap b)$. Il étudie ensuite les treillis T vérifiant ces conditions et démontre les propriétés suivantes: (1) Tout élément a de T possède une base orthogonale, c'est-à-dire un ensemble de points orthogonaux deux à deux ($p \leq q'$) dont l'union est égale à a ; (2) Deux bases orthogonales d'un même élément ont même puissance si T vérifie la condition supplémentaire: tout point contenu dans une union infinie de points est contenu dans l'union d'une partie dénombrable de ces points; (3) Tout treillis quotient de T a les mêmes propriétés que T ; (4) T est somme directe de sous-treillis irréductibles. Finalement, il caractérise les éléments permutable par des propriétés de projection.

R. Croisot.

Szász, G.: Generalized complemented and quasicomplemented lattices. Publ. math., Debrecen **3**, 9–16 (1954).

Bekanntlich braucht ein relativ-komplementärer Verband nicht komplementär zu sein, weil er 0, 1 nicht zu enthalten braucht. Gleichwohl ist die Relativ-Komplementarität eine stärkere Aussage über die Struktur des Verbandes als die Komplementarität. Verf. beseitigt diesen Schönheitsfehler durch folgende Definition: Ein Verband heiße komplementär im weiteren (generalized) Sinne (ich sage kurz: g-komplementär), wenn er zu beliebigen Elementen u, v, a stets mindestens ein Element x mit $a \leq x \leq u$, $a \cap x = v$ enthält. x heißt (u, v) -Komplement von a . Dann gilt: Jeder komplementäre Verband ist g-komplementär. Jeder g-komplementäre Verband mit 0, 1 ist komplementär. Jeder relativ-komplementäre Verband ist g-komplementär. Es folgen Beispiele, sodann Sätze über g-Komplementarität in modularen und distributiven Verbänden. — Pseudokomplementär heißt ein Verband, wenn jedes $a \neq 0, 1$ für alle $u \neq 0, v \neq 1$ (u, v) -Komplemente hat.

H. Gericke.

Los, J. and C. Ryll-Nardzewski: Effectiveness of the representation theory of Boolean algebras. Fundamenta Math. **41**, 49–56 (1954).

The main result of this paper is the effective equivalence of the following propositions: (I) In every Boolean algebra there is a prime ideal. (II) If J is an s -ideal (d -ideal) of a field of sets \mathbf{A} , there is a prime s -ideal (d -ideal) J_p of \mathbf{A} , which includes J . (III) The product space P of non-empty compact spaces M_t , $t \in T$, is non-empty and compact. (IV) The authors' principle of consistent choice (this Zbl. **44**, 274). (V) An extension theorem for (finitely additive) measures (see A. Horn-

A. Tarski, this Zbl. **35**, 30 and J. Łos-C. Ryll-Nardzewski, this Zbl. **39**, 52). An idea of the paper is conveyed by the following sketch of the proof of the implication (II) \rightarrow (III). There is only to prove the existential assertion of the non-emptiness of P . \mathfrak{X} : family of partial choice-sets from the sets M_t . For $p \in M_t$, $\mathfrak{D}(p)$: E ($p \in X$), \mathfrak{C}_t : $\bigcup_{p \in M_t} \mathfrak{D}(p)$. (II) applied to $A = \mathfrak{X}$ secures the existence of a $\{0, 1\}$ -valued measure μ , such that $\mu(\mathfrak{C}_t) = 1$ for every $t \in T$. μ induces into each M_t the measure $m_t(E) = \mu\left(\bigcup_{p \in E} \mathfrak{D}(p)\right)$. According to a remark by

N. Bourbaki (this Zbl. **26**, 431, p. 59–63 of this book) m_t distinguishes in M_t one and only one point whose every neighbourhood has the measure 1. The set of all those points yields (or is) an element of P . Chr. Pauc.

Choudhury, A. C.: On Boolean narings. Bull. Calcutta math. Soc. **46**, 41–45 (1954).

Par une démonstration compliquée et obscure, l'A. veut démontrer ceci: si dans un anneau non nécessairement associatif A , on a $x^2 = x$ et la loi „alternative“ $x(xy) = x^2y$, alors A est associatif (et par suite booléen). Il est immédiat que A est commutatif et $2x = 0$; en outre, remplaçant x par $x + z$ dans la loi alternative, il vient $z(xy) + x(z y) = 0$, ce qui, vu le fait que A est commutatif et de caractéristique 2, est l'associativité. J. Dieudonné.

Schuff, Hans Konrad: Über die Summation neutraler Zerschlagungen in beliebigen algebraischen Bereichen. Math. Nachr. **11**, 295–301 (1954).

Die Arbeit ergänzt eine gemeinsame Veröffentlichung von K. Dörge und dem Verf. [Math. Nachr. **10**, 315–330 (1953); zitiert mit D.-Sch.]. Die Definition des Bereiches B und seiner Operationen ist die gleiche wie in D. Sch. Entsprechend wird wie in D.-Sch. eine Zerlegung von B in paarweise elementfremde Untermengen als Zerschlagung bezeichnet, und es wird die Zerschlagung Z neutral genannt, wenn die Zuordnung jedes Elementes zu seiner Klasse eine hinsichtlich aller Operationen homomorphe Abbildung von B definiert. Verstehen wir die Worte „Vergrößerung“ und „Verfeinerung“ in dem bei Klasseneinteilungen natürlichen Sinne, so gibt es zu jeder Menge $\{Z_\alpha\}$ von Zerschlagungen trivialerweise eine grösste gemeinsame Verfeinerung Z_γ und eine feinste gemeinsame Vergrößerung Z_β , und es kann Z_γ bzw. Z_β als der Durchschnitt bzw. die Summe aller Z_α bezeichnet werden. Sind alle Z_α neutral, so ist es stets auch Z_γ ; dagegen braucht Z_β dann nicht immer neutral zu sein, wenn sich unter den für B charakteristischen Operationen solche mit unendlich vielen Argumenten befinden. Verf. bemerkt zunächst, daß bei einer wohlgeordneten, monoton zunehmenden $(Z_{\alpha_1}$ gröber als Z_{α_2} für $\alpha_1 < \alpha_2$) Folge $\{Z_{\alpha_i}\}$ von neutralen Zerschlagungen die Summe Z_β sicher dann neutral wird, wenn die Folge $\{Z_{\alpha_i}\}$ „hinreichend lang“ ist. Anschließend betrachtet er Bedingungen für wohlgeordnete, monoton zu- oder abnehmende Folgen $\{Z_{\alpha_i}\}$, die die bekannten Kettenätze bzw. Maximal- und Minimalbedingungen der Idealtheorie verallgemeinern. Sein Hauptinteresse gilt dabei offenbar Folgen mit einer Ordnungszahl $> \omega$. Für abgezählte Folgen sind die gewonnenen Ergebnisse recht naheliegend. Nicht glücklich gewählt scheint dem Ref. die Bezeichnung „prime“ neutrale Zerschlagung. (Def. 4, S. 298.) Denn im Fall der Idealtheorie entsprechen die primen Zerschlagungen den Hauptidealen, und Satz 7 liefert dementsprechend dort einfach die Ableitbarkeit des Basissatzes aus dem Teilerkettenatz, nicht aber ein arithmetisches Zerlegungstheorem, wie man wegen des Auftretens des Wortes „prim“ auf den ersten Blick annehmen könnte. Man würde also statt von primen Zerschlagungen besser von Hauptzerschlagungen reden. W. Krull.

Herstein, I. N.: A note on rings with central nilpotent elements. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 620 (1954).

Tominaga, Hisao: On primary ideal decompositions in non-commutative rings. Math. J. Okayama Univ. **3**, 39–46 (1953).

Betrachtet werden beliebige nichtkommutative Ringe. Die Primidealdefinition ist die übliche. Unter dem Radikal \tilde{a} von a versteht Verf. den Durchschnitt aller minimalen Primoberideale von a . Das Ideal q wird primär genannt, wenn aus $c \in \tilde{q}$, $c \cdot a \in q$ oder $c \notin \tilde{q}$, $a \cdot c \in q$ in beiden Fällen $a \in q$ folgt. Ist $\tilde{q}^n \subset q$ für hinreichend großes n , so nennt Verf. das Primärideal q ein s-Primärideal. Bei einem s-Primärideal q ist $\tilde{q} = p$ stets ein Primideal, „das zu q gehörige Primideal“. — Den Inhalt der Arbeit bildet die Ableitung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß im Ringe R jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen s-Primärideal dargestellt werden kann. Um diese Bedingungen zu formulieren, braucht Verf. noch die folgende Definitionen: Sind a und c gegebene Ideale und gibt es einen Exponenten n ,

derart daß $c^{-n} \cdot a = c^{-(n+1)} \cdot a = a \cdot c^{-n} = a \cdot c^{-(n+1)} = r$, so heißt r das Grenzideal von a hinsichtlich c . Das Primideal p heißt zu a assoziiert, wenn es ein zu p gehöriges s -Primärideal q gibt, derart, daß $q = a \cdot r^{-1}$, $r \notin a$. Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit und eines späteren Supplements (vgl. folgend. Referat) läßt sich dann so aussprechen: In R kann dann und nur dann jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen s -Primäridealen dargestellt werden, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: 1a) Für jedes Idealpaar a, c existiert das Grenzideal von a hinsichtlich c . — 1b) Läßt man bei festem a das Ideal c alle Ideale von R durchlaufen, so erhält man nur endlich viele verschiedene Grenzideale von a . — 2. Für jedes minimale Primoberideal p von a ist $p^{-1} \cdot a = a$ und $a \cdot p^{-1} = a$. — 3. Ist p zu a assoziiertes Primideal, so gibt es ein s -Primärideal $q \supseteq a$ mit dem zugehörigen Primideal p , derart, daß für jedes in q , aber nicht in a enthaltene c der Quotient $a \cdot c^{-1}$ kein zu p gehöriges Primärideal ist. *W. Krull.*

Tominaga, Hisao: Supplement to my previous paper „On primary ideal decompositions in non-commutative rings“. Math. J. Okayama Univ. 3, 135—138 (1954).

In der Arbeit, die hier ergänzt wird, hatte Verf. notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß in einem beliebigen nichtkommutativen Ring R jedes Ideal als Durchschnitt endlich vieler s -Primärideale darstellbar ist (vgl. vorhergehend. Referat). Im Supplement wird gezeigt, daß diese Bedingungen auf die Gestalt gebracht werden können, die im Referat der ursprünglichen Arbeit bereits besprochen wurde. Auch wird bewiesen, daß sich die im Referat mit 1a und 1b bezeichneten Bedingungen durch einen „Kettensatz für Rechtsquotienten“ ersetzen lassen. Schließlich wird auf die Möglichkeit hingewiesen, unter Benützung gewisser Überlegungen von M. Rabin (dies. Zbl. 51, 264) die Bedingung 3. des Referats durch eine formell einfachere Bedingung zu ersetzen. *W. Krull.*

Tominaga, Hisao: Some remarks on radical ideals. Math. J. Okayama Univ. 3, 139—142 (1954).

Unter dem Radikal r des Ideals a in einem i. a. nichtkommutativen Ringe R versteht Verf. den Durchschnitt aller minimalen Primoberideale von a . Er bespricht zunächst einige äquivalente Radikaldefinitionen und beweist dann die folgenden Sätze 1. Die Menge aller Radikale (d. h. aller mit ihrem Radikal zusammenfallenden Ideale) bildet einen distributiven Verband, wenn man den Durchschnitt zweier Radikale r_1, r_2 wie üblich definiert und als Vereinigung von r_1 und r_2 das Radikal der Idealsumme $r_1 + r_2$ einführt. 2. In R gilt die Maximalbedingung für Radikale dann und nur dann, wenn gleichzeitig die folgenden Bedingungen erfüllt sind: a) Es gilt in R die Maximalbedingung für Primideale. b) Jedes Radikal ist in R der Durchschnitt von endlich vielen Primidealen. *W. Krull.*

Johnson, R. E.: Semi-prime rings. Trans. Amer. math. Soc. 76, 375—388 (1954).

Ein Semi-Primring ist ein Ring, dessen Nullideal semi-prim, d. h. Durchschnitt von Primidealen ist. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Struktur dieser Ringe und ihrer Idealtheorie im Anschluß an ähnliche Untersuchungen des Verf. über Primringe (dies. Zbl. 43, 267; 51, 24; 51, 265). Wesentliches Hilfsmittel dieser Strukturuntersuchungen ist eine Zuordnung, die jedem Rechtsideal I eines Semi-Primringes R eine Komponente I^e zuordnet, die als der Linksannullator des Rechtsannullators von I definiert ist. I^e ist stets ein Semi-Primideal und ist das eindeutig bestimmte, I umfassende Ideal von R , das hinsichtlich folgender Eigenschaft maximal ist: Für jedes Ideal T von R folgt aus $T \cdot I^e = 0$ auch $T \cdot I = 0$. Weitere Eigenschaften dieser Komponentenbildung werden im ersten Abschnitt behandelt. Der zweite Abschnitt bezieht sich auf die Prim-Rechtsideale eines Semi-Primringes R . Dabei heißt ein Rechtsideal I von R ein Prim-Rechtsideal, wenn für zwei Rechtsideale a, b von R aus $a \cdot b \subseteq I$, $b^e = R$ stets $a \subseteq I$ folgt. Für jedes Prim-Rechtsideal I ist das größte in ihm enthaltene Ideal von R gleichzeitig annullierendes Rechts- und Linksideal; d. h. es ist Rechts- und Linksannullator von geeigneten Teilmengen von R . Jedem Rechtsideal I von R wird als Primhülle $p(I)$ das kleinste, I enthaltende Prim-Rechtsideal zugeordnet. Dann gilt: $p(I_1 \cap I_2) = p(I_1) \cap p(I_2)$ und $p(I : a) = (p(I) : a)$ ($a \subseteq R$). Im dritten Abschnitt wird in Analogie zu den Primringen der Begriff der Struktur für Semi-Primringe definiert: Eine gegenüber beliebiger Durchschnittsbildung abgeschlossene Teilmenge \mathfrak{R} der Menge aller Prim-Rechtsideale des Semi-Primringes R heißt eine Rechtsstruktur, wenn (1) $0, R \in \mathfrak{R}$, (2) $(I \cap I')^* = I^* \cap I'^*$ und (3) $(I : a)^* = (I^* : a)$ ($a \subseteq R$). Dabei sind I, I' Rechtsideale, und I^* bedeutet das kleinste Element von \mathfrak{R} , das I umfaßt. Jeder Semi-Primring besitzt mindestens eine Rechtsstruktur, nämlich die Menge

aller Prim-Rechtsideale selbst. Weiter heißt eine Rechtsstruktur \mathfrak{R} eine a -Struktur, wenn \mathfrak{R} hinsichtlich der mengentheoretischen Inklusion atomar ist. Es werden die Zusammenhänge zwischen den a -Strukturen des Ringes R und denen seiner Ideale eingehender untersucht. Der letzte Abschnitt schließlich ist der Bestimmung aller Semi-Primringe, die eine a -Struktur besitzen, gewidmet.

H.-J. Kowalsky.

Duparc, H. J. A.: Periodicity properties of recurring sequences. I. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 331—342 (1954).

In this paper the author deals with the algebraic preliminaries he needs for his treatment of recurring sequences, to be published in the second part of his paper. He considers polynomial rings over f -sets, the latter being integral domains with unit element, in which the unique factorization theorem for elements holds and which have the property that all residue rings modulo a principal ideal $\neq (0)$ have finite order. In particular he studies residue class rings modulo ideals generated by two elements, one of which is a monic polynomial $f(x)$ (i. e. a polynomial with highest power coefficient 1) of degree ≥ 1 and the other a constant m . The decomposition of those ideals in terms of the decomposition of $f(x)$ and m into prime factors is studied. In order to get reduced residue sets, the author uses a definition, which amounts to the following: We call the polynomials $f(x)$ and $g(x)$ with coefficients in a commutative ring R with unit element relatively prime, if the resultant of $f(x)$ and $g(x)$ has an inverse in R . [Reviewer's remark. If $f(x)$ is monic of degree ≥ 1 one can show, that this definition is equivalent to the more obvious definition: $f(x)$ and $g(x)$ are relatively prime if $(f(x), g(x)) = (1)$.] The reduced residue set $\text{mod } (f(x), m)$ consists of those residue classes which contain polynomials relatively prime $(\text{mod } m)$ with $f(x)$. A subgroup of the multiplicative group of a reduced residue set is called a U -set. A positive integer d is called a period $\text{mod } (f(x), m)$ of $g(x)$ with respect to a U -set, if the residue class $\text{mod } (f(x), m)$ containing $(g(x))^d$ is an element of U . Given $f(x)$, $g(x)$, m and U , these periods are multiples of a primitive period denoted by $c_g(f, m; U)$. Divisibility properties of the primitive periods in terms of the decomposition of $f(x)$ and m into prime elements are studied. Attention is paid to the particular cases: $g(x) = x$, U is the group E consisting of the unit element and U is the group V of the residue classes of the reduced residue set containing a constant. Some results on the quotient of $c_g(f, m; E)$ and $c_g(f, m; V)$ are obtained.

W. Peremans.

Guérindon, Jean: Sur les idéaux minimaux dans les anneaux commutatifs. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 145—147 (1954).

Folgendes Problem wird untersucht: A sei ein kommutativer Ring mit Einselement, $M \supset J \supset I$ seien A -Moduln. Existiert kein Untermodul J' von M , der zwischen J und I liegt, so „deckt (couvre)“ J den Modul I , in Zeichen $J \succ I$. Dann muß aber $J = I + A$ mit einem $x \in M$ und $I : x$ ein maximales Ideal von A sein und umgekehrt. Dieses Ergebnis wird besonders auf die minimalen Ideale eines Ringes (mit und ohne Einselement) angewendet und es werden weitere Sätze darüber abgeleitet.

W. Gröbner.

Szele, T.: Simple proof of the Wedderburn-Artin structure theorem. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 5, 101—107 und russ. Zusammenfassg. 107 (1954).

Nach einem kurzen Überblick über die historische Entwicklung und Vervollkommnung des Wedderburn-Artinschen Struktursatzes für einfache und halbeinfache Ringe, wird zunächst ein kurzer Induktionsbeweis für den allgemeinen Dichtesatz von Chevalley und Jacobson über irreduzible Moduln gegeben. Daraus leitet Verf. dann in methodisch sehr einfacher und eleganter Weise den Wedderburn-Artinschen Struktursatz für halbeinfache Ringe mit Minimalbedingung her. Sei R ein Ring mit Minimalbedingung, der kein nilpotentes Rechtsideal ($\neq 0$) enthält. Ist V ein minimales Rechtsideal aus R , dann ist V als R -Rechtsmodul irreduzibel. Ist K der Rechtsannullator von V , so gilt nach dem Dichtesatz $R/K \cong A_n$, wobei A_n der Ring aller linearen Abbildungen eines endlichdimensionalen Vektorraums ist. Mit $RV = R_1$ besitzt R die direkte Zerlegung $R = R_1 + K$, $R_1 \cong A_n$ und auf K kann der gleiche Schluß erneut angewendet werden. Wegen der Minimalbedingung bricht dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten ab und ergibt so die im Wedderburn-Artinschen Struktursatz behauptete Zerlegung von R . F. Kasch.

Zelinsky, Daniel: Raising idempotents. Duke math. J. 21, 315—322 (1954).

Sei R ein Ring, N ein zweiseitiges Ideal aus R und $\{u_i\}_{i \in I}$ eine Menge von orthogonalen Idempotenten ($u_i^2 = u_i$, $u_i u_j = 0$ für $i \neq j$) aus dem Restklassenring $R - N$. Das System $\{u_i\}$ heiße „fortsetzbar“ (raising) in R , wenn es eine Menge $\{e_i\}$ von orthogonalen Idempotenten in R mit $e_i + N = u_i$ gibt. Es wird die Frage untersucht, unter welchen Voraussetzungen die

klassische Schlußweise von der „Fortsetzung“ eines Systems von orthogonalen Idempotenten aus dem Restklassenring eines Ringes nach dem Radikal in den Ring selbst möglich ist. Ist I eine überabzählbare Indexmenge und K ein Körper, dann wird eine Algebra R über K mit dem Radikal N angegeben, derart daß in R/N ein System $\{u_i\}_{i \in I}$ von orthogonalen Idempotenten existiert, das sich nicht in R „fortsetzen“ läßt. Diese Algebra bildet zugleich ein Beispiel dafür, daß der Wedderburnsche Hauptsatz nicht bei unendlichem Rang gilt (siehe dazu auch C. Feldmann, dies. Zbl. 43, 268; V. M. Kuroškin, Mat. v Škole 4, 192 (1951); J. E. MacLaughlin und A. Rosenberg, dies. Zbl. 51, 24, Fußnote 5). Sodann werden hinreichende Bedingungen für die „Fortsetzbarkeit“ eines Systems $\{u_i\}$ gegeben, bei denen R als topologischer Ring angenommen wird und gewisse Vollständigkeits- oder Kompaktheitsvoraussetzungen gemacht werden. U. a. ergibt sich, daß bei einer Algebra R über einem Körper K mit dem Radikal N jedes System $\{u_i\}$ aus R/N in R „fortgesetzt“ werden kann, wenn nur N über K eine endliche Dimension besitzt. Die hinreichenden Bedingungen werden benutzt, um den Wedderburnschen Hauptsatz auf unendlichdimensionale Algebren auszudehnen.

F. Kasch.

Kasch, Friedrich: Grundlagen einer Theorie der Frobeniuserweiterungen. Math. Ann. 127, 453–474 (1954).

Theory of Frobenius algebras over a field [Brauer-Nesbitt, this Zbl. 16, 341; Reviewer, this Zbl. 21, 294; 26, 58; Japanese J. Math. 18, 49–65 (1942)] is extended to a theory of Frobenius extensions of an S -ring. Thus, call a ring A having unit element and satisfying minimum condition an S -ring, when for each left (right) ideal \mathfrak{J} , $(\mathfrak{J})_r = A$ its right (left) annihilator A_l , $(\mathfrak{J})_l$, $(\mathfrak{J})_r$ is different from 0. It is proved first that if $\langle 1, r \rangle$ is a left-regular (i. e. $\langle 1, r \rangle = 0 \Rightarrow 1 = 0$) scalar product, in A , of left and right vector spaces \mathfrak{L} and \mathfrak{R} over an S -ring A , then for every subspace \mathfrak{L}' of \mathfrak{L} there is a subspace \mathfrak{R}' of \mathfrak{R} so that \mathfrak{L}' and \mathfrak{R}' have mutually orthogonal bases, and \mathfrak{L} and \mathfrak{R} themselves have orthogonal bases. If a ring Ω operates on \mathfrak{L} from the right and on \mathfrak{R} from the left so as \mathfrak{L} and \mathfrak{R} are respectively an A - Ω - and an Ω - A -double-module, and if $1 \cdot \omega \cdot r = 1 \cdot \omega \cdot r$ for any $l \in \mathfrak{L}$, $r \in \mathfrak{R}$, $\omega \in \Omega$, then Ω is called an allowable operator ring of the pair $\mathfrak{L}, \mathfrak{R}$. Let now a ring S , with unit element, be simultaneously a left and a right vector space over A and $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ be a regular scalar product of \mathfrak{L}_1 into A with \mathfrak{L}_2 itself as an allowable operator ring. This is equivalent to the existence of a Frobenius homomorphism of \mathfrak{L}_1 into A , i. e. an A -two-sided homomorphism of \mathfrak{L}_1 into A such that no non-zero left or right ideal is mapped to 0. If here again A is an S -ring, then the \mathfrak{L}_1 is called a Frobenius extension. As a result of the above preliminary consideration, the Brauer-Nesbitt [l. c.] characterization of Frobenius algebras is generalized to Frobenius extensions and it is seen that a Frobenius extension \mathfrak{L} has equal left and right regular representations over A . Let an S -ring \mathfrak{L} be a left and a right vector space of same finite dimension over an S -ring A . Then \mathfrak{L}/A is a Frobenius extension, if and only if the A -left endomorphism ring \mathfrak{L} of \mathfrak{L} is a Frobenius extension of the right multiplication ring \mathfrak{L}_r of \mathfrak{L} . It follows from this and a previous result of the author (this Zbl. 51, 28) that if \mathfrak{L} is a simple ring with minimum condition and A is a fixed subring of a semi-regular automorphism group of \mathfrak{L} in the sense of the reviewer (this Zbl. 49, 28) then \mathfrak{L}/A is a Frobenius extension. Assume in the followings that \mathfrak{L}/A is a Frobenius extension with $(\mathfrak{L}/A) < \infty$. A left (right) ideal of \mathfrak{L} is called a v -ideal, when it is a left (right) subspace of the left (right) vector space \mathfrak{L}/A . On extending the reviewer's [l. c.] results, the following results are proved: if I_l is a left v -ideal of \mathfrak{L}/A , then $A_l(A_r(\mathfrak{L}_l)) = \mathfrak{L}_l$, $(\mathfrak{L}_l/A)_l + (A_r(\mathfrak{L}_l)/A)_r = (\mathfrak{L}/A)$; if for an element \mathfrak{s} of \mathfrak{L} the left ideal $\mathfrak{L}\mathfrak{s}$ is a v -ideal, then the right-ideal $\mathfrak{s}\mathfrak{L}$ is a v -ideal and $(\mathfrak{L}\mathfrak{s}/A)_l = (\mathfrak{s}\mathfrak{L}/A)_r$; the residue-ring of \mathfrak{L} modulo an ideal \mathfrak{I} is a Frobenius extension over A , if and only if we have $A_l(\mathfrak{I}) = \mathfrak{I} \cap A$ with an element r of \mathfrak{L} linearly independent over A and satisfying $S_r(r) = S_r(rA)$, where $S_r(X) = \{\mathfrak{s} \in \mathfrak{L} \mid \mathfrak{s} \cdot X = 0\}$. By a theorem of Hall (this Zbl. 21, 102) and the reviewer's [l. c.] characterization of (quasi-) Frobenius rings, it is proved that a Frobenius extension of finite dimension of a (quasi-) Frobenius ring is a (quasi-) Frobenius ring. Finally a theorem of Gaschütz (this Zbl. 47, 26) and Ikeda [Osaka math. J. 5, 53–58 (1953)] characterizing M_n - and M_n -modules of a Frobenius algebra is generalized to the case of a Frobenius extension. T. Nakayama.

Osima, Masaru: Notes on basic rings. II. Math. J. Okayama Univ. 3, 121–133 (1954).

Verf. setzt seine Untersuchungen über b -Ringe (= basic rings) fort (dies. Zbl. 50, 260). Im ersten Teil wird der Endomorphismenring $E_r(R)$ eines R -Linksmoduls V betrachtet, wobei R ein Ring mit 1-Element sei. Es werden Beziehungen zwischen $E_r(R)$ und $E_{r_0}(R^0)$ hergeleitet, wobei $R^0 = e R e$ der b -Ring von R und $V_0 = e V e'$ seien. Im zweiten Teil wird eine Klasseneinteilung der Algebren endlichen Ranges über einem festen Körper K eingeführt. Zwei Algebren A und B werden ähnlich genannt, $A \sim B$, wenn ihre b -Algebren A^0 und B^0 isomorph sind. Dann gilt: (1) Aus $A \sim B$, $C \sim D$ folgt $A \times C \sim B \times D$; (2) aus $A \sim B$ folgt $A_L \sim B_L$ für jeden Oberkörper L von K .

F. Kasch.

Osima, Masaru: Some studies on Frobenius algebras. II. Math. J. Okayama Univ. 3, 109—119 (1954).

Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 45, 161). Zunächst werden einige vereinfachte Beweise für Ergebnisse aus drei früheren Arbeiten (Nakayama und Ikeda, dies. Zbl. 45, 320) gegeben. Dann untersucht Verf. den Zusammenhang zwischen einer Frobeniusalgebra und ihrer b -Algebra (= basic algebra; zur Def. siehe Verf., dies. Zbl. 50, 260) und zeigt u. a.: (1) Eine Algebra ist dann und nur dann symmetrisch, wenn ihre b -Algebra symmetrisch ist; (2) ein Nakayama-Automorphismus φ einer Frobeniusalgebra A induziert einen Nakayama-Automorphismus φ_0 ihrer b -Algebra A_0 , und umgekehrt läßt sich jeder Nakayama-Automorphismus φ_0 von A_0 zu einem solchen von A fortsetzen. Schließlich wird mit Hilfe von dualen Basen und einem Ergebnis von G. Shimura (dies. Zbl. 49, 25) ein neuer Beweis für die Tatsache gegeben, daß die erste Kohomologiegruppe einer Algebra dann und nur dann verschwindet, wenn die Algebra separabel ist.

F. Kasch.

Curtis, Charles W.: The structure of non-semisimple algebras. Duke math. J. 21, 79—85 (1954).

Verf. befreit zunächst das Wedderburn-Malcev'sche Theorem unter gewissen Zusatzannahmen von der Voraussetzung, daß die betrachtete assoziative Algebra \mathfrak{A} endlichdimensional ist. Ist \mathfrak{N} das (Jacobson'sche) Radikal von \mathfrak{A} , so fordert er, daß $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ über dem Grundkörper K endlichdimensional sein soll, daß $\bigcap_i \mathfrak{N}^i = (0)$ gilt und daß \mathfrak{A} hinsichtlich der durch die Potenzen von \mathfrak{N}

definierten „ \mathfrak{N} -adischen“ Topologie vollständig ist. Er beweist dann das Wedderburn-Malcev'sche Theorem in der folgenden Fassung: 1. \mathfrak{A} enthält mindestens eine Unteralgebra \mathfrak{B} , derart daß $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{N}$, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N} = (0)$. 2. Sind \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' zwei solche Unteralgebren, dann gibt es in \mathfrak{A} ein Element z , derart daß die Abbildung $b' \rightarrow b' - z b' - b' z' + z b' z'$ einen Isomorphismus von \mathfrak{B}' auf \mathfrak{B} definiert, falls z' das Quasinverse von z bedeutet und b' die Algebra \mathfrak{B}' durchläuft. Beim Beweis von 2. werden Überlegungen aus der von Hochschild [Annals of Math., II. Ser. 46, 58—67 (1945)] entwickelten Kohomologietheorie assoziativer Algebren benutzt. — In einem zweiten Abschnitt beweist Verf. den Satz: Es sei \mathfrak{E} eine endliche Erweiterung des kommutativen (Noetherschen!) Halbstellenringes \mathfrak{R} , d. h. es sei \mathfrak{R} ein das Einheitselement von \mathfrak{E} enthaltender Unterring des Zentrums von \mathfrak{E} und es stelle \mathfrak{E} einen \mathfrak{R} -Modul mit endlich vielen Erzeugenden dar; unter m bzw. \mathfrak{N} möge das Radikal von \mathfrak{R} bzw. \mathfrak{E} verstanden werden. Dann genügt \mathfrak{E} der Maximalbedingung, $\mathfrak{E}/\mathfrak{N}$ der Minimalbedingung für Rechtsideale, und es ist nicht nur (wie wohlbekannt), $\bigcap_i m^i = (0)$, sondern auch $\bigcap_i \mathfrak{N}^i = (0)$. Ist \mathfrak{R} vollständig hinsichtlich

der m -adischen Topologie, so ist es \mathfrak{E} hinsichtlich der \mathfrak{N} -adischen. — Im letzten Abschnitt werden die Ergebnisse der beiden ersten benutzt, um die von Azumaya über Trägheitsringe bei endlichen (i. a. nicht kommutativen) Erweiterungen von kommutativen Stellenringen bewiesenen Sätze zu ergänzen. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Ausgangsstellenring \mathfrak{R} einen Körper enthält, dessen Elemente ein volles Repräsentantensystem des Restklassenkörpers \mathfrak{R}/m bilden.

W. Krull.

Postnikov, M. M.: Definite Funktionenfamilien und Algebren ohne Nullteiler über dem Körper der reellen Zahlen. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 2 (60), 67—104 (1954) [Russisch].

Die vorliegende Arbeit gibt eine Übersicht der gegenwärtigen Lage des Problems der Existenz endlichdimensionaler Algebren A über den reellen Zahlen, die Integritätsbereiche sind, ohne Voraussetzung der Kommutativität oder Assoziativität. Nur das Distributivgesetz wird vorausgesetzt. Der bekannte Satz von H. Hopf, daß der Grad von A eine Potenz 2 sein muß, wird mit allen Einzelheiten bewiesen, und ein zweiter, algebraischer, Beweis wird gegeben, der kein topologisches Hilfsmittel anwendet. (Siehe H. Hopf, dies. Zbl. 24, 360.) Zu diesem Problem vgl. auch Borel und Serre, dies. Zbl. 50, 396.

E. Hewitt.

Steinfeld, O.: Remark on a paper of N. H. McCoy. Publ. math., Debrecen 3, 171—173 (1954).

Verf. ergänzt (für i. a. nichtkommutative, aber assoziative Ringe R) die von McCoy aufgestellte Liste äquivalenter Primidealdefinitionen. Dabei betrachtet er neben gewöhnlichen Primidealen, bei denen aus $a \notin p$, $b \notin p$ stets $a \cdot R \cdot b \not\subseteq p$ folgt, auch Vollprimideale, bei denen $a \notin p$, $b \notin p$ sogar stets $a \cdot b \notin p$ nach sich zieht. (Im Kommutativen fallen die Begriffe „prim“ und „vollprim“ natürlich zusammen.) Das wichtigste Ergebnis lautet: p ist dann und nur dann Primideal bzw. Vollprimideal, wenn für ein Rechtsideal a_r und ein Linksideal c_l aus $a_r \not\subseteq p$, $c_l \not\subseteq p$ immer $a_r \cdot c_l \not\subseteq p$ bzw. $c_l \cdot a_r \not\subseteq p$ folgt.

W. Krull.

Albert, A. A.: The structure of right alternative algebras. *Ann. of Math.*, II. Ser. **59**, 408—417 (1954).

Eine Algebra heißt alternativ, wenn das Assoziativgesetz für alle dreigliedrigen Produkte mit zwei gleichen Faktoren erfüllt ist. Von den drei dies ausdrückenden Regeln $y \cdot x \cdot x = y \cdot x \cdot x$, $xx \cdot y = x \cdot xy$, $xy \cdot x = x \cdot yx$ folgt jede aus den beiden anderen. Wird nur die erste gefordert, so heißt die Algebra rechts-alternativ. In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **33**, 155) hat Verf. einige Sätze über rechts-alternative Algebren bewiesen. Sein Hauptergebnis war, daß bei Charakteristik 0 jede halbeinfache rechts-alternative Algebra alternativ ist. Dies Ergebnis wird in der vorliegenden Arbeit auf jede Charakteristik $\neq 2$ verallgemeinert, und zwar durch Konstruktion einer Spurfunktion, mit der das gewöhnliche Spurkriterium für das Radikal gültig ist.

H. Hasse.

Jacobson, N.: A Kronecker factorization theorem for Cayley algebras and the exceptional simple Jordan algebra. *Amer. J. Math.* **76**, 447—452 (1954).

Nach einem Satz von Wedderburn ist eine Algebra B mit Einselement, die eine endlich-dimensionale zentral einfache Algebra A mit demselben Einselement enthält, ein Kroneckerprodukt: $B = A \otimes U$, wobei U der Zentralisator von A in B ist. Nach Kaplansky (dies. Zbl. **42**, 262) gilt dasselbe, falls B alternativ und A eine Cayley-Algebra ist. Verf. zeigt, daß dieser Satz auch dann richtig ist, wenn B eine beliebige Jordan-Algebra und A eine einfache Jordansche Ausnahmealgebra ist; dann ist B also kommutativ und genügt dem Assoziativgesetz $a^2 \cdot (b \cdot a) = (a^2 \cdot b) \cdot a$, während A mit der Algebra M_3^H der dreireihigen Hermiteschen Matrizen über der Cayley-Algebra vom Range 8 zusammenhängt (vgl. A. A. Albert, dies. Zbl. **29**, 10; R. D. Schafer, dies. Zbl. **39**, 27). — Zum Beweis wird zunächst der Satz von Kaplansky mit Hilfe von Bimoduln hergeleitet, deren Theorie der Verf. in der demnächst erscheinenden Arbeit „Structure of alternative and Jordan bimodules“ entwickelt, und dann der obige Satz auf diesen zurückgeführt. Hierbei genügt es, sich auf einen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper zu beschränken, in dem $A = M^n$ wird. Schließlich befreit sich der Verf. von der Voraussetzung, daß das Einselement von A auch Einselement von B ist.

E.-A. Behrens.

Frank, Marguerite Straus: A new class of simple Lie algebras. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **40**, 713—719 (1954).

The author defines a class of simple Lie algebras of finite characteristic as follows. Let $\tilde{\mathfrak{F}}$ be a field of characteristic p , and let \mathfrak{B}_n be the algebra (with unit-element) of all commutative polynomials in x_1, \dots, x_n with the defining relations $x_1^p = \dots = x_n^p = 0$. The algebra \mathfrak{D}_n of derivations over $\tilde{\mathfrak{F}}$ of \mathfrak{B}_n may be considered as a Lie algebra in a well known way. For each element $A = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ of \mathfrak{D}_n

the divergence of A is defined to be $\delta A = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$. The derivations whose divergence is zero, form a subalgebra \mathfrak{M}_n (of dimension $(n-1)p^n + 1$ over $\tilde{\mathfrak{F}}$) of \mathfrak{D}_n , and for $n \geq 2$ the algebra $\mathfrak{L}_n = \mathfrak{M}_n^2$ is simple. Its dimension over $\tilde{\mathfrak{F}}$ is $(n-1)(p^n - 1)$, and this shows \mathfrak{L}_n to be in general distinct from the known simple Lie algebras of characteristic p . The elements of \mathfrak{L}_n are also characterized in a different way as „truncated derivations“.

P. M. Cohn.

Seligman, George B.: On a class of semisimple restricted Lie algebras. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **40**, 726—728 (1954).

A representation $x \rightarrow U(x)$ of a restricted Lie algebra over a field of characteristic p is said to be restricted if $x^{[p]} \rightarrow [U(x)]^p$. The author states that he has determined the simple restricted Lie algebras over an algebraically closed field of characteristic $\neq 7$, which possess a restricted representation U with a non-degenerate trace form $\text{Tr}(U(x)U(y))$. Such an algebra is isomorphic to one of the algebras of the 4 series A, B, C, D or the 5 exceptional algebras (defined analogously to the case of characteristic 0). These algebras also have a non-degenerate Killing form, provided that the characteristic of the field is further restricted. The proofs are to appear in a subsequent paper.

P. M. Cohn.

Hochschild, G.: Cohomology of restricted Lie algebras. *Amer. J. Math.* **76**, 555—580 (1954).

A restricted Lie algebra L , over a field of characteristic p , is defined to be (cf. N. Jacobson, this Zbl. 25, 303) a Lie algebra over F in which there exists a mapping $x \rightarrow x^{[p]}$ of L into itself which satisfies certain identities. The author defines restricted cohomology groups of such algebras and interprets the 1- and 2-dimensional groups in terms of extensions of restricted L -modules (L -modules M such that $x^p \cdot m = x^{[p]} \cdot m$ for all $x \in L$, $m \in M$) and of restricted Lie algebras. Throughout he shows the relations between the „restricted“ situations and the situations arising in the interpretation of the ordinary cohomology groups of the algebras. *W. H. Cockcroft.*

Hochschild, G.: Lie algebra kernels and cohomology. Amer. J. Math. 76, 698—716 (1954).

The author continues his study of the interpretation of restricted cohomology groups of restricted Lie algebras (cf. preceding review). Here the 3-dimensional cohomology group is interpreted in terms of „restricted“ kernels, which are analogous to the kernels of group extension theory. *W. H. Cockcroft.*

Andrunakievič, V. A.: Das Radikal in verallgemeinerten Q -Ringen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 18, 419—426 (1954) [Russisch].

Unter einem Q -Ring im Sinne von Kaplansky versteht man einen topologischen Ring, in dem die quasi-regulären Elemente eine offene Menge bilden. Verf. bezeichnet als verallgemeinerte Q -Ringe diejenigen topologischen Ringe, in denen die im verallgemeinerten Sinne radikalen Elemente (vgl. Verf., dies. Zbl. 46, 256) eine offene Menge bilden. In diesen Ringen ist das Radikal im Sinne von Brown und McCoy abgeschlossen. Ein Ring, der eine Umgebung der Null besitzt, die aus i. v. S. radikalen Elementen besteht, erweist sich als verallgemeinerter Q -Ring. Besonders untersucht werden einfache verallgemeinerte Q -Ringe. Weitere Sätze behandeln beschränkte und kompakte verallgemeinerte Q -Ringe. Ein Teil der Ergebnisse dieser Arbeit war bereits von Iséki mit anderen Methoden gefunden worden.

R. Kochendörffer.

Lammel, Ernst: Über ein Rechnen mit reellen Zahlenfolgen. Arch. der Math. 5, 385—388 (1954).

Bei fester positiver Zahl $q < 1$ wird über dem Ring der an allen Stellen z mit $q < |z| < q^{-1}$ regulären eindeutigen Funktionen mit reellen Laurent-Koeffizienten die Algebra mit der Basis $\{1, \sigma\}$, wobei 1 das Einselement und σ^2 die durch $f(z) = -(1 + z^2)$ erklärte Funktion f ist, als nullteilerfrei nachgewiesen. Die Elemente dieser Algebra treten auf als Analogon der komplexen Zahlen bei der dreidimensionalen Laplaceschen Differentialgleichung. *G. Pickert.*

Cotlar, M.: On a theorem of Beurling and Kaplansky. Pacific J. Math. 4, 459—465 (1954).

Nouvelle démonstration du Théorème: Si I est un idéal fermé de l'algèbre $L_1(A)$ d'un groupe abélien localement compact A , si le spectre $S(f)$ d'une fonction f contient le spectre $S(I)$ et si l'intersection des frontières de $S(f)$ et de $S(I)$ est un ensemble réductible (pas de sous-ensembles parfaits non vides), alors $f \in I$.

A. Revuz.

Skornjakov, L. A.: Zu der Note „Zur Theorie der Alternativkörper“. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 2 (60), 185—188 (1954) [Russisch].

Beweis eines Satzes, der in der im Titel genannten Arbeit (dies. Zbl. 40, 14) stillschweigend benutzt wurde: Verschwindet für je drei der Elemente a, b, c, d eines Alternativkörpers der Assoziator, so wird $[a, b, c, d] = 0$. *R. Kochendörffer.*

Matsumura, Hideyuki: Automorphism-groups of differential fields and group-varieties. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 28, 283—292.

E. R. Kolyhin warf in seiner Arbeit über die Galois'sche Theorie differenzierbarer Körper [Amer. J. Math. 75, 753—824 (1953)] die Frage auf, ob es stets möglich ist, die Komponente der Identität einer algebraischen Gruppe mit einer „variété de groupe“ im Sinne von A. Weil zu identifizieren. Verf. zeigt, daß diese Frage be-

jahend zu beantworten ist und daß für eine streng-normale Erweiterung die Komponente der Identität der Gruppe der strengen Isomorphismen tatsächlich eine solche Identifikation gestattet.

H.-J. Kowalsky.

Beyer, Gudrun: Ein Einzigkeitssatz in der Einbettungstheorie galoisscher Körper. Math. Nachr. 11, 317—320 (1954).

Es sei $\mathfrak{G} = \{\dots, X, Y, \dots\}$ eine endliche Gruppe, $\mathfrak{N} = \{\dots, S, \dots\}$ ein Normalteiler in \mathfrak{G} und $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} = \mathfrak{g} = \{\dots, x, y, \dots\}$. Ferner sei $\{ \dots, U_x, U_y, \dots \}$ ein Vertretersystem von \mathfrak{G} nach \mathfrak{N} und $\{ \dots, Q_{x,y}, \dots \}$ mit $Q_{x,y} \in \mathfrak{N}$ das zugehörige Faktorensystem: $U_x U_y = U_{xy} Q_{x,y}$. Schließlich sei Ω/Ω_0 eine galoissche Körpererweiterung mit der Galoisgruppe \mathfrak{g} . Für die Elemente $P = \sum_{S \in \mathfrak{N}} p_S S$ mit $p_S \in \Omega$ des Gruppenringes N von \mathfrak{N} über Ω werde definiert:

$P^X = \sum_{S \in \mathfrak{N}} p_S X^S$ mit $S^X = X^{-1} S X$, wo x die Restklasse $X \bmod \mathfrak{N}$ als Galois-Automorphismus von Ω/Ω_0 ist. Notwendig für die Lösbarkeit des Einbettungsproblems, d. h. der Existenz einer

galoisschen Algebra K/Ω mit der Galoisgruppe \mathfrak{N} im Sinne von H. Hasse (dies. Zbl. 32, 255), die über Ω_0 galoissch mit der Gruppe \mathfrak{G} ist, ist, wie Ref. gezeigt hat (dies. Zbl. 50, 33), die Existenz eines Verkettungssystems $\{ \dots, B_x, \dots \}$ regulärer Elemente aus N , welches den Verkettungsgleichungen $(*) B_x B_x^{-1} = B_{xy} Q_{x,y}$ genügt. Diese Bedingung verallgemeinert eine früher von

H. Hasse (a. a. O. u. dies. Zbl. 33, 158) für abelschen Normalteiler \mathfrak{N} und unter gewissen Voraussetzungen über Ω aufgestellte Bedingung. Verf. beweist: Wenn Ω_0 unendlich viele Elemente enthält, so gibt es in N „bis auf Assoziierte“ höchstens eine Lösung von $(*)$, d. h., sind $\{ \dots, B_x, \dots \}$ und $\{ \dots, B'_x, \dots \}$ zwei Lösungen, so gibt es ein reguläres $A \in N$ mit $(**) A B'_x = B_x A^{U_x}$

für alle $x \in \mathfrak{g}$. Der Beweis ist eine Verallgemeinerung eines rechnerischen Beweises von H. Hasse a. a. O. für den dort behandelten Spezialfall. Zum Beweise: Für jedes $D \in N$ genügt $(***) A =$

$\sum_{x \in \mathfrak{g}} B_x D^x B_x^{-1}$ der Behauptung $(**)$. Durch Einführung einer geeigneten Basisdarstellung bezüglich Ω_0 in $(***)$ wird gezeigt, daß A bei passender Wahl von D regulär ist. P. Wolf.

Skopin, A. I.: p -Erweiterungen eines lokalen Körpers, der $\sqrt[p]{1}$ enthält. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 29—32 (1954) [Russisch].

Es sei k ein lokaler Körper vom Absolutgrad n_0 . Gefragt wird nach den endlichen p -Gruppen G , die über k galoissche Gruppen sind. Ist Φ die Frattinische Φ -Untergruppe von G , so sind die minimalen Erzeugendenzahlen von G und von der elementar-abelschen G/Φ einander gleich (Bezeichnung r). Deshalb ist notwendig $r \leq r$, wenn $r = n_0 - 1$, falls k die p -ten Einheitswurzeln nicht enthält, und $r = n_0 - 2$, falls k diese enthält. Für den ersten Fall hat Šafarevič (dies. Zbl. 41, 171) gezeigt, daß alle p -Gruppen G mit $r \leq r$ tatsächlich Galoisgruppen sind. Für den zweiten Fall kündigt Verf. das folgende Resultat an. G heiße m -stufig, wenn die m -te iterierte Φ -Untergruppe $G^{(m)}$ gleich 1, aber $G^{(m-1)} \neq 1$ ist ($\Phi = G^{(1)}$). Enthält k die p^m -ten Einheitswurzeln, so ist die m -stufige p -Gruppe G genau dann Galoisgruppe über k , wenn sie r Erzeugende a_1, \dots, a_r mit der Relation $(a_1, a_2)(a_3, a_4) \cdots (a_{r-1}, a_r) = 1$ besitzt. Dabei bedeutet $(a, b) = a b a^{-1} b^{-1}$ den Kommutator.

G. Beyer-H. Hasse.

Robinson, Abraham: On predicates in algebraically closed fields. J. symbolic Logic 19, 103—114 (1954).

As is well-known, many properties of varieties in algebraic geometry can be formulated in the lower (engeren) functional calculus. In the present paper the following theorem is proved without the theory of elimination: Let F be a commutative field of arbitrary characteristic. With every predicate $Q(x_1, \dots, x_n)$ which is formulated in the lower functional calculus in the terms of the relations of equality, addition and multiplication and (possibly) in terms of some of the elements of F , there can be associated an ascending chain of ideals in the ring of polynomials $F[x_1, \dots, x_n]$, $\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{a}_{2k+1}$, $k \geq 0$, such that $V_Q = (V_0 - V_1) \cup (V_2 - V_3) \cup \dots \cup (V_{2k} - V_{2k+1})$ for every algebraically closed extension F^* of F . Hereby V_0, \dots, V_{2k+1} are the varieties of the ideals $\mathfrak{a}_0, \dots, \mathfrak{a}_{2k+1}$ in the coordinate-space (x_1, \dots, x_n) over F^* , and V_Q is the set of points of this space which satisfy Q . It is pointed out that another (more elementary) proof of this theorem can be ob-

tained by means of a logical counterpart of the theory of elimination in polynomial algebra. Z. Suetuna.

Krasner, Marc: Prolongement analytique dans les corps valués complets. Domaines quasi connexes. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2385—2387 (1954).

The author considers a valued field K which he extends to K' by a point on infinity, defining the rational operations and the valuation in the obvious way. The value of an element x is denoted by $|\alpha|$. Assuming the density of the valuation he calls a subset D of K' (with $D \cap K \neq 0$) „ultra ouvert“ around a point $\alpha \in D \cap K$ if for every $\xi \in D$ the distance $d(x, \alpha) = |x - \alpha|$ for all $x \notin D$ takes only a finite number of values $< d(\xi, \alpha) = |\xi - \alpha|$. He calls D a quasi connected domain in case this property holds for every $\alpha \in D \cap K$. The author proves the following results about these domains. 1° A quasi connected domain is open in K' . 2° The image of a quasi connected domain under the transformation $x \rightarrow (ax + b)/(cx + d)$ (with $ad - bc \neq 0$) is a quasi connected domain. Here the author assumed that K is a so-called „espace ultramétrique“ [see M. Krasner, C. r. Acad. Sci., Paris **219**, 433—435 (1944)] i. e. that the valuation is non-archimedian. 3° The intersection of a finite number of quasi connected domains is a quasi connected domain. 4° The union of a linked family of quasi connected domains is a quasi connected domain. [A family of sets \mathfrak{A} is called linked („enchainé“) if to every pair (A, B) with $A, B \in \mathfrak{A}$ there is a finite sequence $A = C_0, C_1, \dots, C_n = B$ with $C_i \in \mathfrak{A} = C_i \cap C_{i+1} \neq 0$.] The paper concludes with some examples about quasi connected domains. J. Verhoeff.

Carlitz, L.: The number of solutions of some special equations in a finite field. Pacific J. Math. **4**, 207—217 (1954).

Let $GF(q)$ be a fixed finite field. Numbers of solutions of the following equations over $GF(q)$ are studied: (1) $Q(x_1, \dots, x_n) = \alpha$, where Q is a quadratic form:

(2) $\prod_{i=1}^s \alpha_i \prod_{j=1}^{r_i} x_{ij}^{a_{ij}} = \alpha$; (3) $\text{Det}(x_{ij}) = \alpha$ and the square root of the determinant of a skew symmetric matrix of order n equal to α , and (4) $F_1(x^{(1)}) + \dots + F_s(x^{(s)}) = \alpha$, where each F is homogeneous and irreducible and factors completely into linear factors in some extended field $GF(q^m)$. L. K. Hua.

Carlitz, L.: Certain special equations in a finite field. Monatsh. Math. **58**, 5—12 (1954).

Let $a_1, a_2, \dots, a_r, b, c$ be elements of $GF(q)$, where q is odd. For $r = 3$ and 4 the author finds the number of solutions in $GF(q)$ of $a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2 = 2bx_1 \dots x_r + c$. M. C. R. Butler.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Fröhlich, A.: A remark on the class number of abelian fields. J. London math. Soc. **29**, 498 (1954).

Remak, Robert: Über algebraische Zahlkörper mit schwachem Einheitsdefekt. Compositio math. **12**, 35—80 (1954).

In dieser nachgelassenen Arbeit bringt Verf. zunächst den in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **47**, 272) angekündigten Beweis, daß die dort für algebraische Zahlkörper ohne Einheitendefekt hergeleitete Größenbeziehung zwischen der Diskriminante und dem Regulator auch für Körper mit schwachem Einheitendefekt gilt, d. h. für die total-imaginären quadratischen Erweiterungen \mathfrak{K} eines total-reellen Körpers $\hat{\mathfrak{K}}$, die durch Adjunktion einer Einheit von \mathfrak{K} zu $\hat{\mathfrak{K}}$ gewonnen werden können. Dann gibt Verf. noch eine Übersicht über die bei festem $\hat{\mathfrak{K}}$ nur endlich vielen Möglichkeiten solcher Erweiterungen. Der Fall eines starken Einheitendefektes, bei dem \mathfrak{K} und $\hat{\mathfrak{K}}$ dieselben Einheiten besitzen, bleibt weiterhin unerledigt. H. Reichardt.

Dénes, P.: Über den letzten Fermatschen Satz in relativ-zyklischen Zahlkörpern. Ann. Polon. math. **1**, 77—80 (1954).

Sei l eine im Kummerischen Sinne reguläre Primzahl, ζ eine primitive l -te Einheitswurzel und $\lambda = 1 - \zeta$. Vom Körper k_0 der l -ten Einheitswurzeln ausgehend bildet Verf. eine Körperkette $k_{r+1} = k_r \left(\sqrt[l]{\varepsilon_r} \right)$, wo jeweils ε_r eine Einheit aus k_r ist, die keine l -te Potenz in k_r ist. Für jeden Körper k_n dieser Kette beweist er die Un-

möglichkeit einer Gleichung der Form $x^l + y^l = \varepsilon \lambda^{ml} z^l$ mit natürlichem m , einer Einheit ε aus k_n und zu l primen x, y, z aus k_n . H. Hasse.

Cohn, Harvey: The density of Abelian cubic fields. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 476—477 (1954).

Bezeichne $N(x)$ die Anzahl aller kubischen Zahlkörper mit Diskriminantenbetrag $d < x$ und $N_0(x)$ die Anzahl der normalen (also zyklischen) unter ihnen. Verf. knüpft an ihm mitgeteilte (unveröffentlichte) Ergebnisse von Davenport und Heilbronn über das asymptotische Verhalten von $N(x)$ an, nämlich $N(x) = O(x)$ und $N(x) \sim c_1 x$ (auch bei Beschränkung auf $d < 0$). Er ergänzt diese Ergebnisse durch die Feststellung $N_0(x) \sim (11 \pm 18) \sqrt[3]{x}$ für $x \rightarrow \infty$. — Der Beweis stützt sich auf die vom Ref. gegebene (dies. Zbl. **35**, 305) explizite Übersicht über alle zyklischen kubischen Zahlkörper fester Diskriminante $d = f^2$, wobei der Führer $f = q_0 q_1 \cdots q_r$ oder $9 q_1 \cdots q_r$ mit verschiedenen Primzahlen $q \equiv 1 \pmod{3}$ ist; danach gibt es zu festem f jeweils 2^r zyklische kubische Zahlkörper. Die hiermit leicht explizit angebbare Anzahlfunktion $N_0(x)$ läßt sich auf ein Dirichletsches Produkt als erzeugende Funktion zurückführen, das seinerseits bis auf vernachlässigbare Bestandteile die Dedekindsche Zetafunktion des Körpers der dritten Einheitswurzeln ist. Durch Abblendenlassen der analytischen Methode aus Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen Band 2, Buch 5, Teil 18 (Leipzig 1909) ergibt sich dann die angegebene asymptotische Gleichheit, und zwar mit dem Konstantenwert $c = \frac{1}{2\pi} \prod_q \frac{(q+2)(q-1)}{q(q+1)} = 0.28\dots$, wo das Produkt über alle Primzahlen $q \equiv 1 \pmod{3}$ erstreckt ist. H. Hasse.

Cohn, Harvey: Numerical study of signature rank of cubic cyclotomic units. Math. Tables Aids Comput. **8**, 186—188 (1954).

Der zyklische kubische Zahlkörper K_p mit Primzahlführer $p \equiv 1 \pmod{3}$ kann nur dann gerade Klassenzahl h_p haben, wenn die wesentlich einzige Kreiseinheit H_p von K_p total-positiv ist: siehe die in dies. Zbl. **35**, 305, **46**, 260 referierten Schriften des Ref., insbesondere Satz 5 der letzteren. Verf. hat durch den programmgesteuerten Rechenautomaten MIDAC feststellen lassen, welche Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{3}$ im Bereich $p < 3000$ diese für 2 h_p notwendige Bedingung $H_p \gg 0$ erfüllen. Es haben sich die folgenden 21 Primzahlen ergeben: 163, 277, 349, 397, 547, 607, 709, 853, 937, 1009, 1399, 1699, 1777, 1789, 1879, 1951, 2131, 2311, 2689, 2797, 2803. Für vier dieser Primzahlen, nämlich 163, 277, 349, 2803, hat sich durch gewöhnliche Rechnung herausgestellt, daß tatsächlich $2h_p$, nämlich $h_p = 4$ ist. H. Hasse.

Bergman, Gösta: On the exceptional group of a Weierstrass curve in an algebraic field. Acta math. **91**, 113—142 (1954).

It follows from the work of Weil that the exceptional group of an equation $Y^2 = X^3 - AX - B$ in an algebraic number field Ω is always bounded [Acta math. **52**, 281—315 (1929)]. (The exceptional group is the group of solutions of finite order.) It is further known that if (X, Y) is a solution of finite order then mY is an integral and divides an ideal \mathfrak{n} where m depends only on Ω and \mathfrak{n} only on Ω, A, B (cf. G. Billing, this Zbl. **18**, 54); so if Ω is rational or imaginary quadratic the exceptional group can be effectively determined. The author established bounds for the order of the exceptional group valid for all fields Ω , thus allowing it to be effectively determined; at least if A, B satisfy certain conditions. Although the author appears to claim in his introduction that his result is general the theorems proved do not appear to cover all cases. J. W. S. Cassels.

Severi, Francesco: Sulla caratterizzazione dei corpi di funzioni quasi abeliane. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 21—26 (1943).

Quasiabelsche Funktionen sind meromorphe Funktionen von π komplexen Variablen mit $2p + \delta_1 (< 2\pi)$ unabhängigen Perioden. Alle zu einer festen Periodenmatrix gehörigen quasiabelschen Funktionen bilden einen Funktionenkörper, der, wie Verf. mit Benützung einer Hypo-

diese L (dies. Zbl. 41, 482) gezeigt hat, auch folgendermaßen definiert werden kann: a) als Körper aller rationalen Funktionen auf einer irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeit V_π , welche eine π -gliedrige kontinuierliche abelsche Gruppe Γ von birationalen Transformationen in sich besitzt, die im allgemeinen, aber nicht ausnahmslos, transitiv ist; — b) als Körper aller rationalen Funktionen auf dem Produkt $V_p \times S_\delta$ einer Picardschen Mannigfaltigkeit V_p und eines linearen Raumes S_δ . — Verf. beweist hier, ohne Benützung der Hypothese L , daß beide Definitionen äquivalent sind. Verf. bemerkt außerdem, daß ein quasiabelscher Funktionenkörper auch als Funktionenkörper von π reellen Variablen charakterisiert werden kann, der von π stetigen und stetig differenzierbaren (unabhängigen) Funktionen erzeugt werden kann, die ein Additionstheorem im Sinne von Weierstraß besitzen. W. Gröbner.

Zahlentheorie:

James, R. D. and Ivan Niven: Unique factorization in multiplicative systems. Proc. Amer. math. Soc. 5, 834—838 (1954).

Verff. untersuchen die Frage, in welchen Unterhalbgruppen der hinsichtlich der Multiplikation als Halbgruppe aufgefaßten Menge \mathbb{Z} aller positiven ganzen Zahlen der ZPE-Satz (d. h. eindeutige Zerlegung in Primelemente) gilt. Verf. beweisen: Besteht die Halbuntergruppe $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{Z}$ genau aus den Positivteilen gewisser Restklassen nach einem festen Modul n (n sei dabei minimal gewählt), so gilt in \mathcal{M} dann und nur dann der ZPE-Satz, wenn \mathcal{M} gleich der Menge aller zu n teilerfremden positiven ganzen Zahlen ist. Der Beweis verläuft elementar. H. Ostmann.

Carlitz, L.: Congruence properties of the ménage polynomials. Scripta math. 20, 51—57 (1954).

Il s'agit du polynôme $U_n(t)$ qui intervient dans le problème des ménages et de deux polynômes étroitement associés $V_n(t)$ et $W_n(t)$. Riordan (ce Zbl. 46, 8) a prouvé successivement les deux congruences où p est premier et m arbitraire: $U_{p^s+n} \equiv (t^{p^s} - 1) U_n \pmod{p}$ et $U_{m^s+n} \equiv (t - 1)^{m^s} U_n \pmod{m}$. L'A. prouve pour les trois polynômes en question deux congruences plus générales: nous les donnons pour U_n : $U_{m+n} \equiv (t - 1)^m U_n \pmod{m'}$, où $m = \prod_{p|m} p^e$ et $m' = \prod_{p|m} p^{e-1}$. En posant $\Delta f(n) = f(n + m) - (t - 1)^m f(n)$ et $\Delta^r f(n) = \Delta \Delta^{r-1} f(n)$: $\Delta^{2r} U_n \equiv \Delta^{2r+1} V_n \equiv 0 \pmod{m' m'}$, pour m impair et $r \geq 1$. Pour m pair le module est à remplacer par $2^{1-r} m' m'$. S. Bays.

Carlitz, L.: Hankel determinants and Bernoulli numbers. Tôhoku math. J., II. Ser. 5, 272—276 (1954).

Verf. weist darauf hin, daß sich aus bekannten Kongruenzrelationen bez. Euler-scher und Bernoullischer Zahlen sowie aus (auf den Verf. zurückgehenden) Kongruenzen hinsichtlich der Koeffizienten der Jacobischen elliptischen Funktionen unmittelbar Kongruenzrelationen gewisser Hankelscher Determinanten angeben lassen. Beispielsweise gilt nach Kummer

$$\sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} E_{m+i+s} \equiv 0 \pmod{p^r}, m \equiv r, e \equiv 1, (p-1)p^{e-1} \mid b, p \equiv 3 \text{ Primzahl};$$
 setzt man $a_i = E_{m+i}$ ($i = 0, 1, \dots$), so ist die linke Seite der Kongruenz offenbar gleich A_{a_0} , so daß sich für die Hankelsche Determinante $|a_{i+j}| = |B^{i+j} a_0|$ ($i, j = 0, 1, \dots, r$) leicht $0 \pmod{p^{r(r+1)}}$ ergibt (allgemein folgt aus $|B^i a_0| \equiv 0 \pmod{M^i}$ leicht $|a_{i+j}| \equiv 0 \pmod{M^{r(r+1)}}$ ($i, j = 0, 1, \dots, r$)). H. Ostmann.

Carlitz, Leonard: The coefficients of singular elliptic functions. Math. Ann. 127, 162—169 (1954).

Fortsetzung früherer Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 50, 39) über die Kongruenzeigenschaften der Koeffizienten der Jacobischen elliptischen Funktion $\operatorname{sn} x = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}(k^2) \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$ und der „reziproken Funktion“ $\frac{x}{\operatorname{sn} x} = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m}(k^2) \frac{x^{2m}}{(2m)!}$ für den Fall, daß k^2 ein singulärer Modul ist, somit $\operatorname{sn} x$ eine komplexe Multiplikation zuläßt. [Dabei sind die $A_m(k^2)$ und $B_m(k^2)$ Polynome in k^2 mit ganzen rationalen

bzw. rationalen Koeffizienten, insbesondere $A_1(k^2) = B_0(k^2) = 1$.] Es bezeichnet χ (< 0) die Diskriminante des imaginären quadratischen Zahlkörpers, in dem k^2 liegt. Es werde $\chi_m = A_m(k^2)$, $\beta_m = B_m(k^2)$, $\tau_m = \beta_m m$ gesetzt. Ist p eine ungerade Primzahl mit $(\chi/p) = -1$, so gilt $\chi_m \equiv 0 \pmod{p^r}$ ($m \geq p r$). Wenn ferner $p^2 - 1 \nmid m$ ist, so ist τ_m für p ganz, und es gilt sogar $\tau_m \equiv 0 \pmod{p^r}$ ($m \geq p r$). Es folgen noch einige Ergänzungen für den Fall $p^2 - 1 \mid m$ und Bemerkungen über die Koeffizienten der Lemniskatenfunktion (Fall $\chi = -4$). L. Rédei.

Sierpiński, W.: Remarques sur les racines d'une congruence. Ann. Polon. math. 1, 89—90 (1954).

Let $f(x)$ be a polynomial where the coefficients are integers in $R(1)$. Let further $m = 4$ be a composite number. Then there exist two integers $a_i \not\equiv 0 \pmod{m}$, ($i = 1, 2$), such that if $f(a_1) \equiv f(a_2) \equiv 0 \pmod{m}$, then $f(0) \equiv 0 \pmod{m}$. This generalizes a proposition due to M. Chojnačka (not yet published). As a consequence it is easily found, that the well-known theorem of Lagrange, concerning the number of incongruent roots of the congruence $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$, m a prime, cannot be extended to composite moduli m , except $m = 4$. W. Ljunggren.

Whiteman, A. L.: The sixteenth power residue character of 2. Canadian J. Math. 6, 364—373 (1954).

Nach Gauß ist für eine Primzahl $p \equiv 1 \pmod{4}$ genau dann $(2/p)_4 = 1$, wenn $p = x^2 + 64 y^2$ ganzzahlig lösbar ist. Ähnliche Kriterien bestehen nach Western [Proc. London math. Soc., II. Ser. 9, 244—272 (1911)] und Aigner (dies. Zbl. 20, 291) für $p \equiv 1 \pmod{8}$, $(2/p)_8 = 1$ und $p \equiv 1 \pmod{16}$, $(2/p)_{16} = 1$. Verf. gibt für diese Kriterien neue Beweise, die sich auf die Jacobischen Summen zur Kreisteilung und die zugeordneten Kongruenzlösungsanzahlen stützen. H. Hasse.

● **Gelfond, A. O.:** Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen (Diophantische Gleichungen). (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik. Bd. V.) Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1954. 59 S. Vgl. dies. Zbl. 48, 28.

Mills, W. H.: A method for solving certain Diophantine equations. Proc. Amer. math. Soc. 5, 473—475 (1954).

The author gives a complete solution of the Diophantine equation $(1) x^2 + xyz + \varepsilon y^2 + a x + b y + c = 0$, where $\varepsilon = \pm 1$ and a, b, c are integers. The special case $a = b = 0$, $\varepsilon = 1$ has been treated by Barnes (this Zbl. 50, 37). The case $\varepsilon = c = 1$, $a = b$ has been treated independently but by the same method by the author (this Zbl. 50, 36). In the proof use is made of a modification of the methods of these two papers. Of special interest is the following corollary: If $x^2 + a x + c$ and $\varepsilon y^2 + b y + c$ are both irreducible over the field of rational numbers, then (1) has integral solutions x and y for only a finite number of values of z . W. Ljunggren.

Moessner, Alfred and George Xeroudakes: On some sets of integers with equal sums of like powers. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 6, 125—136 (1954).

Wiman, A.: Über die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten auf gewissen Kurven dritter Ordnung. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 317—323 (1954).

Selmer, Ernst S.: A conjecture concerning rational points on cubic curves. Math. Scandinav. 2, 49—54 (1954).

On the basis of his earlier work on the Diophantine equation $(*) X^3 + Y^3 = A Z^3$ (this Zbl. 42, 269) and subsequent computations the author makes some interesting conjectures. If the equation $(*)$ is factorised in the Eisenstein field of cube roots of unity there result a number of Diophantine equations of the type $(II) u^3 = f(u, v)$, where f is a homogeneous cubic with integer coefficients. The number of these which are soluble is related to the number of generators in the group of solutions in the usual sense. Often some of the equations (II) can be shown insoluble by simple congruence considerations (the „first descent“). The equation (II) may now be again factorised in the relevant cubic field defined by the right hand side and there result equations $\Phi(u', v', w') = 0$ where Φ is a homogeneous cubic with integer coefficients. Sometimes some of these may be shown insoluble by congruence considerations (the „second descent“). The author conjectures that the „second descents“ always exclude the existence of an even number

of generators over the number excluded by the first descent. He also constructs a second descent for $Y^2 = X^3 - AX - B$ and makes similar conjectures. *J. W. S. Cassels.*

Roth, K. F.: On certain sets of integers. II. *J. London math. Soc.* **29**, 20—26 (1954).

A set of distinct positive integers is called an \mathfrak{A} -set if the l equations $\sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} x_\nu = 0$, $\mu = 1, \dots, l$, where $a_{\mu\nu}$ are integers, are never satisfied simultaneously by distinct integers x_1, \dots, x_n of the set. $A(x)$ denotes the greatest number of integers x forming an \mathfrak{A} -set. In an earlier paper (this Zbl. **46**, 43) the author proved that if the matrix $(a_{\mu\nu})$ is the 1×3 matrix $(1, -2, 1)$ then $x^{-1} \cdot A(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$. In the present paper he generalizes this result to any $l \cdot n$ matrix satisfying the conditions 1. $n > 2l$, 2. $\sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} = 0$ for $\mu = 1, \dots, l$ 3. Among the columns of the matrix, there exist l linearly independent columns such that if any one of these l columns is excluded the remaining $n - 1$ columns of the matrix can be divided into two sets so that among the columns of each set there are l linearly independent columns. (Cf. Part I, this Zbl. **50**, 40.) *S. Selberg.*

Cohen, Eckford: Rings of arithmetic functions. II. The number of solutions of quadratic congruences. *Duke math. J.* **21**, 9—28 (1954).

(Part I, this Zbl. **46**, 260.) Let r be an odd positive integer. In this paper the author discusses the number of solutions $N_s(n, r)$ of $n = a_1 x_1^2 + \dots + a_s x_s^2 \pmod{r}$ ($a_i, r = 1$, $i = 1, \dots, s$, and deduces certain arithmetic properties of $N_s(n, r)$.

L. K. Hua.

Pol, Balth. van der: The representation of numbers as sums of eight, sixteen and twenty-four squares. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **57**, 349—361 (1954).

Verf. zeigt, daß die (bekannten) Formeln für die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl n als eine Summe von 8, 16 oder 24 Quadraten aus einigen früher von ihm erhaltenen Formeln (dies. Zbl. **42**, 273) leicht hergeleitet werden können.

H. D. Kloosterman.

Johnson, S. M.: On the representations of an integer as the sum of products of integers. *Trans. Amer. math. Soc.* **76**, 177—189 (1954).

Let $R(N)$ be the number of representations of an integer as a sum of three products of three numbers. The author proves that $R(N) = \frac{1}{2} \mathfrak{S}(N) N^2 \log^6 N + O(N^2 \log^5 N)$ where

$$\mathfrak{S}(N) = \prod_p (1 - V(p)) \sum_{d|N} d \prod_{p^m | d, p^{m+1} \nmid d} \left(\frac{V(p^m) - V(p^{m+1})}{1 - V(p)} \right)$$

and

$$V(p^m) = ((m+1)p^{-m} - mp^{-m-1})^3.$$

Several generalizations are stated.

L. K. Hua.

Briggs, W. E.: An elementary proof of a theorem about the representation of primes by quadratic forms. *Canadian J. Math.* **6**, 353—363 (1954).

H. Weber [Math. Ann. **20**, 301—329 (1882)] was the first to prove that every primitive binary quadratic form is capable of representing infinitely many prime numbers. The author gives a new, elementary, proof based upon the methods used by Atle Selberg in his elementary proof of Dirichlet's theorem about primes in an arithmetic progression (this Zbl. **36**, 306).

S. Selberg.

Sierpiński, W.: Remarques sur les progressions arithmétiques. *Colloquium math.* **3**, 44—49 (1954).

Die Arbeit behandelt einige Probleme betreffs der arithmetischen Progression, die dem Verf. von C. Zarankiewicz gestellt worden sind. Von ungelösten Problemen sind u. a. das folgende erwähnt: Gibt es für jede natürliche Zahl n n Primzahlen, die eine arithmetische Progression bilden? Zu den bewiesenen Sätzen gehört der folgende: In der Folge der natürlichen Zahlen kann man eine unendliche wachsende

Zahlenfolge $\{v_n\}$, die schneller wächst als eine gegebene Folge $\{u_n\}$ von natürlichen Zahlen, auslassen, so daß die übrigbleibende Zahlenfolge keine unendliche arithmetische Progression enthält. Dies folgt einfach, indem man $n = 2^{p_n-1} (2q_n - 1)$ und $v_n = p_n u_n^2 + q_n$ setzt. Dann ist $v_n = u_n^2$. Es sei nun $ak + b$ ($k = 1, 2, \dots$) eine gegebene arithmetische Progression, worin a und b natürliche Zahlen sind. Wählen wir dann $n = 2^{a-1} (2b - 1)$, so ist $v_n = a u_n^2 + b$ ein Element der arithmetischen Progression $ak + b$, woraus der Satz folgt. S. Selberg.

Knobloch, Hans-Wilhelm: Über Primzahlreihen nebst Anwendung auf ein elementares Dichteproblem. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 19, 1–13 (1954).

Es handelt sich um die Dirichletsche Dichte der Menge \mathcal{M}_2 derjenigen Primzahlen p , für welche $p - 1$ quadratfrei ist. Durch L. Mirsky (dies. Zbl. 33, 162) wurde allgemein die natürliche Dichte der Menge \mathcal{M}_2 derjenigen Primzahlen p bestimmt, für welche $p - 1$ frei von k -ten Potenzen ist, und zwar gestützt auf die asymptotische Formel für die Anzahl der Primzahlen $p \leq n$ aus einer primen Restklasse $a \bmod m$ mit in a, m gleichmäßiger Restabschätzung. Wenn Verf. dem Spezialfall $k = 2$ dieses Ergebnisses eine eigene Untersuchung gewidmet hat, so ist das aus den folgenden beiden methodischen Gründen geschehen. Erstens wurde Verf. durch das noch ungelöste Problem der Dichte der Primzahlen p mit vorgegebener Primitivwurzel a (Artinsche Vermutung) veranlaßt, nach einer Dichtefrage zu suchen, bei der einerseits der kombinatorische Ansatz noch ebenso kompliziert ist (Durchschnittsbildung aus unendlich vielen Primzahlmengen mit elementar bestimmbarer Dichte), andererseits aber der analytisch-zahlentheoretische Ansatz statt der bei der Artinschen Vermutung heranzuziehenden L -Funktionen zu den nicht-abelschen Normalkörpern $\mathcal{P}(\sqrt[m]{1}, \sqrt[m]{a})$ nur solche zu den abelschen Normalkörpern $\mathcal{P}(\sqrt[m]{1})$, also gewöhnliche Dirichletsche L -Funktionen erfordert. Als eine diesen Bedingungen genügende Dichtefrage erkannte Verf. gerade die für die Menge \mathcal{M}_2 bei ihr stellt sich übrigens auch als Dichtewert genau dasselbe Produkt $\prod_q (1 - (q(q-1))^{-1})$ über alle Primzahlen q heraus wie bei der Artinschen Vermutung im allgemeinen Falle (a keine Potenzzahl). Zu alledem siehe eine inzwischen erschienene Arbeit des Ref. (dies. Zbl. 47, 42). Zweitens wollte Verf. zeigen, wie man bei Beschränkung der Frage auf die Dirichletsche Dichte statt der natürlichen die erforderliche in a, m gleichmäßige Restabschätzung gewinnt, und daß diese Restabschätzung für die Dirichletsche Dichte der Primzahlen $p = a \bmod m$ mit durchaus elementar-analytischen Hilfsmitteln wesentlich schärfer gegeben werden kann als für die natürliche Dichte nach dem analytisch tieferliegenden Beweisschema des Primzahlsatzes. — Die vom Verf. gewonnene Restabschätzung für die Dirichletsche Dichte der Primzahlen $p = a \bmod m$ bezieht sich auf die Dirichletschen Reihen

$(s|a, m) = \sum_{p \equiv a \bmod m} \frac{1}{p^s}$, wo der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß die kleinste positive Zahl aus der primen Restklasse $a \bmod m$ (falls sie eine Primzahlpotenz p^r ist) unberücksichtigt bleiben soll; von dieser für das nachstehende Ergebnis wesentlichen, im Falle $a = 1 \bmod m$ von selbst erfüllten Summationseinschränkung abgesehen handelt es sich um die Logarithmen der Zetafunktionen zu den primen Restklassen $a \bmod m$. Für die so „beschnittenen“ Zeta-funktionslogarithmen wird mit durchaus elementar-analytischen Hilfsmitteln bewiesen: Bei jedem $s_0 > 1$ und $\varepsilon > 0$ gibt es eine von a, m und s unabhängige Konstante $C = C(\varepsilon, s_0)$ derart, daß $1 < s \leq s_0$ gilt:

$$0 \leq f(s|a, m) - f(s_0|a, m) < C m^{\varepsilon-1} \log(1 - \varepsilon^{-1})^{-1}.$$

Hieraus ergibt sich dann nach dem geläufigen kombinatorischen Schema (siehe die zitierte Arbeit des Ref.) der angegebene Wert für die Dirichletsche Dichte der Primzahlmenge \mathcal{M}_2 .

H. Hasse.

Beyer, Gudrun: Über eine Klasseneinteilung aller kubischen Restcharaktere. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 19, 115–116 (1954).

Es handelt sich um die Kummerse Vermutung, daß die drei Klassen von Primzahlen $p \equiv 1 \bmod 3$, definiert durch die Sektorenlage der zugeordneten normierten Gaußschen Summe, die Dichten $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ haben. Kummer hatte diese Vermutung auf numerische Berechnung für alle $p < 500$ gestützt. Die kürzlich von J. v. Neumann-H. H. Goldstine (dies. Zbl. 51, 281) für alle $p < 10000$ durchgeführte Berechnung ergibt die relativen Häufigkeiten 0.4452, 0.3290, 0.2258, in beträchtlicher Abweichung von den von Kummer vermuteten Dichten 0.5000, ..., 0.3333, ..., 0.1666, ... Verf. bemerkt, daß diese relativen Häufigkeiten vielmehr auf die Dichten $\frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}$ hinweisen. Sie hat nun die entsprechenden Rechnungen auch für die Gaußschen Summen mit zusammengesetztem Führer f durchgeführt, und

zwar soweit der Jacobische Canon arithmeticus ausreichte, also für alle Führer f die aus Primfaktoren $p \leq 7057$ zusammengesetzt sind. Unter Beiseitelassung der a. a. O. behandelten Primführer p ergaben sich für die verbleibenden 1115 zusammengesetzten Führer f die relativen Häufigkeiten 0.4458, 0.3318, 0.2224 in guter Übereinstimmung mit den von Verf. vermuteten neuen Dichten 0.4444 ... 0.3333 ..., 0.2222 ...

H. Hasse.

Haselgrove, C. B. and H. N. V. Temperley: Asymptotic formulae in the theory of partitions. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 225—241 (1954).

Es wird eine asymptotische Formel hergeleitet für die Anzahl der Partitionen der natürlichen Zahl n in Summanden aus einer Folge $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ von ganzen Zahlen. Es möge in den folgenden Bezeichnungen immer r von 1 bis ∞ gehen; sei $\sum \lambda_r^{-\omega} < \infty$; $\psi(\omega) = \sum \exp(-\lambda_r \omega)$, ($\omega = \xi + i\eta$, $\xi > 0$), $\Psi(\omega) = \sum r^{-1} \psi(r\omega)$, $m_0 = m_0(\xi) = \sum (e^{\lambda_r \xi} - 1)^{-1}$,

$K(\alpha) = \prod \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda_r}\right)^{-1} e^{\alpha/\lambda_r}$, $F(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} K(x) e^{xy} dx$. ψ soll nun folgende Bedingungen

erfüllen: $\sum r^2 \psi'''(r\xi) = O(\psi'''(\xi))$ für $\xi \rightarrow 0$; $(\psi'(\xi))^2 < \theta \psi(\xi) \psi''(\xi)$ für passendes, festes, $\theta < 1$ und genügend kleines ξ ; $\xi \psi'''(\xi) = O(\psi'''(\xi))$ wenn $\xi \rightarrow 0$; für genügend kleines ξ soll $|\psi(\omega)| < \theta_1 \psi(\xi)$ sein in $\xi \Delta < |\eta| \leq \pi$, für jedes feste Δ und ein passendes $\theta_1 = \theta_1(\Delta) < 1$. Dann gilt: Die Anzahl aller Partitionen von n in Summanden λ_r ist $p(n) \sim (2\pi \Psi''(\xi))^{-1/2} \exp(\Psi(\xi) + n\xi)$, wo $\Psi'(\xi) + n = 0$ und in m Summanden λ_r $p_m(n) \sim \xi F((m - m_0)\xi) p(n) + o(\xi p(n))$. Allgemein werden für $\sum_{r=1}^m \lambda_r p_m(n)$ (wo $\sum_{r=1}^m r$ -fache Differenzenbildung nach m bedeutet) analoge Beziehungen bewiesen. Ferner wird skizziert, wie man für $\sum \lambda_r^{-\omega} = \infty$ mit der Sattelpunktmethode zum Ziel kommen kann. Der allgemeine Satz wird dann auf $\lambda_r = n, n^k, p$ (p Primzahlen) angewendet. Ferner wird eine Vermutung von Auluck, Chowla und Gupta bewiesen, welche besagt, daß $p_m(n)$ für festes genügend großes n sein Maximum für höchstens 2 Werte von m annehmen kann.

K. Prachar.

Cohen, Eckford: A finite analogue of the Goldbach problem. Proc. Amer. math. Soc. 5, 478—483.

In R_m , dem Restklassenring mod m ($m \geq 2$ ganz) hat bekanntlich jeder Nicht-nullteiler ein Inverses, ist also Einheit, und die Primelemente (= unzerlegbare Nicht-einheiten) sind genau die Restklassen q mod m , q gewöhnlicher Primteiler von m , bzw. die zu q mod m assoziierten Restklassen. Verf. beweist elementar im wesentlichen die folgenden beiden Sätze: (1) Dann und nur dann existiert ein $G(m) = 0$ derart, daß sich jedes $a \in R_m$ als Summe von (genau) $G(m)$ Primelementen darstellen läßt, wenn m mindestens zwei verschiedene Primteiler besitzt. Ist $g = G(m)$ minimal gewählt, so gilt: $g = 2$, wenn $m = 1(2)$; $g = 3$, wenn $m = 0(2)$ mindestens zwei ungerade Primteiler hat oder $m = 2p^2$ ($p \geq 3$ Primzahl) ist; $g = 4$, wenn $m = 2^\mu p^2$ ($\mu \geq 2$; $p \geq 3$ Primzahl). — (2) Jedes $a \in R_m$ ist dann und nur dann als Summe von höchstens drei Primelementen darstellbar, wenn m mindestens zwei verschiedene Primteiler besitzt; und als Summe von höchstens zwei Primelementen, wenn $n \equiv 1(2)$ wenigstens zwei verschiedene Primteiler hat oder $m = 2^\mu p$ ($\mu \geq 1$; $p \geq 3$ Primzahl) ist.

H. Ostmann.

Chevallier, J.-M.: Essai de systématisation des méthodes concernant les nombres premiers. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 23, 125—140 (1954).

The author considers pairs of numbers (a, b) and introduces addition and multiplication between systems of these pairs. The pairs with $b \neq 0$ are called integers and some of them prime numbers. He derives laws which resemble the Taylor series for $1/(1+x)$, e^x and $\log(1+x)$. The whole representation does not give rise to a closer inspection here.

W. Verdenius.

Cugiani, Marco: Sulle „catene“ di numeri primi consecutivi a differenza limitata. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 36, 121—132 (1954).

Es werden Sätze folgender Art über k -tupel aufeinanderfolgender Primzahlen bewiesen: (1) Sei ξ hinreichend groß und $c < f(\xi) < c^{-1} \log \xi$ für ein gewisses $c > 0$; dann existiert zu jedem $0 < \eta \leq 1$ ein $C > 0$ derart, daß $C f(\xi)$ aufeinanderfolgende Primzahlen $p_\lambda, p_{\lambda+1}, \dots$ mit $p_{\lambda+1-\eta} - p_{\lambda+\eta} = (\log \xi) f(\xi)$ im

Intervall $((1-\eta)\xi, \xi)$ liegen. — (2) Sei $r(\xi, \eta)$ die Anzahl der Sequenzen aufeinanderfolgender Primzahlen in $((1-\eta)\xi, \xi)$ mit $p_{i+1} - p_i \cdot \log p_i$; dann ist $r(\xi, \eta) \sim e^{\log \xi}$ mit einem solchen Θ , für das der Primzahlsatz in der Form $\Pi(x) = \text{Li } x + O(x/e^{\log \Theta x})$ gilt.

B. Hornfeck-H. Ostmann.

Sathe, L. G.: On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors. III. J. Indian math. Soc., n. Ser. 18, 27–42 (1954).

In diesem Teil der Arbeit wird der Induktionsbeweis zu Ende geführt (vgl. dies. Zbl. 50, 27; 51, 280).

E. Hlawka.

● Chowla, S. and W. E. Briggs: On the number of positive integers $\leq x$ all of whose prime factors are $\leq y$. Boulder (Colorado): University of Colorado 1954. 6 p. [hektographiert].

Let $f(x, y)$ denote the number of positive integers $\leq x$, all of whose prime factors are $\leq y$, and let $g(x, y)$ denote the number of positive integers $\leq x$, all of whose prime factors are $> y$. The authors give a simpler proof of two special cases of de Bruijn's estimation about $f(x, y)$ and $g(x, y)$, namely

$$f(x, (\log x)^h) = O(x^{1-1/h-\varepsilon}), \quad g(x, (\log x)^h) = x \prod_{p \leq (\log x)^h} (1-p^{-1}) + O(x^{1-1/h+2/h^2+\varepsilon}),$$

where ε is an arbitrarily small positive number, p denotes primes and $h \geq 2$.

L. K. Hua.

Bateman, P. T. and S. Chowla: The equivalence of two conjectures in the theory of numbers. J. Indian math. Soc., n. Ser. 17, 177–181 (1954).

$q(n)$ ist Anzahl der versch. Primfaktoren von n . $\lambda(n) = (-)^{e_n}$. Es wird die Äquivalenz der Vermutung $\sum_1^n \lambda(r) r^{-1} = 0$ mit der Vermutung $\sum_1^n \chi(r) \cdot r^{-1} > 0$

(für einen beliebigen reellen Residuencharakter χ) gezeigt. Genauer: gilt das erste für alle $n \leq N$, so folgt das zweite für $n \leq N$ und alle χ . Und umgekehrt. Wegen

$\int_1^\infty x^{-\sigma} \sum_{r \leq x} \lambda(r) r^{-1} dx = \zeta(2s) (s)^{-1} \zeta(s-1)^{-1}$ ist der Zusammenhang mit der Riemannschen Vermutung gegeben.

G. Hoheisel.

● Vinogradov, I. M.: The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. Translated, revised and annotated by K. F. Roth and Anne Davenport. New York: Interscience Publishers Inc. 1954. X, 180 p. \$ 5,00.

Vinogradov's Originalmonographie wurde in dies. Zbl. 41, 370 besprochen. Hier liegt nicht eine bloße englische Übersetzung vor, sondern eine vorbildlich bearbeitete Wiedergabe. Einige der 11 Kapitel wurden stark verändert und ergänzt; insbesondere wurden die schwierigeren Beweise ausführlicher dargestellt. Jedem Kapitel wurde ein Anhang (Notes) beigegeben, in dem auf die Veränderungen und auf weitere Literatur hingewiesen wird.

H. L. Schmid.

Fine, N. J.: On the asymptotic distribution of certain sums. Proc. Amer. math. Soc. 5, 243–252 (1954).

Sia $((t)) = t - [t] - 1/2$, $f(t) = ((t - \beta))$, $0 \leq \beta < 1$, $\beta \neq 1/2$, e si consideri la somma $S_N(f; t) = N^{-1/2} \sum_{n=0}^{N-1} f(2^n t)$, ed il numero $\sigma = \sigma(\beta) > 0$, definito dalla

$$\text{relazione } \sigma^2(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{1}{2} - |\beta - \beta_n| \right)^2, \text{ dove } \beta_n \text{ indica la parte frazionaria}$$

di $2^n \beta$. In applicazione di un teorema di M. Kac l'A. dimostra che la misura dell'insieme dei punti t dell'intervallo $(0, 1)$ nei quali $S_N(f; t) > b$, approssima, quando

$N \rightarrow \infty$, l'integrale $\frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma} \int_{-\infty}^b e^{-u^2/2\sigma^2} du$, o, come dicesi, che la distribuzione delle

somme $S_N(f; t)$ è asintoticamente normale. L'A. studia inoltre la distribuzione asintotica di somme più generali.

G. Sansone.

Godwin, H. J.: On the inhomogeneous minima of certain convergent sequences of binary quadratic forms. *Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* **5**, 28—46 (1954).

Let $M(a, b)$ denote the infimum of the values taken by an indefinite binary quadratic form $f(x, y)$ for x and y congruent mod. 1 to given numbers a and b . The inhomogeneous minimum $M(f)$ of f is defined to be the supremum of $M(a, b)$ for all a, b . The value of $M(f)$ is known for many forms f , which have integral coefficients, but which have no rational factors. The author determines the values of $M(f)$ for the following forms:

$$(1) \quad f(x, y) = [x + (p_n/q_n) y] [x - \{p_n q_n - 1\} y], \quad n = 2, 3, \dots;$$

$$(2) \quad f(x, y) = [x + (p_n/q_n) y] [x - (p_n/q_n) y], \quad n = 1, 2, \dots;$$

where p_n/q_n is a convergent of the continued fraction for $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ in (1) and for $\sqrt{2}$ in (2). In the first case the form of the result depends on the residue of n modulo 3. The author states that he has also found $M(f)$, when f is of the form (1) where $p_n q_n$ is taken to be a convergent to $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$. C. A. Rogers.

Samet, P. A.: The product of non-homogeneous linear forms. I, II. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **50**, 372—379, 380—390 (1954).

A well-known theorem of Remak, conjectured by Minkowski, states that if L_1, L_2, L_3 are three real homogeneous linear forms in variables x, y, z of determinant $\Delta \neq 0$ then the minimum of $|L_1 L_2 L_3|$ for $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ is at most $|\Delta|^{1/8}$. Denote this minimum by $M(x_0, y_0, z_0)$. The author considers especially the case $L_i = x + \theta_i y + \theta_i^2 z$ where $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ are the roots of a cubic equation with integer coefficients $\theta^3 + A\theta^2 + B\theta + C = 0$, say. In the first part he considers the case $\theta^3 - 4\theta - 2 = 0$ and shows that $M(x_0, y_0, z_0) < 1.4$ except when $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1/2), (0, 1/2, 0), (0, 1/2, 1/2) \pmod{1}$ and then $M = 1.2, 1.4, 1.4$ respectively. This makes more precise a result of Clarke (this Zbl. **42**, 44). In the second part he considers $\theta^3 + a\theta^2 - 2\theta - a = 0$, where a is a sufficiently large integer and shows that (i) $M(x_0, y_0, z_0) \leq a^{1/8}$ if $a \equiv 2 \pmod{4}$ with equality if and only if $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1/2) \pmod{1}$ and (ii) $M(x_0, y_0, z_0) \leq a^{1/8}(1 - a^{-1})^{3/8}$ if $a \equiv 1 \pmod{2}$ with equality if and only if $(x_0, y_0, z_0) = \pm(a^{-1}, 0, (1 - a^{-1})/2) \pmod{1}$. The methods involve a considerable amount of calculation and follow closely the paradigm of E. S. Barnes and H. P. F. Swinnerton-Dyer (this Zbl. **46**, 276). J. W. S. Cassels.

Pötzl, Hans: Über Sternkörper im dreidimensionalen Raum. *Monaths. Math.* **58**, 91—102 (1954).

A generalisation of work of Mahler on 2-dimensional regions (this Zbl. **32**, 402) to 3-dimensional regions. The author is apparently unaware of Mahler's later work [*Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, **187**, 151—187 (1946) and *Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A* **49**, 331—343, 444—454, 524—532, 622—631 (1946)] in n -dimensions. He also analyses a 2-dimensional method of the reviewer (this Zbl. **30**, 346) and shows why it is unreasonable to expect it to generalize to 3-dimensions. J. W. S. Cassels.

Mönkemeyer, Rudolf: Über Fareynetze in n Dimensionen. *Math. Nachr.* **11**, 321—344 (1954).

This paper develops an algorithm related to Farey section for the space of n dimensions. Consider the set of points in n -dimensional space $\mathcal{C} = \{c_1 c_{n+1}, \dots, c_n c_{n+1}\}$, where c_1, \dots, c_{n+1} are integers without common factor and $1 \leq c_{n+1} \leq m$ for some given integer m (the order of the Farey net). The simplex determined by $n+1$ points $c_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}, c_{i,n+1})$ is called an H -simplex if both (i) $\det(c_{ij}) = \pm 1$ and (ii) the vertices are the only net-points in the (closed) simplex. It is shown that each of (i), (ii) can hold without the other, but that if (i) holds and $c_{i,n+1} + c_{j,n+1} = m$ for all i, j ($i \neq j$) then (ii) holds. The author now considers a process analogous to the interpolation of medians in a Farey section to give a section of higher order: the median of two points c_1, c_2 being $((c_{11} + c_{21}), (c_{12} + c_{22}), \dots, (c_{1n} + c_{2n}), (c_{1,n+1} + c_{2,n+1}))$. By taking the median of the two points of the simplex with smallest value of c_{n+1} together with one of those two points and the remaining $n-1$ points one splits the original simplex into two smaller simplices each of which satisfy (i) if the original one did. Hence if η is any point with irrational coefficients lying in the original simplex one may construct by taking medians an infinite decreasing sequence of simplices all containing η ; and it may be shown that infinitely many of them are H -simplices if the first is. Further the simplices converge to η in an obvious

sense. The proofs are somewhat complicated. With this machinery the author constructs a rather long proof of Hurwitz's $5^{1/2}$ -theorem for approximation to one irrational. From the 2-dimensional nets he shows that if y_1, y_2 are irrational there are infinitely many sets of integers a, b, c, d, e, f such that

$$|(y_1 - a/c)(y_2 - e/f) - (y_1 - d/f)(y_2 - b/c)| < 1/K_2 c^{2/3} f^{2/3}$$

where $K_2 = 3 \cdot 1780$. Whether this can be improved, the author does not know.

• Keller, Ott-Heinrich: *Geometrie der Zahlen*. (Enzyklopädie Math. Wiss. 2. völlig neubearb. Aufl. Band I. 2. Teil. Heft 11. Art. 27.) Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1954. 84 S. DM 8,80.

J. W. S. Cassels.

On less than a hundred pages, the author succeeds in giving a clear account of the development of the geometry of numbers and its applications up to the year 1951. In particular, the advances with regard to non-convex bodies are explained in detail. With its many references, the book should prove valuable to anyone working in the subject or just looking for information. — List of Contents: A: Basic Theorems on Convex Bodies in Lattices (Lattices: Minkowski's geometry; the two theorems of Minkowski; critical lattices, and densest packings). B: Star Bodies (Definitions, theorems, conjectures and problems. Special bodies. The theorem of Minkowski-Hlawka). C: Linear Forms (Minkowski's theorem on linear forms; the theorem of Minkowski-Hajós; Diophantine approximations). D: The Minima of Homogeneous Forms (Definite quadratic forms, and densest packings of spheres; higher minima; indefinite quadratic forms and minimal forms. Hermitean forms; binary cubics; sums of powers and products of linear forms). E. Inhomogeneous Forms (Products of linear polynomials; inhomogeneous binary and ternary quadratic forms). F: Definite Quadratic Forms (Reduction theories; the coefficient space; parallelo- tope and quadratic forms). G: Continued Fractions (Klein's polygons; the module figure representation of quadratic forms and continued fractions; Euclid's algorithm in quadratic fields; more-dimensional analogues to continued fractions; criteria for algebraic numbers). H: Algebraic Numbers (Discriminants and units; decomposable forms and ideals; Galois theory). I: Partitions and Lattice Figures.

K. Mahler.

Descombes, R.: *Étude diophantienne de certaines formes linéaires non homogènes*. Bull. Soc. math. France 82, 197—299 (1954).

This thesis contains a detailed study of three related problems on the approximation of irrational numbers ξ by rational ones. 1. $s \geq 2$ is a given integer; $c(\xi; s) = \limsup |q(\xi \xi - p)|^{-1}$ extended over all integers p, q with $s \nmid q$; $C(s)$ is the lower bound and $\Gamma(s)$ the smallest point of accumulation of $c(\xi; s)$ for all irrational ξ . Then $C(2) = \Gamma(2) = 2$, and $C(s) = \sqrt{s}$ if $s \geq 3$. Let further $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$ be the Fibonacci sequence and j the smallest positive integer such that $s u_j \leq u_k$, so that $j \geq 4$ if $s \geq 3$. Then $\Gamma(s) = 1 + (3/\sqrt{5})$ if j is even (i. e. for $s = 3, 4, 6, 7, 8, 9, \dots$). The value of $\Gamma(s)$ for odd j ($s = 5, 10, \dots$) has a more complicated value and tends to $1 + (3/\sqrt{5})$ as $s \rightarrow \infty$. The lower bound $C(s)$ of $c(\xi; s)$ is isolated for $s \geq 3$, but not for $s = 2$. For even j , $c(\xi; s)$ assumes no values, and for odd j it assumes an infinity of values, between $C(s)$ and $\Gamma(s)$. — 2. Next let $s \geq 2$, $(s, t) = 1$, $G(\xi; t/s) = \liminf_{p, q \neq 0} |q(\xi \xi - p - t/s)|$, and $G(t/s) = \sup_{\xi} G(\xi; t/s)$. Let further $(a, b, s) = 1$, $H(\xi; s, a, b) = \liminf_{p, q \neq 0} |r(\xi \xi - u)|$ extended over all u, v with $u = a, v = b \pmod{s}$, $r \neq 0$, and $H(s) = \sup_{\xi} H(\xi; s, a, b)$. Then $G(t/s)$ is independent of t , and $H(s)$ of a and b , and $H(s) = s^2 G(t/s)$. It

is found that $H(2) = 1$ and $H(s) = s(s-2)/4$ for even $s \geq 4$; these bounds are assumed by $H(\xi; s, a, b)$ for non-enumerable sets of irrationals ξ , and they are points of accumulation of $H(\xi; s, a, b)$. On the other hand, $H(s) = 3/\sqrt{5}$, $(43/\sqrt{5})(3/\sqrt{46})$, $(83/\sqrt{7})(2/\sqrt{114})$, $294/(5\sqrt{11})$, $(305/\sqrt{55})(4/\sqrt{434})$, for $s = 3, 5, 7, 9$, and 11, while $H(s) = (s^2 - 2s - 1)/4\sqrt{1 - 2/s}$ for odd $s \geq 13$. All these values are attained and isolated in the set of values of $H(\xi; s, a, b) = 3$. Let finally $K(\xi; s, a, b) = \liminf_{p, q \neq 0} |r(\xi \xi - u)|$ extended over all $u = a, v = b \pmod{s}$ with $v > 0$, with the same assumptions on ξ, s, a, b as before. $K(\xi; s, a, b)$ depends only on ξ and s ; put $K(s) = \sup_{\xi} K(\xi; s, a, b)$. Then $s^2/4 \leq K(s) \leq 2s^2/5$, and there are infinitely many s with

$K(s) \geq s^2/3$. In particular, for $s = 2, 3, \dots, 10$, $s^2 K(s) = 4, \sqrt{10}, 16/\sqrt{27}, 5\sqrt{26}/8, 12/\sqrt{29}, 23, 28/\sqrt{11130}, 979, 96/\sqrt{247}, 27/\sqrt{3853}, 10/\sqrt{11037}$. These bounds are attained, and they are isolated except for $s = 2$.

K. Mahler.

Günther, Alfred: *Über transzendente p-adische Zahlen. II. Zur Approximation transzendenter p-adischer Zahlen durch rationale*. J. reine angew. Math. 193, 1—10 (1954).

(Part I, this Zbl. 55, 45). Let p be a rational prime, and \mathfrak{p} a prime ideal in a finite algebraic field such that $\mathfrak{p}^e \mid p$, $e \geq 1$. Let further α and β be two \mathfrak{p} -adic numbers

satisfying $0 < |\alpha - 1|_p < p^{-1/(p-1)}$, $0 < |\beta - 1|_p < p^{-1/(p-1)}$; put $\eta = \log \alpha / \log \beta$. The following result is proved: If α is algebraic, and η is irrational algebraic, then, for every $\varepsilon > 0$, there exist at most finitely many pairs of rational integers q_1, q_2 for which $|\beta - q_1/q_2| < p^{-(1/\varepsilon)(\log q)^{2+\varepsilon}}$, $(q_1, q_2) = 1$, $q = \max(|q_1|, |q_2|)$. This slightly improves an earlier result ($2 + \varepsilon$ instead of $3 + \varepsilon$) by A. Gel'fond (this Zbl. 23, 104). The proof uses ideas similar to those of Gel'fond. *K. Mahler.*

Šidlovskij, A. B.: Über die Transzendenz und algebraische Unabhängigkeit der Werte von ganzen Funktionen gewisser Klassen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 697—700 (1954) [Russisch].

The author announces, without proof, a generalization of C. L. Siegel's classical theorem [Abh. Preuß. Akad. Wiss. Berlin, phys.-math. Kl. 1929. Nr. 1 (1930); this Zbl. 39, 44]: „Let the E -functions $f_1(z), \dots, f_m(z)$ satisfy a system of differential equations $y'_k = Q_{k0}(z) + \sum_{i=1}^m Q_{ki}(z) y_i$ ($k = 1, 2, \dots, m$), where the Q 's are rational functions with algebraic coefficients. Assume that for arbitrary $N = 1, 2, 3, \dots$ the system of products $f_1(z)^{k_1} \dots f_m(z)^{k_m}$ ($k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0, k_1 + \dots + k_m \leq N$) forms an „irreducible“ system of E -functions. If the algebraic number λ is distinct from 0 and the poles of the Q 's, then the values $f_1(\lambda), \dots, f_m(\lambda)$ are algebraically independent.“ Here the definition of the term „irreducible“, given in the text only for homogeneous differential equations, does not seem to be sufficiently general as it is applied to inhomogeneous equations. — The note ends with some applications, likewise without proof. *K. Mahler.*

Analysis.

● **Pólya G. und G. Szegő: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. 1. Band: Reihen, Integralrechnung, Funktionentheorie.** (Die Grundlagen der Mathematischen Wissenschaften. Band 19.) 2. unveränd. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1954. XVI, 338 S. DM 24,—; Ganzleinen DM 27,60.

● **Pólya, G. und G. Szegő: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. 2. Band: Funktionentheorie, Nullstellen, Polynome, Determinanten, Zahlentheorie.** (Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften. Band 20.) 2. unveränd. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1954. X, 407 S. DM 28,40; Ganzleinen DM 32,—.

● **Rothe, R.: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure.** Herausgeg. von W. Schmeidler. Teil V: Formelsammlung. (Teubners Mathematische Leitfäden, Band 43.) 3. verbess. Aufl. Stuttgart: Teubner Verlag 1954. 124 S. 74 Abb. DM 4,80.

● **Sansone, Giovanni: Lezioni di analisi matematica. Redatte per uso degli studenti.** Vol. II. 8. ed. Padova: Edizioni CEDAM 1954. XIII, 529 p., 184 fig. L. 3500,— (litografie).

● **Scorza Dragoni, Giuseppe: Elementi di analisi matematica. Parte I.** 2. ed. Padova: Edizioni CEDAM 1954. XXVII, 618 p. L. 4000,— (litografie).

● **Bononcini, Vittorio: Esercitazioni di calcolo infinitesimale. Ad uso degli studenti di matematica, fisica e ingegneria.** 5. ed. interamente rifatta. Padova: Edizioni CEDAM 1954. IX, 513 p., 113 fig. L. 2600,— (litografie).

Die 1950 erschienene 4. Auflage des Werkes wurde nochmals überarbeitet, ohne aber den Umfang des sorgfältig durchdachten Lehrgebäudes zu erweitern. Der Inhalt gliedert sich in Teil I: Differentialkalkül für zwei und mehr Veränderliche; Teil II: Integralrechnung der Funktionen einer und mehrerer Veränderlicher; Teil III: Differentialgleichungen; Teil IV: Geometrische Anwendungen.

W. Maier.

• Cooley, Hollis R.: First course in calculus. New York: John Wiley & Sons Inc. 1954. 643 p. \$ 6,—.

Mengenlehre:

• Bourbaki, N.: *Éléments de mathématique*. XVII. 1. part.: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre I: Théorie des ensembles. Chap. I: Description de la mathématique formelle. Chap. II: Théorie des ensembles. (Actualités scientifiques et industrielles No. 1212.) Paris: Hermann & Cie. 1954. 136 p.

Die „*Éléments de Mathématique*“, das Hauptwerk des Bourbaki-Kreises, bilden wohl die erste Durchführung der Programm, die ganze Mathematik allein aus der Mengenlehre aufzubauen. So ist denn auch das Buch I des ersten Teiles, der „*Structures fondamentales de l'Analyse*“, der allgemeinen Mengenlehre gewidmet, und als zeitlich erste Publikation ist vor nunmehr 16 Jahren das „*Fascicule de résultats*“ dieses Buches (dies. Zbl. 26, 389) herausgekommen. Zusammen mit drei kleinen mengentheoretischen Arbeiten (dies. Zbl. 34, 1; 37, 2; 45, 329) bildete diese Zusammenfassung eines überhaupt noch nicht erschienenen Buches bis heute die einzige Grundlage für das gesamte Unternehmen. — Hat nun die jetzt endlich begonnene Ausführung des Buches I — gewiß nicht zufällig — auch am längsten auf sich warten lassen, so jedenfalls ohne Schaden für die bisher erschienenen Teile des Gesamtwerkes: in der Tat erweist es sich als praktisch völlig gleichgültig, ob man sie vom Standpunkt der naiven Mengenlehre betrachtet, ob man ihnen irgendeines der formalisierten mengentheoretischen Systeme unterlegt. Anders ausgedrückt: der Bourbakische Aufbau der Mathematik aus der Mengenlehre ist praktisch unabhängig von der Wahl des zugrunde gelegten Systems der Mengenlehre. — Das gilt selbstverständlich auch für die hier vorgelegte „*Mengenlehre*“. Im Kap. I wird die Konstituierung einer deduktiven Theorie in den üblichen Schritten dargestellt, beginnend mit Zeichen, Zeichenreihen (assemblages) und induktiver Bestimmung der Terme und Ausdrücke (relations!). Dabei werden als aussagenlogische Funktoren nur Disjunktion und Negation benutzt, in der klammerartigen Schreibweise von Lukasiewicz. Die allen Theorien gemeinsamen prädikatenlogischen Grundlagen sollen sein: ein universeller Auswahloperator τ , sowie \square als Zeichen für eine Leerstelle; der Wirkungsbereich von τ wird durch waagerechte Klammern (liens) bezeichnet. So stellt bei-

spielsweise $\tau \in M$ das der Menge M ein für allemal zugeordnete Auswahllement von M dar. Durch diesen Ansatz wird das Auswahlprinzip in jede Theorie von vornherein eingebaut; eine explizite Formulierung des Auswahlaxioms erübrigt sich. Existenz- und Allopoperator werden in bekannter Weise mit Hilfe des Auswahloperators τ definiert. Man beachte aber, daß die hier behandelten Theorien in Wahrheit — durch Benutzung des Leerstellensymbols \square — ohne geordnete Variable auskommen; wo solche auftreten, dienen sie nur zur vereinfachten Darstellung komplizierter Zeichenreihen und lassen sich ohne weiteres eliminieren. Damit entfallen auch alle die gebundenen Variablen betreffenden Regeln des Schließens, bzw. solche Regeln sind metamathematisch beweisbar. Jede spezielle Theorie verfügt außerdem über ihr eigentümliche spezielle Zeichen (signes spécifiques), z. B. die in Kap. II beschriebene Mengenlehre über die Zeichen „signes relationnels“ von der Stellenzahl (poids) 2 \leq und $=$, sowie über das zweistellige „signe substantifique“ (zur Bezeichnung des geordneten Paares). Die letzte Gruppe von Zeichen sind die „Buchstaben“. — Im zweiten Schritt findet wie üblich die induktive Bestimmung der ableitbaren Sätze statt. Dazu werden gewisse Ausdrücke in den Rang von Axiomen (axiomes explicites) erhoben; diese enthalten keine freien Variablen, denn die in ihnen vorkommenden Buchstaben sind per definitionem „Konstante“ (wenn man will, signes substantifiques vom Gewicht 0). (In einer Formalisierung der Gruppentheorie würde etwa eine Konstante e auftreten; in der Mengenlehre des Kap. II hingegen ist eine Theorie ohne Konstante.) Zur Erklärung der Abzählbarkeit gehören weiter „ein oder mehrere Regeln, genannt Schemata“; das sind unsere Axiomenschemata, und jeder unter ein solches Schema fallende Ausdruck (er darf neben den Konstanten offenbar auch noch andere „Buchstaben“ enthalten) wird ein „axiome implicite“ genannt. Solche Schemata sind beispielsweise für die „théories logiques“ die Axiome des klassischen Aussagenkalküls; in „théories quantifiées“ kommt das Schema der hinteren Partikularisierung hinzu, in „théories égalitaires“ schließlich das Schema der Leibnizschen Einsetzung sowie eines, das die Extensionalität des Auswahloperators τ sichert (äquivalenten Aussagenfunktionen entspricht das gleiche Auswahllement). Solche „Regeln“ sind natürlich nicht zu verwechseln mit denen, die wir Regeln des Schließens nennen; einzige derartige Regel ist hier zunächst nur die der Abtrennung. Die Einsetzungsregeln sind metamathematisch beweisbar; sie beruhen wesentlich auf einer entsprechenden, den Axiomenschemata auferlegten Bedingung. — Un théorème est une relation figurant dans une démonstration. Cette notion est donc essentiellement relative à l'état de la théorie considérée, au moment où on la décrit; une relation d'une théorie devient un théorème lorsqu'on a réussi à l'insérer dans une démonstration. Dire qu'une relation n'est pas un théorème“ ne peut avoir de sens si on ne précise pas le stage du développement auquel on se réfère. Au lieu de „théorème“ on dit aussi „relation vraie“. Une relation est dite

fausse si sa négation est un théorème. On se gardera de la confusion qui consisterait à croire que, lorsqu'on a prouvé qu'une relation est fausse, on a par là même établi que cette relation „n'est pas vraie“ (cette dernière phrase n'ayant à proprement parler aucun sens précis en Mathématique). Mit diesen und ähnlichen Sätzen bezieht Bourbaki für die Metamathematik ganz unmißverständlich die intuitionistische Position (sehr zum Unterschied von der von ihm formalisierten „Mengenlehre“); überdies kennt er — mangels einer inhaltlichen Deutung seines formalen Systems — keinen semantischen Wahrheits- oder Allgemeingültigkeitsbegriff. — Die formalisierte Mengenlehre des Kap. II bedient sich der Elementbeziehung, der Identität und des geordneten Paares als undefinierter Grundbegriffe; nicht werden, wie ohne weiteres möglich, die beiden letzten auf den ersten zurückgeführt. Zu den Schemata einer „théorie égalitaire“ kommt hier ein kompliziertes Schema der Mengenbildung hinzu, das als eine Kombination aus dem Zermeloschen Aussonderungs- und dem Fraenkelschen Ersetzbarkeitsaxiom angesprochen werden kann. Die „expliziten“ Axiome der Mengenlehre, fünf an der Zahl, sind: das Extensionalitätsaxiom, das Axiom der Paarmenge, das der Potenzmenge, das Unendlichkeitsaxiom, sowie das Axiom des geordneten Paares (die grundlegende Beziehung zwischen geordnetem Paar und Identität). Im nun folgenden Aufbau der elementaren Mengenlehre wird auf die formale Darstellung mehr und mehr verzichtet; man bedient sich üblicher Wendungen der Umgangssprache, nicht ohne diese vorher mit gewissen formalen Ausdrücken in Zusammenhang gebracht und versichert zu haben, daß eine vollständige Formalisierung jederzeit möglich sei. Außer in die Mengenalgebra wird man hier in die Theorie der binären Relationen eingeführt; die binären Relationen werden hier, zur Unterscheidung von den intensionalen „relations“ des Textes, also den Ausdrücken, extensional als Mengen von geordneten Paaren definiert und als „Graphen“ bezeichnet. Die Theorie der Äquivalenzrelationen wird aber rein intensional aufgezogen, als Theorie gewisser Aussagenfunktionen in zwei freien Variablen. Von den „Graphen“ werden unterschieden die „Korrespondenzen“: ist R ein „Graph“, $R \subseteq A \times B$, so heißt das geordnete Tripel (R, A, B) eine „Korrespondenz“; Spezialfall einer solchen ist die „Funktion“. Die übliche Algebra der binären Relationen wird hier nicht für „Graphen“, sondern für „Korrespondenzen“ aufgezogen. Ref. erscheint es fraglich, ob sich die „working mathematicians“ (siehe den Titel von Bourbakis Note, dies. Zbl. 34, 1) diesem ungewöhnlichen und vielleicht doch nicht so praktischen Vorgehen anschließen werden. Eine andere Stelle, wo die Zweckmäßigkeit bezweifelt werden muß, ist die Definition der Summe einer Mengenfamilie (X_i) : unter allen Mengen, deren Mächtigkeit gleich der Summe der Mächtigkeiten der X_i ist (und in einem Satz wird die Existenz solcher Mengen festgestellt) wird die durch den universellen Auswahloperator τ bestimmte ausgezeichnet. Nach diesem ungewöhnlichen Muster würde man schlechterdings nicht nur alle Kardinalzahlen definieren können, sondern alle axiomatisch nur bis auf Isomorphie festgelegten mathematischen Gebilde, wie Quotientenkörper, Polynomringe, bikompakte Hüllen usw. Dabei ist es doch die von Bourbaki sonst geübte Methode, sich nach Möglichkeit kanonischer Konstruktionen zur exakten Definition solcher Gebilde zu bedienen, und die von Whitehead-Russell erfundene einfache kanonische Konstruktion der Summe einer Mengenfamilie wird ja hier in dem erwähnten Existenzbeweis auch tatsächlich benutzt.

Jürgen Schmidt.

Balachandran, V. K.: A characterization of $\Sigma\Delta$ -rings of subsets. *Fundamenta Math.* 41, 38—41 (1954).

Verf. beweist eine fast gleichzeitig von Raney [Proc. Amer. math. Soc. 3, 677—680 (1952)] angegebene verbandstheoretische Charakterisierung solcher Mengensysteme, die gegenüber beliebiger Vereinigungs- und Durchschnittsbildung abgeschlossen sind, und damit der diskreten Topologien im Sinne von Alexandroff-Hopf (dies. Zbl. 13, 79). Durch ein Zusatzaxiom (schwache Form der Komplementarität) gelangt er zur vollen Potenzmenge, d. h. zur vollständigen atomistischen Booleschen Algebra.

Jürgen Schmidt.

Ginsburg, Seymour: On the λ -dimension and the A -dimension of partially ordered sets. *Amer. J. Math.* 76, 590—598 (1954).

The paper is connected with a Komm's paper (this Zbl. 37, 319) and an author's paper [Trans. Amer. math. Soc. 74, 514—535 (1953)]. The λ -dimension of $P'(E_n)$ resp. $P(E_n)$ is \aleph_0 resp. $c(2 : n - \omega)$ (for $n < \omega$, cf. Komm, Cor. 5, 21 resp. Th. 5, 3). A correction of Komm's Th. 6.1 is given. An example of an ordered set P is given whose λ -dimension is 2, while the A -dimension of P equal infinite. Terminology: A linear set E has the A -property, if no disjoint subsets of E , of power c each, are similar. The A -dimension of an ordered set S is the minimum number of total order extensions of S each of which is similar with a linear set possessing the A -property, the partial order of S being represented by means of these total extensions of S . E_n is the set of all the n -sequences of real numbers; $P(E_n)$, $P'(E_n)$ are respectively

the orderings of E_n so that for its elements the relation $\{x_i\}_{i=1}^n \prec \{y_i\}_{i=1}^n$ means that $x_i < y_i$ for all the $i < n$ and for at least one $i < n$, respectively.

G. Kurepa.

Shepherdson, J. C.: On two problems of Kurepa. *Pacific J. Math.* **4**, 301—304 (1954).

Answering two Reviewer's questions [cf. the reviews in this Zbl. **46**, 52 and in *Math. Rev.* **14**, 255 (1953) by Shepherdson and Gustin respectively] the author proves independently from Gustin the existence of a ramified set F so that 1. no maximal antichain of F meets each maximal chain of F . 2. no maximal chain of F meets each maximal antichain of F . In particular, such a set F is the set of all finite sequences of integers ordered so that $(a_1, \dots, a_m) \leq (b_1, \dots, b_n)$ means $m \leq n$, $a_i = b_i$ ($i \leq m-1$), $a_m \leq b_n$ (as to the second question cf. also the sets σ_0 , p. 95. *σ*, p. 102 in Reviewer's Thèse, this Zbl. **14**, 394).

G. Kurepa.

Kurepa, Georges: Une généralisation des matrices. *C. r. Acad. Sci., Paris* **239**, 19—20 (1954).

Verallgemeinerte Matrix vom Typus $(A, B) =$ ein- oder mehrdeutige Abbildung der Menge $A \times B$: A und B werden evtl. irgendwie strukturiert gedacht. „L'égalité de matrices, leurs somme et produit se définissent comme d'habitude toutes les fois qu'il est possible... On conçoit ainsi qu'il n'y a rien de surprenant à ce qu'on ait remarqué des analogies entre la théorie des matrices et celle des équations intégrales (ou des opérateurs linéaires)“. — Darstellung von Permutationen durch „dyadische“ Matrizen (die nur die Werte 0 und 1 annehmen). Jürgen Schmidt.

Hönig, Chaim Samuel: Proof of the well-ordering of cardinal numbers. *Proc. Amer. math. Soc.* **5**, 312 (1954).

Verf. beweist die Wohlordenbarkeit der Klasse der Mächtigkeiten, und damit auch die Vergleichbarkeit zweier Mächtigkeiten ohne Benützung der Ordinalzahltheorie. Seien A_i ($i \in I$) Teilmengen einer Menge E . $A = \prod_{i \in I} A_i$ und \mathfrak{B} eine Klasse von Teilmengen B von A derart, daß, wenn die geordneten verschiedenen I -tupel (x_i) und (y_i) Elemente von einem B sind, dann $x_i \neq y_i$ für alle $i \in I$ gilt. Mit Hilfe des Zornschen Lemmas (oder leichter mit Teichmüllers Prinzip) ergibt sich, daß \mathfrak{B} ein maximales Element \bar{B} (bezüglich der Teilmengenbeziehung) hat. Mit Hilfe des Auswahlaxioms folgt dann, daß für mindestens ein $i \in I$ $\text{pr}_i(\bar{B}) = A_i$ ist; $\text{pr}_i(\bar{B})$ sind die Elemente in der Spalte i der Matrix \bar{B} (Schreibweise von Bourbaki). Es ist dann leicht, für jedes $i \in I$ eine ein-eindeutige Abbildung von A_i in A_i anzugeben.

G. H. Müller.

Popruzenko, J.: Sur le phénomène de convergence de M. Sierpiński. *Fundamenta Math.* **41**, 29—37 (1954).

Le travail se rattache au résultat de Sierpiński (ce Zbl. **9**, 302, en particulier p. 52 du livre) d'après lequel l'hypothèse H du continu entraîne la proposition C_0 (phénomène de convergence de Sierpiński) que voici: Il existe une suite infinie f_n d'une variable réelle qui converge non uniformément sur chaque ensemble non dénombrable de nombres réels. E, f_n étant respectivement un ensemble et une ω -suite de fonctions convergente en E , l'A. dit que la suite f_n converge σ -uniformément dans E si E est l'union d'une ω -suite d'ensembles dans chacun desquels la suite f_n converge uniformément. L'A. considère l'analogue (P) de C_0 : Il existe dans un E une suite convergente f_n qui n'est σ -uniformément convergente dans aucun sous-ensemble E_1 de E vérifiant $E_1 = E$; 2° chaque ω -suite convergente dans E est σ -uniformément convergente dans chaque $E_2 \subset E$ tel que $E_2 \subsetneq E$. Il existe un et un seul cardinal m tel que (P) subsiste pour chaque E vérifiant $E = m$; m est régulier et $\aleph_1 \leq m \leq 2^{\aleph_1}$ (Th. 1). m coïncide avec le cardinal \aleph_η de Rothberger (ce Zbl. **21**, 112). Le cardinal \aleph_η jouit d'une certaine propriété liée à la notion d'une famille dénombrable d'ensembles, absolument incommensurables dans un certain sens (Th. 2). L'A. prouve que le phénomène de Sierpiński est intimement lié à l'existence d'une lacune du type (ω_1, ω^*) dans l'ensemble finalement ordonné des ω -suites d'entiers.

G. Kurepa.

Popruženko, J.: Sur une décomposition des ensembles indénombrables. I. *Fundamenta Math.* **41**, 146—149 (1954).

$K(m)$: E étant un ensemble de puissance m , il existe une ω -suite de partitions disjointes $p^i = \{E_{m_j}^i\}$ ($m < \omega$) de E telle que, quelle que soit la ω -suite $\{m_i\}$ d'entiers naturels, l'intersection $\bigcap_i (E_1^1 \cup E_2^2 \cup \dots \cup E_{m_i}^i)$ est $\leq \aleph_0$. D'après

Banach-Kuratowski [*Fundamenta Math.* **14**, 127—131 (1929)]; aussi Sierpiński. *ce Zbl.* **9**, 302, proposition C_{11}] on a $H = K(2^{\aleph_0})$. L'A. prouve ce Th.: Pour qu'il existe un cardinal $> \aleph_0$ vérifiant $K(m)$, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble linéaire E de puissance \aleph_1 vérifiant λ sans vérifier λ' . Les considérations de la Note se rattachent à l'article précédent. Rappelons que $X \in \lambda'$ [resp. $X \in \lambda$] veut dire que pour chaque ensemble dénombrable D [et vérifiant $D \subseteq X$] l'ensemble $X \cup D \in \lambda$ [resp. D est un G_δ relatif].

G. Kurepa.

Büchi, J. R.: On the existence of totally heterogeneous spaces. *Fundamenta Math.* **41**, 97—102 (1954).

Un ensemble M de nombres réels ayant la puissance du continu c est dit absolument hétérogène (AH) (totally heterogeneous) si, quelle que soit l'application borélienne f d'une partie de M dans M , l'ensemble des valeurs de $f(x) = x$ est de puissance inférieure à c . — 1. Par un procédé analogue aux bases de Hamel, l'A. obtient les résultats suivants. Si l'hypothèse du continu est vraie, 1° il existe un AH de puissance c ; et par suite une c -infinité d'AH, puisque toute partie d'un AH qui a la puissance c est encore un AH; 2° il existe un AH dans tout borélien non dénombrable; 3° il existe des AH de mesure nulle et de première catégorie; 4° il existe un AH, soit M , tel que, pour tout E mesurable, $\overline{m}(M \wedge E) = m(E)$; un tel AH est de seconde catégorie. — 2. Abandonnant l'hypothèse du continu, l'A. recherche ce qui subsiste de ces résultats. En particulier, un AH ne peut pas être borélien, est toujours de mesure intérieure nulle, et dans tout ensemble de mesure extérieure positive, il en existe un. — 3. Combinant les résultats précédents avec des théorèmes de Kuratowski (1947), Sierpiński et Tarski (1928), l'A. obtient différentes propriétés des ensembles de valeurs des fonctions boréliennes, qui généralisent des résultats de Kuratowski (1926), Sierpiński (1950). — 4. Appliquant un théorème de Sikorski (1949), l'A. démontre l'existence d'algèbres booléennes qu'il nomme „hétérogènes“, en liaison avec une construction de Jónsson (1951).

R. de Possel.

Mycielski, J.: On a problem of Sierpiński concerning congruent sets of points. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* **2**, 125—126 (1954).

The author announces the following propositions: The sphere contains a set E of power \aleph_0 [resp. $2^{\aleph_0} = c$] so that $E \sim E - F$ for each subset $F \subset E$ satisfying $|F| < \aleph_0$ [resp. $|F| \leq \aleph_0$]. (Th. 1 [resp. Th. 2].) Lemma: „A free group G with a set M of generators of power c contains a set S of power c such that for each finite or countable set $Q \subset S$ there exists a generator $q_Q \in M$ satisfying the condition $q_Q S = S - Q$ [here $q_Q S = \{q_Q x \mid x \in S\}$]. The theorems 1, 2 give an affirmative answer to the Sierpiński's problem (this *Zbl.* **39**, 280) concerning the existence of a set E in R^3 so that $E \sim E - \{p\}$ ($p \in E$). The corresponding problem for the plane R^2 remains still open.

G. Kurepa.

Sierpiński, W.: Sur une relation entre deux substitutions linéaires. *Fundamenta Math.* **41**, 1—5 (1954).

Un certain analogue du paradoxe (phénomène) bien connu de Banach-Tarski [*Fundamenta Math.* **6**, 244—277 (1924)] subsiste pour la droite et est dû, d'après J. von Neumann [*Fundamenta Math.* **13**, 73—116 (1929)] à l'existence de deux substitutions linéaires $y_1(x)$, $y_2(x)$ telles que la relation (1) $y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_1^{k_{2n-1}} y_2^{k_{2n}} = 1$ (n, k entiers) admet (pour n donné) la solution unique $k_1 = \dots = k_{2n} = 0$. L'A. prouve que, par contre, pour des substitutions linéaires entières l'égalité (1) admet pour chaque y_1 et chaque y_2 de solutions non-triviales; par exemple, si l'on y remplace la suite $k_1 k_2 \dots k_{2n}$ par l'une de ces trois suites a) 1, 2, -1, -1, 1, -1, -1, 2, 1, -1, -1, 1, 2 b) 0, 1, -1, -1, -2, 2, 2, -1, -2, -1, 2, 2, -2, -1, 1 l'égalité (1) est vérifiée pour chaque couple $y_1(x) = a_1 x + b_1$, $y_2 = a_2 x + b_2$ ($a_1 \neq 0 \neq a_2$) (Th. 1). Le nombre 12 de facteurs n'y peut pas être effectivement baissé (Th. 2). Comme conséquence du Th. 1 l'A. corrige

in passage d'une Note précédente [ce Zbl. 39, 280; les nombres 4) p. 2 du papier ne sont pas nécessairement $\neq 1$].
G. Kurepa.

Šnejder, A. A.: Über Mengen, die eine Verallgemeinerung der H -Mengen sind. Mat. Sbornik, n. Ser. 34 (76), 249–258 (1954) [Russisch].

En étudiant le problème de l'unicité des séries trigonométriques on a introduit les H -ensembles [A. Rajchman, Fundamenta Math. 3, 287–302 (1922), N. Bari, Fundamenta Math. 1, 62–115 (1927); cf. ce Zbl. 33, 56]. Un ensemble linéaire borné E est dit un H -ensemble, s'il existe les nombres $d, \alpha_k, \beta_k, n_k$ ($k = 1, 2, \dots$) tels que: a) $0 < d < 1$, $\alpha_k - \alpha_k = d$, b) n_k sont les nombres naturels c) E ne contient aucun point des intervalles $((\alpha_k + i), n_k, (\beta_k + i)/n_k)$ n entier, k entier > 0 . L'A. introduit les H^* -ensembles en remplaçant dans la condition b) le mot „naturels“ par „réels“ et démontre ceci: La classe des H^* -ensembles est effectivement plus large que celle des H -ensembles (§ 1). Chaque H^* -ensemble est l'union d'un nombre fini de H -ensembles séparables par d'intervalles disjoints (une famille F d'ensembles est séparable par ensembles d'une famille G si G contient une famille d'ensembles disjoints dont chacun contient un élément de F) (§ 2). L'union de deux H -ensembles séparables par d'intervalles peut ne pas être du type H^* (§ 3). La classe des H^* -ensembles se compose précisément des ensembles θX θ nombre > 0 , X étant du type H) (§ 4). Chaque H^* -ensemble E est un ensemble d'unicité pour séries trigonométriques: La convergence vers 0 d'une série trigonométrique en dehors de E n'est possible que si les coefficients de la série sont 0.
G. Kurepa.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

• Denjoy, Arnaud: Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse. Paris: Gauthier-Villars 1954. VI, 380 p. fr. 2700.—

Ce volume réunit les quatre parties du mémoire fondamental de M. Denjoy „Sur la dérivation et son calcul inverse“ dont les dimensions avaient imposé le découpage en quatre articles [J. Math. pur. appl. VII. Sér. 1, 105–240 (1915); Bull. Soc. math. France 43, 161–248 (1915); Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. 33, 127–222 (1916), 34, 181–236 (1917)]. L'importance des résultats obtenus, la profondeur des méthodes utilisées, la lumineuse clarté de la rédaction justifient pleinement le but de cette réédition: fournir à l'étudiant un instrument commode et puissant d'initiation à la théorie des fonctions de variables réelles et par là à l'Analyse et à la Topologie générales. Rappelons que le résultat essentiel du premier mémoire, le théorème de Denjoy sur les seuls quatre cas possibles sur un ensemble de mesure non nulle pour les nombres dérivés extrêmes d'une fonction continue sur un segment, est le premier succès d'une méthode qui devait en procurer beaucoup d'autres à son auteur et dont le trait essentiel est de féconder l'application de théorèmes relatifs à la mesure par une étude topologique préalable des ensembles à étudier, le pivot entre théorie métrique et théorie topologique étant l'étude approfondie des ensembles parfaits. Rappelons aussi que c'est dans ce premier mémoire qu'apparaît pour la première fois le théorème topologique fondamental, généralisé depuis par M. Denjoy (ce Zbl. 36, 319; 41, 386; pp. 174 et 597) et par M. Choquet (ce Zbl. 31, 281) qui a montré qu'on pouvait l'énoncer, dans les circonstances où il est valable, par l'identité sur un résiduel des contingents et paratrigents généralisés de tout sous-ensemble d'un espace métrique. Le second mémoire traite des fonctions approximativement continues et de leur lien avec les fonctions dérivées, puis préparant la voie aux mémoires suivants fait le point de la question suivante: „Dans quelle mesure, les intégrales de Riemann et de Lebesgue permettent-elles de résoudre le problème de la recherche des primitives?“. Le dernier mémoire est l'exposé de la célèbre théorie de la totalisation, précédée de la très fine étude de la variation des fonctions continues sur laquelle elle est fondée.
A. Ruzs.

Haupt, Otto und Christian Y. Pauc: Über die durch allgemeine Ableitungsbasen bestimmten Topologien. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 36, 247–271 (1954).

Allgemeine Ableitungsbasis auf D bezüglich eines σ -endlichen, vollständigen Maßes μ : heißt eine Gesamtheit α von gerichteten Systemen g , wenn gilt: (I) die Elemente eines jeden g sind μ -meßbare Mengen positiven endlichen Maßes. (II) Jedem Punkt x von D ist eine nicht leere Teilmenge $\alpha(x)$ von α zugeordnet, wobei jedes g von α mindestens einem $\alpha(x)$ angehört. (III) Ist $g = \alpha(x)$ und g' konfinal zu g , so ist auch $g' = \alpha(x)$. Eine Teilmenge u der Menge aller Elemente aller $g \in \alpha$ heißt eine α -feine Überdeckung von $R \cap D$, wenn für μ -fast jedes $x \in R$ in $\alpha(x)$ ein g enthalten ist, dessen sämtliche Elemente zu u gehören. α ist eine schwache Vitali-Basis, wenn es zu jedem $M \subseteq D \pmod{\mu}$ (d. h. bis auf eine μ -Nullmenge) endlichen äußeren Maßes, zu jeder α -feinen Überdeckung u von M und jedem $\varepsilon > 0$ eine abzählbare Teilmenge $u' = \{X_1, X_2, \dots\}$ von u gibt, so daß $M \subseteq \bigcup_{\nu} X_{\nu} \pmod{\mu}$ und $\sum_{\nu} \mu(X_{\nu}) < \mu(M) + \varepsilon$. Mittels α

wird die untere, obere, innere, äußere α -Dichte einer Menge in einem Punkte p erklärt und damit der Begriff des inneren α -Konzentrationspunktes einer Menge; daran knüpfen sich die Begriffe

der α -Umgebung und schließlich der α -Topologie, welche die Besonderheit hat, daß die Bildung der abgeschlossenen Hülle im allgemeinen nicht idempotent ist. Die Verf. legen eine eingehende Studie der α -Topologien vor. Dabei kommt auch der Satz von der Differenzierbarkeit des μ -Integrals bei α -Stetigkeit des Integranden und das Problem der Erweiterung von Ableitungsbasen zur Sprache. Die Herstellung der α -offenen Mengen durch Iteration der Operators I , der Bildung der Menge der inneren α -Konzentrationspunkte, wird untersucht. Die schwachen Vitali-Basen werden durch verschiedene Aussagen charakterisiert, z. B. die μ -meßbaren Mengen (mod n) sind mit den α -Borelschen Mengen identisch, oder jede μ -meßbare Funktion ist approximativ stetig bezüglich α . Durch Beispiele wird gezeigt, daß $I^2 = I$ allein eine Ableitungsbasis nicht als eine schwache Vitali-Basis kennzeichnet, ferner daß bei geeigneter Wahl von α bei der Herstellung der α -offenen Mengen die Iteration von I bis zu einer beliebig vorgegebenen Ordnungszahl α der ersten oder zweiten Cantorsche Zahlenklasse notwendig ist. G. Aumann.

Hadwiger, H. und W. Nef: Zur axiomatischen Theorie der invarianten Integration in abstrakten Räumen. Math. Z. 60, 305—319 (1954).

Es sei Γ eine Gruppe von Transformationen auf der Menge \mathfrak{M} : für $\alpha \in \Gamma$, $x \in \mathfrak{M}$ bedeute αx das Bildelement von x bezüglich α . Ist $F(x)$ eine auf \mathfrak{M} erklärte reelle Funktion, so bezeichnen wir mit $F^\alpha(x)$ die Funktion $F(\alpha x)$. Eine nichtnegative, nicht identisch verschwindende Funktion $E(x)$ soll als Einheitsfunktion festgelegt werden. \mathfrak{B} bedeute die Klasse aller reellen Funktionen $F(x)$, die einer Ungleichung $|F| \leq \sum_1^n p_k E^{\alpha_k}$ (p_k reell, $\alpha_k \in \Gamma$) genügen. Eine Klasse $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}$ heiße Integralfeld, wenn I. aus $F \in \mathfrak{F}$, $\alpha \in \Gamma$ immer $F^\alpha \in \mathfrak{F}$ folgt, II. aus $F, G \in \mathfrak{F}$ und a, b reell immer $aF + bG \in \mathfrak{F}$ folgt, III. $E \in \mathfrak{F}$ gilt. Das auf einem Integralfeld \mathfrak{F} definierte reelle Funktional $J(F)$ heiße Integral, wenn I. aus $F \in \mathfrak{F}$, $\alpha \in \Gamma$ immer $J(F) = J(F^\alpha)$ folgt, II. aus $F, G \in \mathfrak{F}$ und a, b reell immer $J(aF + bG) = aJ(F) + bJ(G)$ folgt, III. $J(E) = 1$ ist, IV. aus $F \in \mathfrak{F}$, $F \geq 0$ immer $J(F) \geq 0$ folgt. Durch Zusammenfassung eines Integralfeldes \mathfrak{F} und eines darauf erklärten Integrals J entsteht ein Integrationssystem (\mathfrak{F}, J) . Dann und nur dann existiert ein Integrationssystem, wenn (*) aus $\sum_1^n p_k E^{\alpha_k} \geq 0$ (p_k reell, $\alpha_k \in \Gamma$)

immer $\sum_1^n p_k \geq 0$ folgt. Ist die Bedingung (*) erfüllt, so entsteht durch Zusammenfassung des

Integralfeldes \mathfrak{E} aller Funktionen der Form $F = \sum_1^n p_k E^{\alpha_k}$ (p_k reell, $\alpha_k \in \Gamma$) und des auf \mathfrak{E} de-

finierten Integrals $I(F) = \sum_1^n p_k$ ein Integrationssystem. Für jedes Integrationssystem (\mathfrak{F}, J) gilt dann $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}$ und $J(F) = I(F)$ für $F \in \mathfrak{E}$. Für $F \in \mathfrak{B}$ wird ein absolutes Oberintegral $\bar{T}(F)$ und ein absolutes Unterintegral $\underline{T}(F)$ definiert, so daß für ein beliebiges Integrationssystem (\mathfrak{F}, J) aus $F \in \mathfrak{F}$ immer $\underline{T}(F) \leq J(F) \leq \bar{T}(F)$ folgt. Die Funktionen $F \in \mathfrak{B}$ mit $\underline{T}(F) = \bar{T}(F)$ bilden ein Integralfeld \mathfrak{I} , und für $F \in \mathfrak{I}$ wird durch $T(F) = \underline{T}(F) = \bar{T}(F)$ ein Integral definiert; (\mathfrak{I}, T) ist das absolute Integrationssystem. Die Existenz von Integrationssystemen wird in einigen Spezialfällen eingehender untersucht: u. a. wird es bewiesen, daß die Bedingung (*) immer erfüllt ist, wenn Γ abelsch und $E(x)$ beschränkt sind. Á. Császár.

Nef, Walter: Zerlegungsäquivalenz von Funktionen und invariante Integration. Commentarii math. Helvet. 28, 162—172 (1954).

Erklärungen von \mathfrak{M} , Γ , E , F^α , Integralfeld, Integral, Integrationssystem, \mathfrak{E} s. im vorigen Referat. \mathfrak{M} sei ein Integralfeld. $F \in \mathfrak{M}$ und $G \in \mathfrak{M}$ heißen bezüglich \mathfrak{M} zerlegungsgleich (vgl. A. Kirsch, dies. Zbl. 47, 292): $F \approx G$ (\mathfrak{M}), wenn zwei endliche Zerlegungen $F = \sum_1^n F_k$, $G = \sum_1^n G_k$ ($F_k \in \mathfrak{M}$, $\alpha_k \in \Gamma$) existieren. Man setze für $F, G \in \mathfrak{M}$ $F \gtrsim G$ (\mathfrak{M}), wenn $F', G' \in \mathfrak{M}$ existieren mit $F \approx F' \supset G' \approx G$ (\mathfrak{M}), $F \in \mathfrak{M}$ und $G \in \mathfrak{M}$ heißen zerlegungsäquivalent bezüglich \mathfrak{M} : $F \sim G$ (\mathfrak{M}), wenn $F \gtrsim G$ (\mathfrak{M}) und $G \gtrsim F$ (\mathfrak{M}) ist. Folgender Satz wird durch Anwendung von Ergebnissen der erwähnten Arbeit von Kirsch bewiesen: Dann und nur dann existiert ein Integral auf \mathfrak{M} , wenn die Relation $E \sim 0$ (\mathfrak{M}) nicht gilt. Daraus ergibt sich, daß ein Integrationssystem dann und nur dann existiert, wenn die Relation $E \sim 0$ (\mathfrak{E}) nicht gilt. Die Äquivalenz dieser Bedingung mit (*) (s. das vorige Referat) wird direkt erwiesen. Ein Nachtrag beschäftigt sich mit der Relation des Begriffs der Zerlegungsäquivalenz mit dem gleichgenannten Begriff von Hadwiger (dies. Zbl. 55, 50). Á. Császár.

Srinivasan, T. P.: On measurable sets. J. Indian math. Soc., n. Ser. 18, 1—8 (1954).

Mit geeigneten Modifikationen lassen sich die meßbaren Mengen im Sinne von Segal (Introduction to modern integration theory, Chicago 1950) identifizieren mit den im Carathéodoryschen Sinne meßbaren Mengen. *G. Aumann.*

Eggleston, H. G.: A measureless one-dimensional set. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 391—393 (1954).

Wie man weiß (A. S. Besicovitch, dies. Zbl. 9, 105; 46, 282; R. O. Davies, dies. Zbl. 48, 37), besitzt der euklidische Raum Teilmengen X , welche (für geeignetes α) von unendlichem α -dimensionalem Hausdorffschem Maß, kurz h_α -Maß, sind und welche andererseits dennoch keine Teilmengen von endlichem positivem h_α -Maß enthalten. Eine Theorie derartiger X läßt sich (vgl. H. G. Eggleston, dies. Zbl. 38, 37; 50, 58) ganz ebenso entwickeln wie die Theorie der Mengen von positivem endlichen h_α -Maß, falls ein Carathéodorysches äußeres Maß c über dem System der Teilmengen von X existiert mit $0 < c(X) < +\infty$ und mit $c(Y) = 0$ für jedes $Y \subset X$, für das $c_\alpha(Y) = 0$. In der vorliegenden Note wird die Existenz von Mengen nachgewiesen, zu denen es keine derartigen Carathéodoryschen c gibt. Zu dem Zwecke wird eine von Sierpiński konstruierte Menge F im E_2 als 1-dimensional nachgewiesen und gezeigt, daß jedes über dem System der Teilmengen von F definierte Carathéodorysche äußere Maß c' entweder den Wert unendlich annimmt oder identisch Null ist oder von Null verschieden ist für alle einpunktigen Teilmengen von F . Nach Besicovitch ist dann jede Teilmenge von F meßbar bezüglich eines jeden über dem System der Teilmengen der Ebene definierten Carathéodoryschen äußeren Maßes.

Otto Haupt.

Besicovitch, A. S.: On approximation in measure to Borel sets by F_σ -sets. J. London math. Soc. 29, 382—383 (1954).

Der Verf. verwendet einen Satz von Volkmann über Hausdorffsche Dimensionen gewisser linearer Mengen (dies. Zbl. 51, 41) zur Konstruktion einer linearen G_δ -Menge E der Hausdorffschen Dimension 1, so daß in jeder Darstellung $E = A + R$, wobei A ein F_σ ist, R ebenfalls die Hausdorffsche Dimension 1 hat. Demnach läßt sich eine Borelsche Menge E der Hausdorffschen Dimension α_0 im Fall $0 < \alpha < \alpha_0$, a. a. nicht als Vereinigung eines F_σ und einer Menge vom α -dimensionalen Hausdorffschen Maß Null darstellen, während dies auf Grund früherer Ergebnisse sehr wohl stets möglich ist, wenn E ein endliches α -dimensionales Hausdorffsches Maß hat.

K. Krickeberg.

Giorgi, Ennio de: Su una teoria generale della misura ($r - 1$)-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 36, 191—213 (1954).

Die wichtigsten Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sind bereits in einer früheren Note des Verf. bekannt gegeben (dies. Zbl. 51, 294).

Otto Haupt.

Oliver, H. William: The exact Peano derivative. Trans. Amer. math. Soc. 76, 444—456 (1954).

È noto che una funzione $f(x)$ ammette, per $x = x_0$, la derivata n -esima di Peano, se esistono n numeri $f_1(x_0), \dots, f_n(x_0)$, tali che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f_1(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} [f_n(x_0) + \varepsilon(x_0, h)],$$

dove $\varepsilon(x_0, h)$ è infinitesimo con h , f_n è chiamata dall'A. derivata n -esima esatta di Peano, se essa esiste per ogni x_0 di un intervallo. Tra le proprietà rilevate nella presente Nota riportiamo la seguente: Se $f_n(x)$ esiste per ogni x con $a \leq x \leq b$, per ogni coppia di numeri $A > B$ l'insieme dei punti di (a, b) , nei quali è $A > f_n(x) > B$ è vuoto o ha misura positiva.

S. Cingini.

Beesley, E. M.: Concerning total differentiability of functions of class p . Pacific J. Math. 4, 169—205 (1954).

Viene costruito un esempio di funzione $f(x, y)$, (x, y) in $Q = [0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1]$ a variazione limitata P (secondo Pierpont), la quale in nessun punto è totalmente differenziabile. Inoltre si dimostra che l'insieme di quelle funzioni a variazione limitata P e continue in Q , le quali in nessun punto sono totalmente differenziabili, è un insieme residuo (secondo Denjoy), e che la stessa proprietà sussiste per l'insieme di quelle funzioni a variazione limitata P e appartenenti alla classe E di Saks (questo Zbl. 6, 49), le quali in nessun punto sono totalmente differenziabili.

S. Cinquini.

Gonçalves, J. Vicente: Sur l'égalité des dérivées partielles similaires. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 3, 161—170 (1954).

Si rileva che l'esistenza della derivata $f_{yx}(x, y)$ e l'identità $f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y)$ hanno luogo sotto l'ipotesi che nelle vicinanze del punto (x, y) esistano le derivate f_y, f_{xy}, f_{x^2y} e inoltre questa ultima sia limitata. Segue l'estensione alle derivate miste di ordine superiore. La Nota termina con un'ulteriore osservazione relativa al teorema di Schwarz.

S. Cinquini.

Hayashi, Kyuzo: On the differential equation of Carathéodory's type. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 28, 129—132 (1954).

Ein Beweis des folgenden Satzes des Ref.: Sei $f(x, y)$ nach x meßbar und nach y stetig in $a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty$ und sei überdies $|f(x, y)| \leq k(x)$, mit $k(x)$ im Intervalle $I: a \leq x \leq b$ nicht negativ und summierbar, dann ist für jede in I stetige Funktion $\varphi(x): \frac{d}{dx} \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt = f(x, \varphi(x))$ in einem nur von $f(x, y)$ abhängigen maßgleichen Kerne von I .

G. Scorza Dragoni.

Huber, Alfred: Note on a theorem of Ostrowski. Proc. Amer. math. Soc. 5, 335—336 (1954).

Der Verf. beweist die folgende Verschärfung eines Satzes des Ref.: Sei $f(t, x)$ definiert für $a < x < b$ und für t auf einer Menge E , die von oben nicht beschränkt ist. Sei f stetig in x für jedes t , und es möge $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, x) = f(x)$ sein, wo $f(x)$ gleichfalls in (a, b) stetig ist. Dann gehört zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Teilintervall J von (a, b) und ein N derart, daß für alle x aus J und alle t auf E oberhalb N , $|f(t, x) - f(x)| < \varepsilon$ gilt.

A. Ostrowski.

Kudrjavcev, L. D.: Über eine Verallgemeinerung des Satzes von S. M. Nikol'skij über die Kompaktheit von Klassen differenzierbarer Funktionen. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 1 (59), 111—120 (1954) [Russisch].

Im euklidischen Raum E^n bezeichnen wir mit $E^m(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ die lineare Mannigfaltigkeit $x_{m+1} = x_{m+1}^0, \dots, x_n = x_n^0$. Es sei $Q_R^{(n)}$ der Würfel: $|x_i| < R, i = 1, \dots, n$, und $Q_R^{(m)}(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) = Q_R^{(n)} \cap E^m(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$. Ist E eine Punktmenge von E^n , so sei $L_p^{(n)}(E)$ die Menge der Funktionen, deren p -te Potenz über E summierbar ist. Mit $\|\varphi\|_p^{(E)}$ werde die Norm in diesem Funktionenraum ($\varphi \in L_p^{(n)}(E)$) bezeichnet. Verf. beweist folgenden Satz: Es sei $1 \leq m \leq n$,

$\alpha = 1 - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} > 0$. Es sei $\{f_k\}$ eine Folge von Funktionen aus $L_p^{(n)}(E^n)$, die zur Klasse

$H_p^{(r_1, \dots, r_n)}(M_1, \dots, M_n)$ gehören und die Bedingung $\|f_k\|_p^{(n)} \leq M, k = 1, 2, \dots$, erfüllen (vgl. dies. Zbl. 43, 56). Dann kann aus der Folge $\{f_k\}$ eine Teilfolge $\{f_{k_s}\}$, $s = 1, 2, \dots$, so ausgewählt werden, daß für beliebige feste x_{m+1}^0, \dots, x_n^0 und $R > 0$ die Folge $f_{k_s}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ in $L_p^{(m)}(Q_R^{(m)}(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0))$ konvergiert, und zwar gleichmäßig in x_{m+1}^0, \dots, x_n^0 . Weitere Sätze erweitern diese Aussage auf bestimmte Ableitungen der Funktionenfolge und auf allgemeinere Punkt Mengen des E^n , nämlich kompakte Mannigfaltigkeiten.

W. Thimm.

Gehring, F. W.: A study of α -variation. I. Trans. Amer. math. Soc. 76, 420—443 (1954).

For $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) and $0 \leq \alpha \leq 1$ let $V_\alpha\{f\} = V_\alpha\{f(x); a \leq x \leq b\}$ denote the least upper bound of all expressions $\left| \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})]^{1/\alpha} \right|$ with $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Let W_α be the class of $f(x)$ with finite $V_\alpha\{f\}$ (cf. L. C. Young, this Zbl. 16, 104). A preliminary chapter is devoted to the inclusion relations between W_α , Lip α , integrated Lipschitz (cf. L. C. Young, this Zbl. 18, 13) and generalized absolutely continuous (cf. Love, this Zbl. 42, 91) classes. Next it is proved that the moment problem $\int_0^1 x^n dg(x) = \mu_n$ has a solution $g(x) \in W_\alpha$

if and only if the least upper bound of all expressions $\left| \sum_{i=1}^j \lambda_{k, n_{i-1}} + \dots + \lambda_{k, n_{i-1}} \right|^{1/\alpha}$ with $n_0 = 1 < n_1 < \dots < n_j = k$, is finite (for the definition of the $\lambda_{k,n}$ see Widder, The Laplace transform, Princeton 1946, p. 101; for $\alpha = 1$ the theorem is classical, cf. loc. cit. p. 103). — Let $f(x, y)$ and $g(y)$ have period 1 in y , $V_\alpha\{f(x, y); 0 \leq x \leq 1\} \leq A$ for all y , $V_\beta\{f(x, y); 0 \leq y \leq 1\} \leq B$ for all x , $V_\gamma\{g(y); 0 \leq y \leq 1\} \leq C$, $0 < \alpha, \beta, \gamma \leq 1$, $0 < \lambda = \beta + \gamma - 1$, $\mu = \alpha \lambda \beta$ then if $s(x) = \int_0^1 f(x, y) dg(y)$, $V_\mu\{s(x); 0 \leq x \leq 1\} \leq k(\lambda) A^{\lambda/\beta} B^{1-\lambda/\beta} C$. — Finally the author introduces the notion of α -convergence, α -Cesàro- and α -Abel-summability for series and proves Abelian and Tauberian theorems for these notions. J. Horváth.

Livingston, Arthur E.: A generalization of an inequality due to Beurling. Pacific J. Math. 4, 251–257 (1954).

The (unpublished) inequality mentioned in the title is

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{\log(m+n)} = K \left(\sum_{m=1}^{\infty} m a_m^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n b_n^2 \right) \quad (0 < K < 4e)$$

if the sums on the right hand side are finite and $a_m \geq 0$, $b_n \geq 0$. The author proves the following consequence of the inequalities of Hölder und Hilbert [G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya (this Zbl. 47, 53), pp. 11, 226–231]:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{\alpha(x-y)} d\alpha(x) d\alpha(y) \leq K(\alpha) \left[\int_0^\infty f(x)^p d\alpha(x) \right]^{1/p} \cdot \left[\int_0^\infty g(y)^q d\alpha(y) \right]^{1/q}$$

[$0 < K(\alpha) \leq p + q = pq$, $p > 1$; $f(x)$, $g(x)$, $\alpha(x)$ are non-negative, $\alpha(x)$ also non-decreasing and continuous from the right, $0 \leq x \leq \infty$] if the integrals on the right exist. — The author wishes to acknowledge that any novelty in the subject matter of this note is due entirely to Professor Beurling, who suggested the ... theorem ... — Some corollaries and the generalization to several variables are also discussed. J. Aczél.

Livingston, Arthur E.: The zeros of a certain class of indefinite integrals. Proc. Amer. math. Soc. 5, 296–300 (1954).

È noto che gli zeri modulo 1 della funzione $\text{si}(\pi x) = \int_0^\infty t^{-1} \sin \pi t dt$, $x > 0$, hanno $\frac{1}{2}$ come unico loro punto di accumulazione. Questo risultato pone il problema di studiare l'insieme dei punti di accumulazione degli zeri modulo 1 della funzione $F(x) = \int_x^\infty f(t) g(t) dt$, in cui $f(t)$ e $g(t)$ sono due funzioni sottoposte ad opportune condizioni. L'A. trova una serie di risultati che ci vogliamo esimere dal riportare qui. L. Giuliano.

Germa, R. H.: Sur l'application de la méthode des approximations successives à la détermination des fonctions inverses. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 23, 106–114 (1954).

Die nach einem klassischen Satz der Differentialrechnung durch ein System von Gleichungen $F_j(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = 0$, $j = 1, \dots, n$, (unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen) bestimmten impliziten Funktionen $y_j = y_j(x_1, \dots, x_n)$ können nach E. Gour-sat mittels sukzessiver Approximation berechnet werden. In einer früheren Arbeit [Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. Sér. 12, 41 S. (1924)] betrachtete Verf. den Fall, daß jede Funktion F_j

als gleichmäßiger Limes einer Funktionenfolge F_{jk} , $k = 1, 2, \dots$, definiert ist, wandelte die Goursatsche Methode zur Bestimmung von Näherungslösungen φ_{jk} des Gleichungssystems $F_{jk} = 0$, $j = 1, \dots, n$, ab und bewies die Approximierbarkeit der impliziten Funktionen φ_j durch die Funktionen φ_{jk} . In der vorliegenden Note bemerkt Verf., daß man durch Vertauschung der Rollen von x_i und y_i in seinen früheren Betrachtungen ein Verfahren zur Approximation der zu den Funktionen $y_j = \varphi_j(x_1, \dots, x_n)$ inversen Funktionen $x_j = \varphi_j(y_1, \dots, y_n)$ und deren Ableitungen gewinnt.

H. Bauer.

Corominas, E. und F. Sunyer Balaguer: Bedingungen dafür, daß eine unendlich oft differenzierbare Funktion ein Polynom ist. *Revista mat. Hisp. Amer.*, IV. Ser. 14, 26—43 (1954).

Gli AA. generalizzano il classico teorema dell'analisi secondo il quale una funzione $f(x)$ che in un intervallo (a, b) ha sempre nulla la derivata di ordine n è un polinomio di grado $n - 1$ al più. Il teorema centrale di questo lavoro è il seguente: I. Se $f(x)$ è infinitamente derivabile in (a, b) e per ogni x di (a, b) esiste un intero $v = v(x) \geq 0$ (in generale variabile con x) per cui è $f^{(v)}(x) = 0$, allora $f(x)$ è un polinomio. Di questo teorema vengono date varie generalizzazioni, una delle quali afferma che: II. se H è un insieme numerabile di numeri e per ogni x di (a, b) esiste un intero $v = v(x) \geq 0$ (in generale variabile con x) per cui $f^{(v)}(x)$ appartiene ad H , allora $f(x)$ è un polinomio. Un altro risultato interessante che gli AA. trovano è il seguente: III. Se L è un insieme di punti di (a, b) e per ogni punto $x \in L$ esiste un intero $v = v(x) \geq 0$ (in generale variabile con x) tale che $f^{(v)}(x) = 0$, allora $f(x)$ può non essere un polinomio allora e solo allora che il complementare di L contenga un insieme perfetto. Prima di terminare gli AA. si chiedono se il teorema II è ancora vero se H non ha la potenza del numerabile, ma ha una potenza superiore. A questa questione gli AA. rispondono dimostrando il seguente teorema, il quale è, naturalmente, espressivo solo se l'ipotesi del continuo non è vera. IV. Sia H un insieme di numeri di potenza inferiore a quella del continuo. Se per ogni x di (a, b) esiste un intero $v = v(x) \geq 0$ (in generale variabile con x) tale che $f^{(v)}(x) \in H$, allora $f(x)$ è un polinomio. Oss.: In tutti i teoremi enunciati si fa l'ipotesi che $f(x)$ sia infinitamente derivabile in (a, b) .

L. Giuliano.

Lalaguë, Pierre: Sur des classes de fonctions indéfiniment dérivables. *C. r. Acad. Sci., Paris* 238, 761—762 (1954).

1. Si $f(x)$ est indéfiniment dérivable. $f^{(n)}(x) \leq M_n$ ($-\infty < x < \infty$) presque-périodique, ayant spectre dans E . alors $f^{(n)}(x) \in C\{M_n^E\}$, où M_n^E a été définie dans une note précédente de l'A. (ce Zbl. 50. 310). 2. Si $F^{(n)}(\theta) \leq M_n$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$), $C\{M_n\}$ étant dérivable (cf. Mandelbrojt, ce Zbl. 48. 52, p. 245 de ce livre), alors en posant $f(x) = F(\arccos x)$ on a $|f^{(n)}(x)| \leq x^n M_n^f$ où $M_n^f = \max_{r \geq n} (r^{2n} n^n T(r))$, $T(r) = \max_{r \geq 1} r^n / M_n$ (cf. Mandelbrojt, ce Zbl. 22. 155). — 3. Une condition nécessaire et suffisante est donnée pour que pour toute fonction $f(x)$ de $C\{M_n + N_n\}$ on ait $f(x) = g(x) + h(x)$ avec $g(x) \in C\{M_n\}$, $h(x) \in C\{N_n\}$ (cf. Bang, Om quasi-analytiske Funktioner. Kjobenhavn 1946).

J. Horváth.

San Juan, Ricardo: Un contre-exemple de fonctions quasi analytiques. *C. r. Acad. Sci., Paris* 238, 1185—1186 (1954).

L'A. construit une fonction $f(x)$, quasi-analytique au sens de Denjoy-Carleman (q. a. DC), mais non analytique, telle que si l'on a $f_1^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$ ($n = 0, 1, \dots, 2n$), où l'on sait que $f_1(x)$ est aussi q. a. DC, alors nécessairement $f(x) = f_1(x)$.

J. Horváth.

Blackwell, David: A representation problem. *Proc. Amer. math. Soc.* 5, 283—287 (1954).

Un problema di navigazione subacquea risolto da P. M. Morse e G. E. Kimball (questo Zbl. 44, 142) ha dato lo spunto all'A. di questa Nota di porre la seguente questione la quale illumina sul procedimento seguito e sulla forma della soluzione del problema ottenuta da Morse e Kimball. La questione è questa: Fissato un numero a , $0 < a < 1$, quale funzione $f(x)$ definita su $0 \leq x \leq 1$, è suscettibile di una rappresentazione $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q_n(x)$, in cui $c_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge e $q_n(x)$ indica la funzione caratteristica di un sottoinsieme di $(0, 1)$ di misura di Lebesgue a . È evidente che dovrà necessariamente essere $0 \leq f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{1}{a} \int_0^1 f(x) dx$. L'A. prova che

questa condizione è sufficiente perchè la $f(x)$ sia rappresentata come si è detto.

L. Giuliano.

Rosada, Giorgio: Generalizzazione della formula di Taylor per le funzioni di una variabile. Periodico Mat., IV. Ser. 32, 77–80 (1954).

Engvall, Albert: Eine Formel zur Berechnung des Gaußschen Fehlerintegrals. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 40–41 (1954) [Schwedisch].

Allgemeine Reihenlehre:

Macphail, M. S.: On some recent developments in the theory of series. Canadian J. Math. 6, 405–409 (1954).

Bei Untersuchungen über Matrixverfahren $y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$ sind in den vergangenen Jahren u. a. die folgenden Begriffe eingeführt worden: PMI von A. Wilansky (vgl. dies. Zbl. 47, 300), AK und SAK vom Ref. (vgl. dies. Zbl. 44, 64) und FAK, AD von K. Zeller (vgl. dies. Zbl. 45, 334). Verf. beweist einige Beziehungen zwischen diesen Begriffen bzw. schwächt bei bekannten Sätzen dieser Art die Voraussetzungen ab. Er zeigt u. a., daß das Nullwirkfeld eines permanenten und regulären Matrixverfahrens genau dann FAK besitzt, wenn AK vorhanden ist. Es ist im Rahmen eines Referates nicht möglich, auf weitere Einzelheiten einzugehen.

A. Peyerimhoff.

Macphail, M. S.: A remark on reversible matrices. Proc. Amer. math. Soc. 5, 120–121 (1954).

Eine Matrix A heißt reversibel, wenn es zu jeder konvergenten Folge y_n genau eine Urfolge x_k mit $y_n = \sum_k a_{nk} x_k$ gibt. Die x_k werden dann durch eine Umkehrtransformation der Form $x_k = c_k \lim_n y_n + \sum_n b_{kn} y_n$ gegeben. Banach [Théorie des opérations linéaires (dies. Zbl. 5, 209), insbes. S. 50] meinte, die c_k seien beschränkt. Verf. widerlegt das durch das Beispiel der Transformation $y_{2m} = \sum_{p=0}^m x_{2p}$, $y_{2m+1} = 2^{-m} x_{2m+1} + \sum_{p=0}^{\infty} x_{2p}$ mit der Beziehung $x_{2m+1} = 2^m (y_{2m+1} - \lim_n y_n)$. Das Hauptergebnis einer Arbeit von A. Wilansky (dies. Zbl. 36, 35), bei dessen Beweis die Banachsche Behauptung verwendet wurde, bleibt richtig.

K. Zeller.

Lorentz, G. G. and A. Robinson: Core-consistency and total inclusion for methods of summability. Canadian J. Math. 6, 27–34 (1954).

Die Verf. untersuchen Beziehungen zwischen Matrixverfahren, deren Kerne für beschränkte Folgen vergleichbar sind, und beweisen den folgenden Satz: Sind zwei permanente Matrizen A und B mit reellen Elementen gegeben und ist B positiv und so beschaffen, daß der B -Kern jeder beschränkten Folge im A -Kern liegt, so gibt es eine positive permanente Matrix C , so daß die Norm der m -ten Zeile der Matrix $CB = A$ für $m \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Unter den gegebenen Voraussetzungen unterscheiden sich also A und CB nur um eine Matrix, die alle beschränkten Folgen zu Null limitiert. Ein weiteres Ergebnis bezieht sich auf totale Inclusion (d. h. Inclusion bei gleichem Grenzwert in bezug auf konvergente und bestimmt divergente Folgen): Sind A und B permanente und zeilenfinite (reelle) Matrizen und ist B positiv und total in A enthalten, so gibt es eine zeilenfinite permanente und positive Matrix C und eine Zahl p , so daß $C B_p = A_p$ ist (A_p geht aus A hervor, wenn die Elemente der ersten p Zeilen durch Nullen ersetzt werden). Beim Beweis der Sätze werden Hilfsmittel über konvexe Mengen in Banachräumen herangezogen. Erweiterungen auf komplexe Matrizen und Folgen und einige Anwendungen auf Hausdorffverfahren werden besprochen.

A. Peyerimhoff.

Ramanujan, M. S.: On summability methods of type M . J. London math. Soc. 29, 184–189 (1954).

Eine permanente Matrix $A = (a_{nk})$ (die also die Bedingungen von Toeplitz erfüllt) heißt vom Typ M , falls die Bedingungen $\sum c_i = \infty$ und $\sum_{i=0}^{\infty} c_i a_{ik} = 0$

($k = 0, 1, \dots$) stets $c_i = 0$ nach sich ziehen. Verf. erweitert verschiedene Sätze von J. D. Hill (dies. Zbl. 18. 16) über dreieckige Matrizen vom Typ M auf beliebige Matrizen vom Typ M (Grundmeneigenschaft gewisser Folgen sind äquivalent mit M , ist das Produkt AB vom Typ M , so ist auch A vom Typ M). Für permanente Matrizen in der Reihen-Folgen- und Reihen-Reihen-Form (γ und α Matrizen) wird M definiert, und es wird gezeigt, daß gewisse Produkte solcher Matrizen M erfüllen, falls dies für die Faktoren zutrifft.

A. Peyerimhoff.

Basu, S. K.: On the total relative strength of some Hausdorff methods equivalent to identity. Amer. J. Math. **76**, 389—398 (1954).

Let H be a regular Hausdorff method with moments μ_k , $k \geq 0$, so that $\mu_k = \mu(k)$ where $\mu(z) = \int_0^1 t^z d\varphi(t)$, with φ being of bounded variation in $\langle 0, 1 \rangle$. In order that H should be consistent with ordinary convergence E , φ must be continuous at $t = 0$ and $\varphi(1) - \varphi(0) = 1$. If applied to real sequences $\{s_k\}$, the condition for total consistency (that is, applying also to the limits $\pm \infty$) is that φ should increase. The author studies the relative strength of methods $V_\alpha = \alpha E + (1 - \alpha)H$ (of Mercierian type) as applied to real sequences $\{s_k\}$ for different values of the real parameter α . H is supposed to be totally consistent and its corresponding function φ to be of regular bounded variation, that is, absolutely continuous apart from its „component of jumps“. Typical results are: (i) If $\alpha > 1/2$, then V_α is equivalent to E . (ii) If $0 < \alpha \leq 1/2$, V_α is equivalent to E , provided that $\Re \mu(z) \geq 0$ for $\Re z \geq 0$. (iii) If $\alpha < 0$, then V_α is stronger than E , provided that φ is continuous at $t = 1$. (iv) If $0 < \alpha < 1$, V_α is totally stronger than E . (v) If $\alpha > 1$, E is totally stronger than V_α . (vi) If $\alpha < 0$, V_α is not totally stronger than E , provided that φ is continuous at $t = 1$. There are similar results comparing V_α and V_β . [See also W. H. J. Fuchs and W. W. Rogosinski, Quart. J. Math., Oxford, II. Ser. **14**, 27—48 (1943).]

W. W. Rogosinski.

Włodarski, L.: Sur certaines propriétés des domaines des méthodes continues de limitation. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 159—161 (1954).

Verf. faßt Anwendungsfeld A^{**} und Wirkungsfeld A^* eines Verfahrens $\lim_{t \rightarrow T} \sum a_n(t) \xi_n$ als F -Räume mit koordinatenweiser Konvergenz auf. Dabei setzt er voraus, daß die $a_n(t)$ stetig sind und daß die Konvergenz der unter dem Limeszeichen stehenden Reihen, wenn sie für gewisse t_m stattfindet, in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $0 \leq t < T$ gleichmäßig ist. Die F -Topologien von A^* und A^{**} sind dann eindeutig bestimmt und um so größer, je größer das Feld. In A^{**} liegen die abbrechenden Folgen dicht; ist A permanent, können die beschränkten Folgen in A^* im Sinne der Topologie durch konvergente Folgen approximiert werden. Vergleich der Topologien zweier Verfahren A und B auf den genannten dicht liegenden Mengen führt zu Enthaltenseinsbeziehungen zwischen den Feldern. Ein weiterer Satz dieser Art lautet: Ist A perfekt, B permanent und die B -Transformierte jeder A -limitierbaren Folge beschränkt, so ist $A^* \subset B^*$. Ferner sind zwei vergleichbare permanente Verfahren verträglich bezüglich beschränkter Folgen. Ein permanentes Verfahren, das nur beschränkte Folgen limitiert, ist konvergenzgleich. Bei einem permanenten Verfahren A bildet die Menge der beschränkten A -limitierbaren Folgen $\{\xi_n\}$ einen F -Raum mit der Norm $\sup_n |\xi_n|$. Ein permanentes, „nicht entartetes“ Verfahren A kann nicht die Eigenschaft besitzen, daß es mit zwei Folgen $\{\xi_n\}$ und $\{\eta_n\}$ stets auch $\{\xi_n \eta_n\}$ limitiert. — Ausführliche Beweise dieser Ergebnisse erscheinen in Studia Math. **14**. Ähnliche Resultate für Verfahren der Form $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} \xi_k$ stammen von Mazur-Orlicz (dies. Zbl. **6**, 52) und Ref. (dies. Zbl. **45**, 334). Man vergleiche auch Verf. [Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 13—16 (1954)] und Ref. (dies. Zbl. **46**, 120).

K. Zeller.

Kadec, M. I.: Über bedingt konvergente Reihen im Raume L^p . Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 1 (59), 107—109 (1954) [Russisch].

Die Menge der durch Umordnung zu erhaltenden Summenwerte einer bedingt konvergenten Reihe $\sum r_k$ im Raume L^p bildet einen Unterraum in L^p , wenn folgende Bedingung erfüllt ist: $\sum \|r_k\|^2 < \infty$ im Falle $p > 2$, $\sum \|r_k\|^p < \infty$ im Falle $1 < p \leq 2$. Beim Beweis geht Verf. ähnlich vor wie in einer früheren Arbeit über n -dimensionale Räume (dies. Zbl. **50**, 65). Man vgl. auch den bekannten Satz von E. Steinitz über bedingt konvergente Reihen [J. reine angew. Math. **143**, 144 (1913)].

K. Zeller.

Agnew, Ralph Palmer: Abel and Riesz transforms of series having bounded partial sums. J. rat. Mech. Analysis **3**, 47—72 (1954).

Die Reihe (1) $\sum u_n$ besitze beschränkte Teilsummen $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$; $\mathfrak{A}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k u_k$ sei ihre Abelsche, $R^{(r)}(n) = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^r u_k$ ihre Riesz'sche Transformation. Die Fragestellung lautet: Wie sind t ($0 < t < 1$) und n ($= 0, 1, \dots$) zu koppeln, so daß $|\mathfrak{A}(t) - R^{(r)}(n)|$ möglichst klein wird, und welches ist der Minimalwert dieser Größe? Der Pfadkreis um die Häufungspunkte der Folge s_n besitze den Radius R . Ist $r > 0$, $q > 0$, $n = n(t) = (1-t)^{-1}(q + o(1))$ für $0 < t < 1$ mit $o(1) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 1$ [bezw. $t_n = 1 - n^{-1}(q + o(1))$ für $n = 1, 2, \dots$ mit $o(1) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$], so ist

$$\lim_{t \rightarrow 1} |\mathfrak{A}(t) - R^{(r)}(n(t))| = \mathfrak{G}_r(q) R \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}(t_n) - R^{(r)}(n)| = \mathfrak{G}_r(q) R$$

$$\text{mit } \mathfrak{G}_r(\lambda) = e^{-\lambda} + \int_0^1 |\lambda e^{-\lambda x} - r(1-x)^{r-1}| dx;$$

dabei ist $\mathfrak{G}_r(q)$ bestmögliche Konstante. $\mathfrak{G}_r(\lambda)$ besitzt an einer eindeutig bestimmten Stelle q_r ein absolutes Minimum. $H_r = \mathfrak{G}_r(q_r) > 0$ ist die kleinste Konstante von folgender Eigenschaft: Es gibt eine Funktion $t(x)$ [$0 < t(x) < 1$ für $x > 0$, $t(x) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \infty$] und eine Funktion $n(x)$ [$0 < n(x)$ ganzzahlig für $\alpha > 0$, $n(x) \rightarrow \infty$ für $\alpha \rightarrow \infty$], so daß

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}(t(x)) - R^{(r)}(n(x))| \leq H_r R$$

für jede Reihe (1) ist. Die Funktion $\mathfrak{G}_r(\lambda)$ wird eingehend abgeschätzt und untersucht, bis zur Angabe zahlreicher numerischer Werte, auch für q_r . Dabei werden die Fälle $r = 1$, $0 < r < 1$, $1 < r$ getrennt behandelt. — Weitere Literatur: Verf. [J. reine angew. Math. **193**, 94—118 (1954)]; Verf., Abel and Riesz transforms of general Tauberian series (erscheint in den Rend. Circ. mat. Palermo).

W. Meyer-König.

Tatchell, J. B.: A note on a theorem by Bosanquet. J. London math. Soc. **29**, 207—211 (1954).

Nach Bosanquet [J. London math. Soc. **20**, 39—48 (1945)] gilt für ganze Zahlen $\kappa \geq 0$ und $q > 0$ mit $q > \kappa + 1$, daß $\sum a_n \varepsilon_n$ genau dann C_q -summierbar ist für alle C_κ -summierbaren Reihen $\sum a_n$, wenn gilt (i) $\sum n^{\kappa+1} \varepsilon_n < \infty$ und (ii) $\sum n^{\kappa+q} \varepsilon_n < \infty$. Bosanquet vermutete, daß für $q > \kappa + 1$ die genauen Bedingungen dieselben sind wie für $q = \kappa + 1$. Die hierbei auftretende Schwierigkeit liegt im Beweis der Notwendigkeit von (ii), h. d. daß aus der C_q -Summierbarkeit von $\sum a_n \varepsilon_n$ für alle C_κ -summierbaren $\sum a_n$ bei $q > \kappa + 1$ die Bedingung $\sum n^{-1} \varepsilon_n < \infty$ folgt. Verf. beweist nun den Satz: Genau dann ist $\sum a_n \varepsilon_n$ $|A|$ -summierbar (A = Abel-Verfahren) für alle konvergenten $\sum a_n$, wenn gilt $\sum |A \varepsilon_n| < \infty$ und $\sum n^{-1} \varepsilon_n < \infty$. Wegen $C_q \subset A$ ist damit die Vermutung bewiesen.

A. Peyerimhoff.

Padmavally, K.: On the Cesàro summability of a class of functions. J. Indian math. Soc., n. Ser. **17**, 151—158 (1954).

Verf. knüpft an eine Note von Rajagopal (dies. Zbl. **38**, 214) an, in der ein von M. S. Macphail herrührender Satz über die C_k -Summierbarkeit unendlicher Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) a(n)$ auf Integrale übertragen wurde. In einer Bemerkung hatte dort Rajagopal (ohne Beweis) ausgesprochen, daß in dem Fall, wo $a(x)$ kein Polynom ist, aber (1) $\int_0^{\infty} F_k(x) a^{(k)}(x) dx$ konver-

giert, das Integral $\int_0^{\infty} f(x) a(x) dx$ zum Werte $\sum_{v=0}^{k-1} (-1)^v c_{v+1} a^{(v)}(0) + (-1)^k \int_0^{\infty} F_k(x) a^{(k)}(x) dx$ C_k -summierbar sei. L. S. Bosanquet [Math. Reviews **9**, 425 (1948)] wies nun darauf hin, daß dafür die Bedingung (1) allein noch nicht ausreicht. Verf. zeigt, daß es jedoch genügt, zu (1) noch die Zusatzbedingung $a^{(k)}(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ hinzuzufügen. Darüber hinaus verallgemeinert Verf. die beiden Sätze von Rajagopal wie folgt: Satz 1. Die k -ten Ableitungen der Funktionen $a(x)$ und $g(x)$ seien vorhanden und integrierbar in jedem endlichen Intervall von $x \geq 0$, es sei $g(x) = O(1)$, $a^{(k)}(x) = o(1)$ für $x \rightarrow \infty$. Dann gilt $g^{(k)}(x) a(x) \rightarrow 0$, (C, k). — Satz 2. Die k -ten Ableitungen von $G(t)$ und $a(t)$ seien vorhanden und integrierbar in $x \geq 0$, und es sei

$\int_0^x G(t) dt = O(1)$, $a^{(k)}(x) = o(1)$ für $x \rightarrow \infty$. Dann gilt

$$\int_0^x G^{(k)}(t) a(t) dt - (-1)^k \int_0^x G(t) a^{(k)}(t) dt \rightarrow \sum_{v=0}^{k-1} (-1)^{v+1} G^{(k-1-v)}(0) a^{(v)}(0), \quad (C, K).$$

Weiter werden die analogen Sätze für Folgen statt Funktionen aufgestellt. *V. Garten.*

Postnikov, A. G.: Ein allgemeiner Satz vom Abelschen Typus für eine Potenzreihe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **96**, 913–916 (1954) [Russisch].

Ist $C_1\text{-lim } a_n = 1$, so gilt $\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_n a_n x^n f(x^n) = \int_0^1 f(t) dt$, wenn $f(x)$ in $0 \leq x \leq 1$ von beschränkter Schwankung ist. — Man vergleiche den Karamataschen Beweis des O-A-K-Satzes [Math. Z. **32**, 319–320 (1930)].

K. Zeller.

Gaier, D. und K. Zeller: Über den O-Umkehrsatz für das C_k -Verfahren. Rend. Circ. mat. Palermo **3**, 83–88 (1954).

The authors supply two new proofs of the classical Tauberian Theorem, due to Hardy, that if $\sum a_n$ is summable C_k and $n a_n = O(1)$, then the series converges (for other proofs see the references listed in the paper). The first proof uses the known equivalence of the C_k and H_k processes and reduces the proof to the case when $k = 1$ and for this case the authors add a simple variant of Landau's proof. The second proof is direct and is based on an identity between the Cesàro sums of the series which the authors prove. The authors remark that several other well known results on Cesàro summability could be obtained by their second method.

V. Ganapathy Iyer.

Jakimovski, Amnon: On a Tauberian theorem by O. Szász. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 67–70 (1954).

An A. Rényi und O. Szász (dies. Zbl. **44**, 67) anknüpfend, gelangt Verf. unter Benutzung bekannter Limitierungsumkehrsätze (Hardy und Littlewood, Robert Schmidt) zu folgenden in gewissem Sinn abschließenden Feststellungen. Dann und nur dann ist die reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, wenn sie Abel-summierbar und gleich

zeitig (1) $\lim_{m \rightarrow \infty} (m+1)^{-1} \sum_{v=m+1}^n v a_v = 0$ bei $n \rightarrow m$, $\frac{n}{m} \rightarrow 1$ ist. (1) läßt sich

ersetzen durch (1') $\lim_{m \rightarrow \infty} \left[n^{-1} \sum_{v=0}^n v a_v - m^{-1} \sum_{v=0}^m v a_v \right] \geq 0$ bei $n > m$, $\frac{n}{m} \rightarrow 1$.

Genau ebenso, wenn Abel durch Borel, $n/m \rightarrow 1$ durch $(n-m)/\sqrt{m} \rightarrow 0$ ersetzt wird. Es gilt auch: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn sie

Borel-summierbar und $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{-1} \sum_{v=1}^n v a_v = 0$ ist. *W. Meyer-König.*

Rajagopal, C. T.: On Riesz summability and summability by Dirichlet's series a further addendum and corrigendum. Amer. J. Math. **76**, 252–258 (1954).

Unter $\sigma_r(x)$ die Integralmittel von Riesz der Ordnung $r > 0$ einer Funktion $A(x)$ verstanden, werde

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \sigma_r(x) = \begin{cases} \sigma_r, & \lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_r = \sigma_{\infty} \\ \sigma_r, & \lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_r = \sigma_{\infty} \end{cases}$$

gesetzt. Auf die von Pennington (dies. Zbl. **46**, 65) vorgebrachte Kritik zur Schlußbemerkung der gleichbetitelten früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **34**, 42 und Amer. J. Math. **69**, 851–855 (1947)) hin wird gezeigt, daß der ebenda formulierte Satz 1: Haben σ_{∞} und σ_{∞} den gemeinsamen endlichen Wert s , so folgt auch $\sigma_r = \sigma_r = s$ für alle hinreichend großen r , — bei nur leichter Änderung des Beweisganges auf die angegebene Weise hergeleitet werden kann, sofern die Riesz-Mittel durch die Cesàro-Mittel ersetzt werden. Diese Herleitung des ursprünglichen Littlewoodschen Satzes 1' (dies. Zbl. **12**, 303) macht von der Laplace-Transformation entschei-

denden Gebrauch (Theorem 1 der früheren Arbeit des Verf.). Im allgemeinen Fall der typischen Mittel von Riesz wird ein neuer Beweis des Satzes durchgeführt, der im wesentlichen den Gedankengang der früheren Note befolgt, bzw. sich auf einen bekannten Umkehrsatz von Hardy-Littlewood für die Laplace-Transformation, der dem Satz für Potenzreihen mit positiven Koeffizienten entspricht [Proc. London math. Soc., II. Ser. **30**, 23—37 (1930)], stützt. Es folgen noch verschiedene Berichtigungen und Hinweise zu den Ausführungen der früheren Arbeit des Verf.

V. Garten.

Ogieveckij, I. I.: Über die Summierung von Doppelreihen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 713—716 (1954) [Russisch].

Verf. überträgt bekannte Ergebnisse über das C - und A -Verfahren auf Doppelreihen und verschärft dabei Sätze von K. Knopp (dies. Zbl. **23**, 28) und M. F. Timan (dies. Zbl. **42**, 65). Bei den folgenden Resultaten setzen wir voraus, daß $\alpha, \beta > -1$ und $n, \delta > 0$ gilt und die (C, α, β) -Transformierte der Folge s_{nn} beschränkt ist. Dann ist die $(C, \alpha + n, \beta + \delta)$ -Transformierte langsam schwankend (vgl. Knopp, l. c.). Fernersind $(C, \alpha + n, \beta + \delta)$ und $(C, n, \delta) \cdot (C, \alpha, \beta)$ äquivalent (für die genannten Folgen). Ist s_{nn} A -limitierbar, so auch $(C, \alpha + n, \beta + \delta)$ -limitierbar; ist überdies die (C, α, β) -Transformierte langsam schwankend, so ist die Folge sogar (C, α, β) -limitierbar.

K. Zeller.

Agranovič, M. S.: Über die Verträglichkeit gewisser Summationsmethoden. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 3 (61), 242 (1954) [Russisch].

Munthe Hjortnaes, Margrethe: Überführung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ in ein bestimmtes Integral. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 211—213 (1954) [Norwegisch].

Slater, L. J.: Some new results on equivalent products. Proc. Cambridge philos. Soc. **50**, 394—403 (1954).

L'A. considera alcune identità atte ad esprimere il prodotto infinito

$$\prod \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_M; q^k \\ b_1, b_2, \dots, b_N; \end{matrix} \right] = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - a_1 q^{kn-k}) (1 - a_2 q^{kn-k}) \dots (1 - a_M q^{kn-k})}{(1 - b_1 q^{kn-k}) (1 - b_2 q^{kn-k}) \dots (1 - b_N q^{kn-k})}$$

come somma di termini formati con prodotti infiniti dello stesso tipo. Le identità di questa specie, osserva l'A., trovano impiego nella teoria delle funzioni ellittiche, delle funzioni ipergeometriche generalizzate, delle funzioni modulari. Seguono due tavole numeriche per la valutazione di $1 \prod_{n=0}^{\infty} (1 - a q^n)$, $1 \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^n)$ costruite col calcolatore elettronico EDSAC del Cambridge Math. Laboratory. G. Sansone.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Thomsen jr., D. L.: Extensions of the Laplace method. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 526—532 (1954).

In Verallgemeinerung der bekannten Laplaceschen Methode, für

$$\int_0^n \exp [-h \varphi(t)] dt$$

Näherungsausdrücke für $h \rightarrow \infty$ aufzustellen, werden unter wechselnden Voraussetzungen Näherungen für $\int_0^a \exp [-h \varphi(t) + k \psi(t)] dt$ abgeleitet, wenn $h \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, $a \rightarrow +0$, wobei $k = o(h)$.

G. Doetsch.

Gross, Oliver: Polynomial-like approximation. Math. Tables Aids Comput. **8**, 58—60 (1954).

Given $z(x, y)$, real and continuous in $0 \leq x, y \leq 1$, a method is indicated to construct functions $\Phi_j(x)$, $\Psi_j(y)$ ($j = 1, 2, \dots$) such that 1

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[z(x, y) - \sum_{j=1}^n \Phi_j(x) \Psi_j(y) \right]^2 dx dy$$

is minimized, $2^c z(x, y) - \sum_{j=1}^n \Phi_j(x) \Psi_j(y)$ vanishes on a grid of lines $x = x_1, \dots, x_n$, $y = y_1, \dots, y_n$. J. Horváth.

Achiezer, N. I.: Über die beste gewogene Annäherung auf der ganzen Achse mittels ganzer Funktionen endlicher Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 983—986 (1954) [Russisch].

Die beste gewogene Annäherung wird mittels der Abweichungsdefinition $\| \varphi - \psi \|_\Phi = \sup | \varphi(x) - \psi(x) | \Phi(x)$ erklärt, wobei $\Phi(x)$ eine Majorante quasiendlichen Geschlechts (im Sinne der Bernsteinschen Terminologie) ist. Verf. leitet unter Benutzung früherer Ergebnisse [dies. Zbl. 51, 301; Math. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 415—438 (1952)] ein Kriterium dafür ab, daß eine gegebene Funktion $f(x)$ durch ganze Funktionen eines Grades $\leq p$ gemäß obiger Definition approximiert wird. W. Hahn.

Gelfond, A.: Über Polynome, die samt ihren Ableitungen am wenigsten von Null abweichen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 689—691 (1954) [Russisch].

Verf. betrachtet den Ausdruck $\min \max \{ |P^{(s)}(x)| (n-s)!/n! \} = \sigma_{n,m}$ ($n \geq m+2$, $m \geq 0$). Dabei gilt das innere Maximum für $-1 \leq x \leq 1$, das äußere für $0 \leq s \leq m$; das Minimum bezieht sich auf alle normierten Polynome n -ten Grades. Es gilt $2^{-n-m-1} \leq \sigma_{n,m} \leq 2^{-n-m-1} \exp(O(m^2 n))$. Verf. gibt gewisse lineare Verbindungen der Tschebyscheffschen Polynome an, die asymptotisch das Minimum liefern. W. Hahn.

Pinsker, I. Š.: Zur Frage der Konstruktion einer Funktion, die am wenigsten von Null abweicht. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 21—24 (1954) [Russisch].

Mitteilung von acht Sätzen ohne Beweis, zu deren Formulierung zehn Definitionen benötigt werden. Es handelt sich um Funktionen von n reellen Veränderlichen. Vgl. auch Morozov (dies. Zbl. 46, 68). W. Hahn.

Kiprijanov, I. A.: Über die Summierung von Interpolationsprozessen für Funktionen zweier Veränderlicher. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 17—20 (1954) [Russisch].

Verf. betrachtet die trigonometrischen Interpolationspolynome $I_{mn}(f; x, y) = (4/N_m N_n) \sum_\mu \sum_\nu f(x_\mu, y_\nu) D_m(x - x_\mu) D_n(y - y_\nu)$, wo D_m die Dirichletkerne bezeichnen und x_μ bzw. y_ν jeweils N_m bzw. N_n äquidistante Teilpunkte von $(0, 2\pi)$ sind. Durch Anwendung einer Summationsmatrix K erhält man neue Polynome J_{mn} . Mit $\partial^2 f / \partial \theta^2$ bezeichnen wir die zweiten Ableitungen von f . Gehören die $\partial^2 f / \partial \theta^2$ einer Orliczklasse an [die definierende Funktion $M(u)$ muß dabei gewissen Bedingungen genügen], hat K gewisse Regularitätseigenschaften (z. B. die Fejér-Eigenschaft) und ist $\lim (N_k - k)/k = 0$, so konvergiert $\partial^2 J_{mn} / \partial \theta^2$ gegen $\partial^2 f / \partial \theta^2$ im Sinne der Orlicznorm oder der L^1 -Norm, wenn $m, n \rightarrow \infty$ geht unter der Einschränkung $1/\tau \leq m/n \leq \tau$. Diese und ähnliche Resultate werden in 5 Sätzen ohne Beweis formuliert. Entsprechende Ergebnisse für eine Veränderliche stammen von Lozinskij [Mat. Sbornik, n. Ser. 14 (56), 175—268 (1944)]. K. Zeller.

Andreoli, Giulio: Su due sistemi di funzioni ortogonali costanti a tratti e collegati a determinanti di Hadamard. Ricerche, Rivista Mat. pur. appl. 5, Nr. 1/2, 3—14 (1954).

L'A. collega i sistemi ortogonali (costanti a tratti) di Walsh e di Haar a certi determinanti da lui chiamati di Hadamard. G. Sansone.

Meňšov, D. E.: Über die Unbestimmtheitsgrenzen dem Maße nach der Teilsummen von trigonometrischen Reihen. Mat. Sbornik, n. Ser. 34 (76), 557—574 (1954) [Russisch].

Let $G(x)$, $F(x)$ be two measurable functions defined on $[-\pi, +\pi]$. The author has constructed (this Zbl. 39, 70) for an arbitrary pair of this kind, a trigonometric series (*) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ with $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$, such that its partial

sums $S_n(x)$ have $G(x)$ and $F(x)$ for their lower and upper limits in measure. This result is here strengthened to the effect that even each subsequence $S_{n_k}(x)$ of partial sums of (*) has this property. The proof depends on a lemma involving trigonometric functions used in the preceding paper and on some additional properties of upper and lower limits in measure.

G. G. Lorentz.

Heywood, Philip: A note on a theorem of Hardy on trigonometrical series. J. London math. Soc. **29**, 373—378 (1954).

Let $g(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin n\vartheta$ where $\lambda_n \geq 0$. G. H. Hardy (this Zbl. **2**, 254) proved that, if $A > 0$ and $0 < \alpha \leq 1$, then $g(\vartheta) \simeq \pi A \vartheta^{\alpha-1/2} \Gamma(\alpha) \sin \frac{1}{2} \alpha \pi$ as $\vartheta \rightarrow +0$ holds if, and only if, $\lambda_n \simeq A n^{-\alpha}$. This result is now shown to be true for $0 < \alpha < 2$. If $\alpha = 2$, then $n^2 \lambda_n \rightarrow A$ implies that $g(\vartheta) \simeq A \vartheta \log 1/\vartheta$, but not conversely. For $\alpha > 2$, $\lambda_n \simeq A n^{-\alpha}$ implies that $\frac{g(\vartheta)}{\vartheta} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \lambda_n$, so that $g(\vartheta) \simeq K \vartheta$ where $K = 0$ (compare P. Hartman-A. Wintner, this Zbl. **50**, 72).

W. W. Rogosinski.

Noble, M. E.: Coefficient properties of Fourier series with a gap condition. Math. Ann. **128**, 55—62 (1954), Correction, *ibid.* 256 (1954).

Let $\sum (a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x)$ be a lacunary Fourier series satisfying the gap condition $\lim N_k \log n_k = \infty$, where $N_k = \max \{n_k - n_{k-1}, n_{k+1} - n_k\}$. The author shows that several classical results about the order of Fourier coefficients and the absolute convergence of Fourier series remain valid for such lacunary Fourier series if the usual hypothesis concerning the periodic function $f(x)$ throughout the interval is replaced by the corresponding hypothesis in a sub-interval. Typical results are as follows: (1) If $f(t)$ is of bounded variation in any interval $|t - t_0| \leq \delta$ then $a_{n_k}, b_{n_k} = O(n_k^{-1})$. (2) If $f(t)$ satisfies a Lipschitz condition of order α ($0 < \alpha < 1$) in some interval $|t - t_0| \leq \delta$, then $a_{n_k}, b_{n_k} = O(n_k^{-\alpha})$. (3) If $f(x)$ satisfies a Lipschitz condition of order α ($\frac{1}{2} < \alpha < 1$) in some interval $|x - x_0| \leq \delta$, then $\sum (|a_{n_k}| + |b_{n_k}|) < \infty$.

J. A. Siddiqui.

Livingston, Arthur E.: The Lebesgue constants for Euler (E, p) summation of Fourier series. Duke math. J. **21**, 309—313 (1954).

Seien $L(n, p)$ die Lebesgueschen Konstanten, die bei der E_p -Summierung der Fourierreihen auftreten und zuerst von Schmetterer und dem Ref. untersucht wurden. Verf. zeigt $L(n, p) = 2\pi^2 \log(2n/p) + A + \varepsilon_n(p)$, wo A von p unabhängig ist und $\varepsilon_n(p) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, bei festem p . Dies verallgemeinert ein Resultat von L. Lorch (dies. Zbl. **46**, 67) für $p = 1$. Beim Beweis wird eine Umformung der Lebesgueschen Konstanten für allgemeine Hausdorffsche Summationsverfahren und ein Resultat von Szász (dies. Zbl. **36**, 37) benützt. K. Prachar.

Lorch, Lee: The principal term in the asymptotic expansion of the Lebesgue constants. Amer. math. Monthly **61**, 245—249 (1954).

Using the method of a previous paper (this Zbl. **50**, 59) the following theorem is proved: Let $g(t)$ be an integrable function of period p such that $\int_0^1 g(t) dt$ exists in some sense. Then for $0 < \tau(\xi) = o(\xi)$ ($\xi \rightarrow \infty$)

$$L_{\xi}(g) = \int_0^{1/\tau(\xi)} \frac{g(\xi t)}{t} dt = m \log \left\{ \frac{\xi}{\tau(\xi)} \right\} + O(1), \text{ where } m = p^{-1} \int_0^p g(t) dt.$$

This yields a very simple new derivation of the principle term in the asymptotic expansions of the Lebesgue, Fejér and analogous constants. J. Horváth.

Izumi, Shin-ichi: Some trigonometrical series. VI. Tôhoku math. J., II. Ser. **5**, 290—295 (1954).

(Teil V, dies. Zbl. 51, 302). Verf. untersucht das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n^*(x) - f(x)|^2 n^\alpha$ für $\alpha > 0$, wobei $s_n^*(x)$ die modifizierten Teilsummen der Fourierschen Reihe von $f(x)$ bedeuten:

$$s_n^*(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2 \operatorname{tg}(t/2)} \sin nt \, dt.$$

und leitet einen Approximationssatz für unbegrenzt differenzierbare Funktionen her. $f(x)$ sei beliebig oft differenzierbar. $A_k = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f^{(k)}(x)|$ ($k = 0, 1, 2, \dots$),

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{k+2}}{k^2} \left\{ \frac{1}{\psi(2k)} + \frac{1}{\psi(2k+1)} \right\} < \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n^{**}(x) - f(x)|^2 q(n)$ gleichmäßig, wobei

$$s_n^{**}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin nt}{t} \, dt \bigg/ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt \quad \text{und} \quad q(n) = \sum_{k=1}^{\infty} n^k \psi(k).$$

Insbesondere gibt es ein trigonometrisches Polynom $t_n(x)$ der Ordnung n derart, daß gleichmäßig $t_n(x) - f(x) = O(1/\sqrt{\varphi(n)})$. V. Garten.

Izumi, Shin-ichi: Some trigonometrical series. VII. Tôhoku math. J., II. Ser. 5, 268—271 (1954).

Bedeutet (n_k) eine Folge ganzer Zahlen mit den Hadamardschen Lücken $n_{k-1}/n_k > \theta > 1$ ($k = 1, 2, \dots$), so ist die Folge $(\cos n_k x)$, welche eine Teilfolge von $(\cos nx)$ darstellt, bekanntlich „fast-unabhängig“ (almost independent bzw. quasi-independent). Verf. behandelt für zwei verschiedene Definitionen die Frage, ob stets und unter welchen Bedingungen eine Funktionenfolge eine fast-unabhängige Teilfolge enthält. V. Garten.

Izumi, Shin-ichi: Some trigonometrical series. VIII. Tôhoku math. J., II. Ser. 5, 296—301 (1954).

Für das von G. Sunouchi mitgeteilte Kriterium gibt Verf. einen neuen Beweis, ohne sich, wie Sunouchi, auf einen Tauberschen Satz von Wang zu stützen, sowie einige Verallgemeinerungen, indem die Bedingung (2) des folgenden Referats durch

$$(2') \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{1/(kn)^{1/4}}^{\eta} \left| \frac{\varphi(t)}{t} - \frac{\varphi(t + \pi/n)}{t + \pi/n} \right| dt = 0 \quad \text{bzw. durch}$$

$$(2'') \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \int_{(kn)^{1/4}}^{\eta} \left| \frac{\varphi(t) - \varphi(t+u)}{t} \right| dt = 0 \quad \text{ersetzt wird.}$$

V. Garten.

Sunouchi, Gen-ichirô: A new convergence criterion for Fourier series. Tôhoku math. J., II. Ser. 5, 238—242 (1954).

Verf. verallgemeinert seine 1951 mitgeteilte Erweiterung des Youngschen Konvergenzkriterium (dies. Zbl. 44, 72) nach dem Vorbild von Hardy-Littlewood [Proc. London math. Soc., II. Ser. 28, 301—311 (1928)] wie folgt: $q(t)$ sei eine gerade periodische L -integrable Funktion, und es sei $q(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$. $\Phi_\beta(t)$ bedeute das β -fach iterierte Integral von $q(t)$. Die Fourierreihe von $q(t)$ konvergiert für $t = 0$ zum Wert Null, wenn ein Exponent $\lambda \geq 1$ derart existiert, daß die Bedingungen (1) $\Phi_\beta(t) = o(t^\gamma)$ ($\gamma \geq \beta$) und (2) $\int_0^t |d\{u^\lambda q(u)\}| = O(t)$ ($0 \leq t \leq \eta$) mit $\lambda = \gamma/\beta \geq 1$ erfüllt sind. V. Garten.

Yûjôbô, Zuiman: A theorem on Fourier series. *Kôdai math. Sem. Reports* 1954, 8—10 (1954).

The author proves the following theorem: Let $f(x, t)$, defined in $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t \leq 1$, have period 2π in x , be measurable with respect to x for each t and let there exist a function $S(x)$ with period 2π and integrable in $(0, 2\pi)$ such that $f(x, t) \leq S(x)$ for all x and t . Further let $f(x, t)$ be continuous with respect to t in $[0, 1]$ for each x belonging to a set $A \subset (0, 2\pi)$ of positive measure. Then the Fourier series of $f(x, t)$ is summable $(C, 1)$ to $f(x, t)$ almost everywhere for x in A and uniformly with respect to t in $0 \leq t \leq 1$. The author shows that for every $\varepsilon > 0$, there exists a closed set $F \subset A$ such that $m(A - F) < \varepsilon$ while $f(x, t)$ is continuous in (x, t) for $x \in F$ and $0 \leq t \leq 1$. Using this, the author proves his theorem, following closely the classical argument for a continuous function of one variable.

V. Ganapathy Iyer.

Eckart, Gottfried: Über Fourierreihen, die in einem Teilintervall der Entwicklungsperiode identisch verschwinden. *S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* 1953, 169—190 (1954).

If $f(x)$ is any periodic function of period 2π , L -integrable in $[0, 2\pi]$, and $f(x) \sim 2^{-1}a_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ is its Fourier series, necessary and sufficient conditions are sought in order that $f(x) = 0$ almost everywhere in a subinterval of $[0, 2\pi]$. We can always suppose that such an interval is of the form $[0, b]$ with $0 < b < 2\pi$,

and, therefore, the equality holds $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_b^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$ concerning the

Laplace transform of $f(x)$. The author deduces from this remark an identity in terms of the coefficients a_n, b_n , the number b , and the complex variable s , which is the required condition. We shall refer to the paper for the somewhat lengthy identity. Another identity is obtained by means of the Laplace transform on the finite interval $[0, 2\pi]$.

L. Cesari.

Žak, I. E.: Über einen Satz von Zygmund über konjugierte Funktionen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 97, 387—389 (1954) [Russisch].

Verf. betrachtet 2π -periodische Funktionen $f(x, y)$, ferner die drei konjugierten Funktionen $\tilde{f}^{(1)}, \tilde{f}^{(2)}, \tilde{f}$ (bezüglich x bzw. y bzw. x und y), vgl. Cesari, dies. Zbl. 19, 217; Žak, dies. Zbl. 47, 306. Für $0 < \alpha \leq 1$ wird die Klasse $\text{Lip } \alpha$ in bekannter Weise definiert, die Klasse $Z^{(\alpha)}$ durch $f(x+h, y+\eta) + f(x-h, y-\eta) - 2f(x, y) = O(h^\alpha) + O(\eta^\alpha)$ ($h, \eta \rightarrow 0$; gleichmäßig in x, y). Wie bei einer Veränderlichen weist man für $0 < \alpha \leq 1$ die Beziehung $\text{Lip } \alpha = Z^{(\alpha)}$ nach. Aus einem früheren Ergebnis des Verf. (dies. Zbl. 47, 306) folgt nun sofort: „Ist $f \in Z^{(\alpha)}$ ($0 < \alpha < 1$), so ist $\tilde{f}^{(1)}, \tilde{f}^{(2)}, \tilde{f} \in Z^{(\beta)}$ ($0 < \beta < \alpha$), jedoch gehören die Konjugierten nicht immer $Z^{(\alpha)}$ an.“ Verf. konstruiert nun ein $f \in Z^{(1)}$, so daß weder $\tilde{f}^{(1)}$ noch \tilde{f} zu $Z^{(1)}$ gehören. Bei Funktionen einer Veränderlichen gilt jedoch nach Privalov [Bull. Soc. math. France 44, 100—103 (1916)] und Zygmund [Duke math. J. 12, 47—46 (1945)], daß $f \in Z^{(\alpha)}$ stets $\tilde{f} \in Z^{(\alpha)}$ zur Folge hat ($0 < \alpha \leq 1$).

K. Zeller.

Koizumi, Sumiyuki und Gen-ichirô Sunouchi: Generalized Fourier integrals. *Tôkoku math. J., II. Ser.* 5, 243—260 (1954).

A result due to Hahn states that if $(1 + |x|)^{-1} f(x) \in L(-\infty, \infty)$, then $f(x)$ is representable by the generalized Fourier integral (GFI) of $f(x)$. He has also extended this result to the case of functions satisfying the condition $(1 + |x|^2)^{-1} f(x) \in L(-\infty, \infty)$. Izumi has proved analogous results for the case $(1 + |x|^\alpha)^{-1} f(x) \in L(-\infty, \infty)$ where $1 < \alpha < 2$ or $\alpha = 2, 3, 4, \dots$. The authors give certain further generalizations of the above results. They first prove that if $(1 + |x|^\alpha)^{-1} f(x) \in L(-\infty, \infty)$ ($\alpha > 1$), then $f(x)$ is representable by certain GFI of the Hahn-type. Secondly they prove that if, in addition, the behaviour of such functions is suitably restricted

at infinity, then they are representable by the GFI of the Burkhill-type, thus generalizing a theorem of Burkhill. Lastly they prove a theorem for the case $(1 + |x|^x)^{-1} |f(x)|^p$ $p > 1$, $\alpha > 1$. J. A. Siddiqui.

Shapiro, Victor L.: Circular summability C of double trigonometric series Trans. Amer. math. Soc. **76**, 223—233 (1954).

The present paper concerns the Riemann theory of double trigonometric series

$$(1) \quad \sum a_{mn} \exp i(mx + ny),$$

when Cesaro circular summability (C, η) and generalized Laplacians are used. A necessary and sufficient condition is given concerning summability C [i. e., summability (C, η) of order η large enough] which is similar to Plessner's condition for simple trigonometric series (see A. Zygmund this Zbl. **11**, 17, pp. 256—261 of this book). If $S_R(x, y) = \sum_{m,n} a_{mn} \exp i(mx + ny)$ where \sum

is extended over all m, n with $m^2 + n^2 \leq R^2$, and $\sigma_{\eta, R}(x, y) = 2^{-\eta} R^{-2\eta} \int_0^R S_u(x, y) (R^2 - u^2)^{\eta-1} du$

then (1) is said to be circularly summable (C, η) , $\eta > 0$, if $\sigma_{\eta, R}(x, y) \rightarrow L(x, y)$ as $R \rightarrow \infty$. A function $f(x, y)$ is said to have a generalized Laplacian $\Delta_r f(x_0, y_0)$ of order r at the point (x_0, y_0) if

$$(2) \quad (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) d\theta = \alpha_0 + \alpha_1 t^2/2! + \dots + \alpha_r t^{2r}/(2^r r!)^2 + o(t^{2r}) \text{ as } t \rightarrow 0$$

I. If $\Delta_r f(x_0, y_0)$ exists, then the series obtained by (1) by applying the Laplacian operator formally r times is circularly summable $(C, 2r)$ to $\Delta_r f(x_0, y_0)$ for all $x > r + 1/2$. II. If (1) is circularly summable $(C, 2\alpha)$, $2\alpha > 0$ an integer, at the point (x_0, y_0) to the value s , if $|a_{mn}| \leq K(m^2 + n^2)^{-\alpha-\varepsilon}$ for some $\varepsilon > 0$, $K > 0$, if $r \geq \alpha + 1$ is any integer, and

$F(x, y) = a_0(x + y)^{2r} 2^{-2} ((2r)!)^{-1} + \sum (-1)^r a_{mn} (m^2 + n^2)^{-r} \exp i(mx + ny)$, then $\Delta_{2r} F(x_0, y_0)$ exists and is equal to s . L. Cesari.

Spezielle Funktionen:

Piloly, H.: Zolotareffsche rationale Funktionen. — Zusammenfassender Bericht. Z. angew. Math. Mech. **34**, 175—189 (1954).

Als Zolotareffsche oder Z-Funktionen bezeichnet Verf. aus der Klasse der geraden oder ungeraden Funktionen der Form $\prod_{i=1}^n \frac{z - a_i}{1 - \bar{a}_i z}$ mit $-1 < a_i < +1$ die

jenigen, deren Maximalbetrag bei festem n und k ($0 < k < 1$) auf $-|k| \leq z \leq +|k|$ minimal ist. Die Arbeit bringt die Theorie dieser Z-Funktionen, die für technische Probleme von Bedeutung sind. Wichtigstes Hilfsmittel sind die Jacobischen elliptischen Funktionen, durch die sich die Z-Funktionen explizit darstellen lassen.

H. Tietz.

Dunski, Vital: Les fonctions de Bessel d'argument complexe $x | j$ et les fonctions de Kelvin d'ordre zéro et 1. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **23**, 52—59 (1954).

Verf. gibt auf dem Weg über die Kelvinischen Funktionen ber_n , bei_n , ker_n , kei_n eine Tafel der Funktionen $J_n(x | j)$, $H_n^{(1)}(x | j)$, $n = 0, 1$ ($j^2 = -1$) für große Werte von x ($10 \leq x \leq 72$).

O. Volk.

Ragab, F. M.: Integrals involving E -functions and modified Bessel functions of the second kind. Proc. Glasgow math. Assoc. **2**, 52—56 (1954).

Es werden die Integrale $\int_0^\infty \lambda^{n-1} K_n(\lambda) E(p; \nu_r; q; q_s; z; \lambda) d\lambda$, $\Re(m \pm n) > 0$,

$|\arg z| < \pi$, und $\int_0^\infty K_n(\lambda) \lambda^{k-1} E(p; \nu_r; q; q_s; \lambda^2 z) d\lambda$, $p = q + 1$, $\Re(k \pm n + 2\nu_r) > 0$,

$r = 1, 2, \dots, p$; $|\arg z| < \pi$ durch E -Funktionen dargestellt. Durch Spezi-

sierung ergeben sich hieraus Darstellungen der Integrale $\int_0^\infty \lambda^{k-1} K_m(\lambda) \frac{J_n(z/\lambda)}{K_n(z/\lambda)} d\lambda$

durch hypergeometrische Funktionen (vgl. T. M. MacRobert, dies. Zbl. **52**, 69).

O. Volk.

Denisjuk, I. N.: Über eine Verallgemeinerung der Laguerreschen Polynome und das damit zusammenhängende Cauchy'sche Problem für eine partielle Differenzengleichung. Ukrain. mat. Žurn. 6, 245–256 (1954) [Russisch].

Bei der Behandlung einer technischen Aufgabe (Spannungen in Fallschirmseilen) wird man auf komplexe Integrale der Form
$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(p-1)^n (1-p/\lambda)^n}{(p+1)^{n+1} (1+p/\lambda)^{n+1}} e^{pt} dp$$

geführt: λ ist ein Parameter, der Weg umkreist die singulären Punkte. Verf. schreibt das Integral in der Form $e^{-t} L_n(2t, \lambda) + e^{-\lambda t} A_n(2t, \lambda)$; L_n und A_n sind Polynome n -ten Grades in t . Für $\lambda \rightarrow \infty$ geht L_n in das gewöhnliche Laguerresche Polynom über. Die Polynome werden näher untersucht. Es bestehen die beiden Gleichungen

$$2(1-\lambda) \Delta L_n'' + 4 \Delta L_n'' = 2(1+\lambda) (L_n - 2 L_n'), \\ 2(1-\lambda) \Delta A_n'' + 4 \Delta A_n'' = 2(1+\lambda) (\lambda A_n - 2 A_n'),$$

wobei der Strich die Ableitung nach t , Δ die Differenzenbildung nach n bezeichnet. Für die Koeffizienten der Polynome ergeben sich Rekursionsformeln, die vom Verf. etwas irreführend als „partielle Differenzengleichungen“ bezeichnet und durch langwierige elementare Rechnungen näher behandelt werden.

W. Hahn.

Gouarné, René: Sur une généralisation des polynomes d'Hermite en relation avec le dénombrement des permutations de n objets ne présentant pas de cycles d'ordre supérieur à un entier donné p . C. r. Acad. Sci., Paris 239, 470–472 (1954).

Die Verallgemeinerung der Hermite'schen Polynome geschieht durch die Rekursion

$$G(n, p) = x G(n-1, p) + (n-1) G(n-2, p) + \dots + (n-1)(n-2) \dots \\ \dots (n-p+1) G(n-p, p) \quad \text{mit} \quad G(n, 1) = x^n, \quad G(n, 2) = (-i)^n H_n(ix).$$

Verf. zeigt, daß gilt: $(d/dx) G(n, p) = n G(n-1, p)$, $y^{(p)} + y^{(p-1)} + \dots + x y' - n y = 0$ mit $y = G(n, p)$. Außerdem leitet er eine erzeugende Funktion für die Funktionen $G(n, p)$ ab. Anmerkung des Ref.: Wesentlich allgemeinere Polynome dieser Art hat bereits S. Pincherle [Acta math. 16, 341–363 (1892/1893)] untersucht.

O. Volk.

Merli, Luigi: Una formula di approssimazione asintotica per i polinomi di Tchebycheff-Hermite e valutazione numerica del resto. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 16, 611–614 (1954).

Se $H_n(x)$ indica l' n -esimo polinomio di Hermite è noto che sussiste la seguente formula di rappresentazione asintotica

$$(-1)^n L_n e^{-x^2/2} H_n(x) = \cos \left[N^{1/2} x - \frac{n\pi}{2} \right] \sum_{v=0}^{p-1} u_v(x) N^{-v} \\ + N^{-1/2} \sin \left[N^{1/2} x - \frac{n\pi}{2} \right] \sum_{v=0}^{p-1} v_v(x) N^{-v} + R_p(n, x) N^{-p},$$

dove $N = 2n+1$, $L_n = \Gamma(n+1)/\Gamma(n+1)$ se n è pari, $L_n = N^{1/2} \Gamma(n/2+3/2)/\Gamma(n+2)$ se n è dispari. $R(n, x) = O(1)$ rispetto ad n . $u_v(x)$, $v_v(x)$ sono dei polinomi e $u_0(x) = 1$, $v_0(x) = x^3/6$. Costruendo un'equazione integrale cui soddisfa $L_n(x) = \pi^{-1/4} (2^n n!)^{-1/2} e^{-x^2/2} H_n(x)$, l'A. dimostra che $u_2(x) = x^2/4 - x^6/72$, $v_2(x) = -x/4 + x^5/15 - x^9/1296$, $R_2(n, x) = (1+x^4+x^8)x^{1/2} + x^{25/2} n^{1/2} + (1+x^4)x^3/N^{1/2} + (1+x^6)N$, $x > 0$.

G. Sansone.

Skovgaard, H.: On inequalities of the Turán type. Math. Scandinav. 2, 65–73 (1954).

G. Szegő (questo Zbl. 32, 275) nel 1948 diede una dimostrazione della disuguaglianza di P. Turán (1) $P_n^2(x) - P_{n-1}(x) P_{n+1}(x) \geq 0$, $-1 \leq x \leq 1$, $n \geq 1$, essendo $\{P_n(x)\}$ la successione dei polinomi di Legendre. La (1) è stata successivamente estesa ad altre classi di funzioni $\{u_n(x)\}$ per le quali è stata dimostrata la disuguaglianza (2) $U_n(x) = u_n^2(x) - u_{n-1}(x) u_{n+1}(x) \geq 0$. I metodi dimostrativi erano basati: a) sull'uso di formule ricorrenti (cfr. V. R. Thiruvengatachar and T. S. Nanjundiah, questo Zbl. 34, 199); b) sullo studio di un'equazione differenziale cui soddisfa U_n (cfr. G. Sansone, questo Zbl. 43, 72); c) sul metodo di Szegő che ha a fondamento

un teorema di Pólya e Schur relativo alle funzioni intere. — L'A. prova che la (2) può ottenersi, partendo dalla disuguaglianza di Laguerre $F(z)F''(z) - (F'(z))^2 \leq 0$, per la funzione $F(z) = C e^{-\alpha z^2 + \beta z} z^r \prod_m \left(1 - \frac{z}{z_m}\right) e^{z/z_m}$; $\alpha \geq 0$; C, β, z_m reali, $\sum_m z_m^{-2} < \infty$, oppure per classi di funzioni $u_n(x)$ definite dalla relazione $u_n = D^n F(x)$ (dove $D^n F$ sta per $d^n F/dx^n$), o per classi di funzioni per le quali $\Delta_n(x)$ vale il prodotto di una funzione non positiva per $D(u'_n(x)/u_n(x))$.

G. Sansone.

Orts, J. Ma.: Über einen Satz von Poincaré. Revista mat. Hisp. Amer., IV. Ser. 14, 44—49 (1954) [Spanisch].

Poincaré hat gezeigt: Wenn für eine Folge von Polynomen $\Pi_n(z)$ eine Rekursion der Art

$$\alpha(n, z) \Pi_{n+1}(z) + \beta(n, z) \Pi_n(z) + \gamma(n, z) \Pi_{n-1}(z) = 0, \\ \alpha(n, z) = a(z) n^k + \dots, \quad \beta(n, z) = b(z) n^k + \dots, \quad \gamma(n, z) = c(z) n^k + \dots$$

gilt, so konvergiert $\Pi_{n+1}(z)/\Pi_n(z)$ für $n \rightarrow \infty$ im allgemeinen gegen die absolut größte Wurzel von $a(z)\lambda^2 + b(z)\lambda + c(z) = 0$. Verf. zeigt dies auch direkt für die Tschebyscheffschen und die Legendreschen Polynome $P_n(x)$, $x \in [-1, 1]$, für die letzteren unter Verwendung der Formeln $(n+1)[P_{n+1}(x) - x P_n(x)] = n[x P_n(x) - P_{n-1}(x)]$ und $P_n^2(x) \leq P_{n-1}(x) P_{n+1}(x)$ (die letztere Beziehung wird aus dem Laplaceschen Integral mittels der Schwarzschen Ungleichung gefolgert).

K. Prachar.

Walsh, J. L. and J. P. Evans: Note on the distribution of zeros of extremal polynomials. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 332—337 (1954).

E sei eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge der z -Ebene und τ ihr transfiniter Durchmesser. Betrachtet werden Polynomfolgen $p_n(z) = z^n + a_1^{(n)} z^{n-1} + \dots + a_n^{(n)}$, für welche die Beziehung $(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \max_E |p_n(z)|^{1/n} = \tau$ besteht (dies ist z. B. der Fall für die Tschebyscheffschen und andere Extremalpolynome). $E' \supseteq E$ möge sämtliche Nullstellen der p_n enthalten und besitze das zusammenhängende Komplement K' . Aus (1) folgt dann

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |p_n(z)|^{1/n} = |\Phi(z)| \text{ auf } K',$$

wobei $\Phi(z)$ das Komplement K von E (evtl. mehrblättrig) auf den Kreis $|\Phi| = \tau$ mit $\Phi(\infty) = \infty$ abbildet. Da (2) in $K - K'$ nicht gilt, suchen Verf. eine Verallgemeinerung von (2), die sich auch auf $K - K'$ erstreckt, und die — wie (2) — Schlüsse auf die Nullstellendichte der p_n ermöglicht. Die Antwort lautet: Falls $\tau > 0$, ist $\log |\Phi(z)|$ auf K exakte harmonische Majorante für jede Teilfolge der $|p_n(z)|^{1/n}$. Von den hieraus fließenden Folgerungen sei erwähnt: Wenn c_n die Anzahl der Nullstellen von p_n innerhalb der in K verlaufenden analytischen Jordankurve c , die den Randteil B von K umschließt, bezeichnet, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n/n = \omega(\infty, B, K)$, wobei

$\omega(z, B, K)$ das harmonische Maß von B in K bedeutet. Speziell ist $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n/n = 0$ für die Nullstellenanzahl d_n von p_n in einem Gebiet D mit $D \subset K$.

H. Tietz.

Sips, R.: Recherches sur les fonctions de Mathieu. V, VI. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 23, 41—51, 90—102 (1954).

Im Anschluß an die Abschnitte I—IV (vgl. dies. Zbl. 52, 67) behandelt Verf. hier das Verhalten der Mathieuschen Funktionen ganzer Ordnung und ihrer Integralrelationen bei der Ausartung der elliptischen Zylinderkoordinaten zu Kreis- und parabolischen Zylinderkoordinaten. Weiter werden bisher für die Separation von $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ aufgeschriebene Formeln auf $\Delta u - \lambda^2 u = 0$ umgeschrieben. Für den dreidimensionalen Fall werden Integraldarstellungen von e^{ikR}/R durch Produkte von Exponentialfunktionen von z und Mathieuschen Funktionen angegeben, die neu sein dürften. Ferner wird die Variablensubstitution $\xi = \xi_1 - i\pi/2$, $\eta = \pi/2 - \eta_1$, $c = i c_1$ zur Gewinnung weiterer Formeln verwandt. Schließlich gibt Verf. asymptotische Formeln für die modifizierten Mathieuschen Funktionen bei großem Argument. Abgesehen von den dreidimensionalen Formeln gelten auch für die Abschnitte V und VI die allgemeinen Bemerkungen des Referats zu I—IV.

F. W. Schäfke.

Marx, Imanuel: Recurrence relations for prolate spheroidal wave functions. J. Math. Physics 32, 269—275 (1954).

Whittaker hat im J. London math. Soc. 88, 4 (1929) ein Verfahren zur Herleitung von Rekursionsformeln für Mathieusche Funktionen mit benachbarten Indices angegeben. Dieses Verfahren wird hier auf die Sphäroidfunktionen übertragen. Die Koeffizienten der Rekursionsformeln werden nicht berechnet.

J. Meixner.

Huber, A.: Zur Darstellung der Sphäroidfunktionen. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anzeiger 1954, 4—7 (1954).

Es handelt sich nicht um Sphäroidfunktionen (rotationselliptische Koordinaten), sondern um Kegelfunktionen (vgl. Magnus-Oberhettinger, dies. Zbl. 39, 297, insbesondere S. 95 dieses Buches). Verf. gewinnt hier eine für große $\lambda > 0$ und

kleine $\alpha > 0$ brauchbare Entwicklung von $\mathfrak{P}_{i\lambda-1/2}(\mathfrak{Cof} \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda t \cdot dt}{\sqrt{\mathfrak{Cof} \alpha - \mathfrak{Cof} t}}$ mittels der Substitution $t = \alpha - \tau^2$, entsprechender Umformung und gliedweiser Integration. Die Konvergenz ist besser als für $\sum_n 2^{-n}$. F. W. Schäpfke.

Huber, A.: Über einen Gammaquotienten. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anzeiger 1954, 7—10 (1954).

Für den bei der Darstellung der Kegelfunktionen (!) durch hypergeometrische Reihen auftretenden Gammaquotienten gibt Verf. die Formel ($\lambda > 0$):

$$\frac{\Gamma(i\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(i\lambda - 1)} = \sqrt{\pi} 2^{-2i\lambda} \left[\frac{\Im g \lambda \pi}{\lambda \pi} \cdot e^{i\sigma(\lambda)} \right], \quad \sigma(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{2\lambda^3}{n(n+2\lambda^2)}.$$

Für $\lambda = 0,0,1,2,0$ wird $\sigma(\lambda)$ mit vier Dezimalen angegeben. Für $\lambda > 2$ genügt bei dieser Genauigkeit die Stirlingsche Formel. F. W. Schäpfke.

Gatteschi, Luigi: Il termine complementare nella formula di Hilb-Szegö ed una nuova valutazione asintotica degli zeri dei polinomi ultrasferici. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 36, 143—158 (1954).

In der Formel von Hilb-Szegö für die ultrasphärischen Polynome $P_n^{(\lambda)}$: $\vartheta^{-1/2} (\sin \vartheta)^{\lambda} P_n^{(\lambda)} (\cos \vartheta) = C(n, \lambda) J_{\lambda-1/2} \{ (n + \lambda) \vartheta \} + R_{n\lambda}$, wird durch genaue numerische Abschätzungen u. a. gezeigt

$$|R_{n\lambda}| < (\lambda(1-\lambda)/\Gamma(\lambda)) \{4,075 (n/2)^{\lambda-3} \vartheta^{-1/2} + 0,892 (n/2)^{\lambda-2} \vartheta^{1/2}\}, \\ \pi/2(n+\lambda) < \vartheta \leq \pi/2, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Für die r -te Nullstelle $\vartheta_{nr}^{(\lambda)}$ von $P_n^{(\lambda)}(\cos \vartheta)$ wird erhalten

$$0 < [1/(n+\lambda)] j_{\lambda-1/2,r} - \vartheta_{nr}^{(\lambda)} < (n!/\Gamma(n+2\lambda)) n^{2\lambda-5} t(r, \lambda), \\ 0 < \lambda < 1, \quad r = 1, 2, \dots, [n/2],$$

$t(r, \lambda) = \lambda(\lambda-1) (75 + 19r) (2r + \lambda - 1) / \{ (3,24 - (1-\lambda)^2) (2r + \lambda - 1) - 2,23 \}$, $j_{\lambda-1/2,r}$ = r -te Nullstelle von $J_{\lambda-1/2}$. Eine Tabelle für die $t(r, \lambda)$, $r = 1, 2, \dots, 10$, $\lambda = 1/10, \dots, 9/10$, wird ebenfalls gegeben. K. Prachar.

Agarwal, R. P.: On Bessel polynomials. Canadian J. Math. 6, 410—415 (1954).

Verf. zeigt, daß die von verschiedenen Autoren untersuchten Bessel-Polynome in der Form $y_n(x, a, b) = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(\epsilon)}{\Gamma(\epsilon+n)} p_{n-1, a-\epsilon-1}^{\epsilon} \left(1 + \frac{2\epsilon x}{b}\right)$ dargestellt werden können, wobei $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ die Jacobischen Polynome bedeuten. Damit sind die Eigenschaften der $y_n(x, a, b)$ meist leicht auf die der $P_n^{\alpha, \beta}$ zurückzuführen. Verf. beweist so bekannte und auch neue Resultate, z. B.

$$(2n+a)x y_n(x, a-1, b) = b(y_{n+1} - y_n), \quad y_n(x, a, b) = \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{b^n} x^n \int_C \frac{u^{2-a} e^{bu/x} du}{[u(u-1)]^{n+1}}$$

[wo a ganz, und C den Ursprung, aber nicht $u=1$ im Inneren enthält), $\sum_{v=1}^n \xi_v = -\frac{1}{2} b_v$ (wo ξ_v die Nullstellen von $y_n(x, a, b)$ sind]. K. Prachar.

Rathie, C. B.: Some infinite integrals involving E-functions. J. Indian math. Soc., n. Ser. 17, 167—175 (1954).

Ausgehend von Resultaten von T. M. MacRobert (dies. Zbl. 18, 61; 27, 213),

S. Goldstein (dies. Zbl. 5, 60) und N. A. Shāstri [Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 20, 211—223 (1944)] erhält man

$$E\left(\alpha, \beta, \gamma; \delta; \frac{p^2}{4}\right) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma + 1/2)} \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^{2\gamma-1} p \int_0^\infty e^{-px} x^{2\gamma-1} {}_2F_2\left(\alpha, \beta; \delta, \gamma + \frac{1}{2}; -x^2\right) dx$$

und ähnliche Relationen; ein Teil von diesen sind Verallgemeinerungen von Beziehungen, die A. Erdelyi [Proc. Benares math. Soc., n. Ser. 1, 39—53 (1939)] und H. Shanker (dies. Zbl. 39, 78) angegeben haben.

E. Kreyszig.

Rushton, S.: On the confluent hypergeometric function $M(\alpha, \gamma, x)$. Sankhyā 13, 369—376 (1954).

Es werden zunächst in der Arbeit die wichtigsten bekannten Eigenschaften der konfluenten hypergeometrischen oder der Kummerschen Funktion ${}_1F_1(\alpha, \gamma; x)$ aufgeführt. Die Rekursionsformeln werden zur Vertafelung dieser Funktionen benutzt, wenn der Parameter α jeweils immer um die Einheit wächst. Im Zusammenhang damit wird eine asymptotische Entwicklung für die Kummersche Funktion angegeben, in der ein besonderer die Konvergenz verbessernder Faktor auftritt. Die Vertafelung, deren Ergebnisse in der folgenden Arbeit gebracht werden, wurde zu statistischen Zwecken durchgeführt.

H. Buchholz.

Rushton, S. and E. D. Lang: Tables of the confluent hypergeometric function. Sankhyā 13, 377—411 (1954).

Die Arbeit enthält eine ziemlich umfangreiche Tafel mit den Zahlenwerten der Kummerschen Funktion ${}_1F_1(\alpha; \gamma; z)$ für $\gamma = 0.5(0.5)3.5$ und 4.5 und $z = 0.02(0.02)0.1(0.1)1.0(1.0)10.0(10.0)50.0, 100$ und 200. Der Parameter α hat ganzzahlige oder halbzahlige Werte aus dem Bereich $0 \cdots 50$. In den einzelnen Fällen erfolgt die Auswahl unter diesen Werten verschieden. Es werden sechs gültige Stellen hinter dem Komma angegeben. Die Tafel ergänzt die früheren Tafeln von Pran Nath (dies. Zbl. 44, 133).

H. Buchholz.

Slater, L. J.: The evaluation of the basic confluent hypergeometric functions. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 404—413 (1954).

In der Arbeit wird sowohl die durch die besondere Heinesche Reihe ${}_1\Phi_1(q^a; q^b; y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^a)_n}{(q^b)_n} \frac{y^n}{(q)_n}$ definierte Funktion untersucht als auch die damit verwandte Funktion ${}_1\Phi_1(q^a; q^b; q^{(n+1)/2} \cdot y)$, worin $(q^a)_n = (1 - q^a)(1 - q^{a+1}) \cdots (1 - q^{a+n-1})$ bedeutet. Für Werte von q in der Nähe von 1 nehmen diese Funktionen Werte an, die in der Nähe der Werte der Funktion ${}_1F_1(a, b; x)$ liegen, wenn $y = (1 - q)y$ gesetzt wird. Die Arbeit enthält alle Formeln, die für die numerische Berechnung dieser Funktionen notwendig sind. Insbesondere werden auch die hierher gehörigen asymptotischen Formeln mitgeteilt sowie die verschiedenen Rekursionsformeln. Die drei der Arbeit beigelegten Tafeln bringen die Zahlenwerte 1. der Funktion ${}_1\Phi_1(q^a; q^b; q^{(n+1)/2} \cdot y)$

$$a = 0,0(0,2)2,0 \quad b = 0,2(0,2)1,0 \quad y = 0,1(0,1)1,0 \quad q = 0,9$$

$$a = 0,0(0,2)2,0 \quad b = 0,2(0,2)1,0 \quad y = 0,01(0,01)0,10 \quad q = 0,99,$$

und 2. der Funktion ${}_1\Phi_1(q^a; q^b; y)$ für den Bereich

$$a = 0,0(0,2)2,0 \quad b = 0,2(0,2)1,0 \quad y = 0,1(0,1)0,9 \quad q = 0,9. \quad H. Buchholz.$$

Agarwal, R. P.: Some relations between basic hypergeometric functions of two variables. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 3, 76—82 (1954).

Die von Jackson [Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 13, 69—82 (1942)] definierten Reihen gehen aus den Appellschen hypergeometrischen Reihen hervor, indem man $n!$ durch $(1 - q) \cdots (1 - q^n)$ ersetzt usw. Verf. beweist einige formale Beziehungen zwischen „benachbarten“ Reihen (Differenz entsprechender Parameter gleich 1) bzw. den partiellen geometrischen Differenzen sowie eine Integraldarstellung. Bem. des Ref.: Die fraglichen Reihen lassen sich als Potenzreihen in einer der Ver-

änderlichen schreiben, deren Koeffizienten basische hypergeometrische Reihen der andern Variablen sind. Jeder formalen Beziehung für Reihen in einer Variablen, die gewissen Invarianzforderungen in den Parametern genügt (vgl. Heine, Kugelfunktionen, Berlin 1878, S. 97 ff.), entspricht also auch eine Beziehung zwischen den Reihen in zwei Variablen.

W. Hahn.

Funktionentheorie:

● Carathéodory, C.: Theory of functions of a complex variable. I. Translated by F. Steinhardt. New York: Chelsea Publishing Company 1954. XII, 301 p. \$ 5.—.

Goldenberg, H.: Complex roots of a transcendental equation. Math. Naz. 38, 161—165 (1954).

Ist $0 < b$, $1 < c$ und $[(b-1)z - c]/[(b+1)z - c] - e^{2z} = 0$, so folgt $\operatorname{Re}(z) < 0$. Tabellierung von Sonderfällen.

W. Maier.

Szegő, G. and A. Zygmund: On certain mean values of polynomials. J. Analyse math. 3, 225—244 (1954).

Ist $f(z)$ ein beliebiges Polynom vom festen Grad n , so bezeichnet man für ein gegebenes, positives p den Wert $\|f\|_p = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |f(z)|^p |dz| \right|^{1/p}$ als „Norm“ von $f(z)$ auf $|z| = 1$, und es

gilt $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ für $0 < p < q$. Für den Quotienten $\|f\|_q \|f\|_p^{-1}$ existiert bei festem n eine für alle Polynome gültige obere Schranke, und Verf. bestimmen zunächst ihre genaue Größenordnung für wachsendes n . Verf. zeigen, indem sie von einem Satz von W. H. Young ausgehen: $\|f\|_q \|f\|_p^{-1} \leq A_{p,q} n^{1/p-1/q}$, wobei die Konstante $A_{p,q}$ von n unabhängig ist. Für den allgemeineren

Normbegriff $\left| \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |f(z)|^p (1 - z^2)^{\alpha} |dz| \right|^{1/p}$, $\alpha > 0$, ergibt sich die Schranke $A_{p,q,\alpha} \cdot n^{(\alpha+1)(1/p-1/q)}$.

Nun wird die Untersuchung auf den Fall einer aus endlich vielen analytischen Bögen bestehenden

Kurve L übertragen, also auf $\|f\|_{p,L} = \left| L^{-1} \int_{z \in L} |f(z)|^p dz \right|^{1/p}$. Hier ergibt sich: $\frac{\|f\|_{q,L}}{\|f\|_{p,L}} <$

$A_{p,q,L} \cdot n^{(\alpha+1)(1/p-1/q)}$, wobei $\alpha \cdot \pi, 1 \leq \alpha \leq 2$, den größten auf L auftretenden Außenwinkel bedeutet. Für den besonders interessierenden Normquotienten $\frac{\|f\|_{q,L}}{\|f\|_{p,L}}$ ergibt sich bei $p(\alpha-1) > 1$ die Schranke $A_{p,q,L} \cdot n^{\alpha}$, ein Resultat, das teils frühere spezielle Ergebnisse enthält, teils sich mit ihnen überschneidet. Für $p \rightarrow \infty$ fällt die Untersuchung dieses Quotienten mit Verallgemeinerungen der Sätze von S. Bernstein und A. Markoff zusammen, wie sie schon früher von G. Szegő gegeben wurden. Für die Beweismethode ist die Verwendung der Abbildungsfunktion $A/L \rightarrow \omega \in \mathbb{D}$ charakteristisch, speziell der Eigenschaften ihrer Ableitung in der Umgebung einer Ecke von L . Erwähnt sei noch ein Resultat im Fall eines Quadrates L von der Seite a : Ist $\max_{z \in L} |f(z)| = 1$ auf L , so gilt dort: $|f'(z)| \leq A \cdot a n^{3/2}$, wo A eine absolute Konstante ist. Die bedeutsame und inhaltsreiche Arbeit ist dem Andenken an O. Szász gewidmet.

P. Heuser.

Penez, Jacqueline: Approximation by boundary values of analytic functions. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 240—243 (1954).

D is a finite multiply connected domain in the complex plane, bounded by a finite system C of rectifiable curves. $L^k = L^k(C)$, $k \geq 1$, is the space of (equivalence classes of) complex valued functions $f(z)$, L^k -integrable on C , with norm

$\|f\|_k = \int_C |f|^k dz$. $B^k = B^k(D)$ is the subspace of L^k of boundary values of functions

analytic in D (Hardy-class). Let $k \geq 1$. It is shown that, if $f \in L^k$, then there exists a unique minimal function $g \in B^k$ such that $\|f - g\|_k = \min_{h \in B^k} \|f - h\|_k$. Again,

if $1/k + 1/k' = 1$, and $L(f) = \int_C f \omega dz$, where $\omega \in L^{k'}$, is a linear functional on B^k ,

then $\|L\| = \min_{h \in B^{k'}} \|\omega - h\|_{k'}$. There are similar results for a slightly more general

subclass of L^k . The theorems are simple consequences of the Hahn-Banach extension theorem and the strict convexity of the spaces L^k when $k > 1$ (compare W. W. Rogosinski and H. S. Shapiro, this Zbl. 51, 56).

W. W. Rogosinski.

Frank, Evelyn and Oskar Perron: Remark on a certain class of continued fractions. Proc. Amer. math. Soc. 5, 270—283 (1954).

Verf. untersuchen in dieser Arbeit die Konvergenz der zu der Reihe $1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ korrespondierenden Kettenbrüche

$$(1) \quad k_0 p_0 + \frac{k_0(1 - \gamma_0 \bar{\gamma}_0) z}{\gamma_0 z} - \frac{1}{k_1 \gamma_1} + \frac{k_1(1 - \gamma_1 \bar{\gamma}_1) z}{\gamma_1 z} - \frac{1}{k_2 \gamma_2} + \dots,$$

wo die k_p und γ_p Konstanten sind, so daß $k_p \neq 0$ und $|\gamma_p| = 1$. In § 2 werden zunächst allgemeine Formeln für die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche von (1) abgeleitet. Die Rechnung

wird speziell für die Näherungszähler A_{2p} durchgeführt. In § 3 wird der Ausdruck $\prod_{i=0}^p (1 - \gamma_i \bar{\gamma}_i) = U_p, p = 0, 1, 2, \dots$, eingeführt. Es wird dann gezeigt, daß für $|U_p| \geq g(p+1)$, $p = 0, 1, 2, \dots$ (g eine positive Konstante) und $|U_p| \geq [(p+1)/p]^{1+\tau} |U_{p-1}|$ (p hinreichend groß und $\tau > 0$, jedoch beliebig klein) die Näherungsbrüche von (1) gegen 1 ($1 - z$) konvergieren. Weiter wird in § 2 gezeigt, daß für $|U_p| \leq G(p+1)$, wo G eine positive Konstante ist, der Kettenbruch (1) gegen eine meromorphe Funktion von $1/z$ mit $z = 0$ als wesentlich singularer Stelle konvergiert. In § 4 werden Kettenbrüche (1) betrachtet, die in verschiedenen Bereichen auch gegen verschiedene Funktionen konvergieren. Die Sätze (4, 1), (4, 2) und (4, 3) liefern Beispiele dazu. In Satz (4, 1) wird z. B. gezeigt, daß der Kettenbruch (1) mit $k_p = 2$ und $\gamma_p = (-1)^p, (p = 0, 1, 2, \dots)$, für $|z| < 1/2$ und $z = 1/2$ gegen $1/(1-z)$ und für $|z| > 1/2$ gegen $4-1/z$ konvergiert und daß für $|z| = 1/2$ die Näherungsbrüche gerader Ordnung gegen $1/(1-z)$ und die Näherungsbrüche ungerader Ordnung gegen $4-1/z$ konvergieren, der Kettenbruch in diesem Fall also divergiert. In § 5 wird darauf hingewiesen, daß die Näherungsbrüche von (1) sowohl nach Reihen aufsteigend in z wie nach Reihen absteigend in $1/z$ entwickelt werden können. Der normale Fall, daß der Kettenbruch für kleine Werte von z mit dem Wert der Reihenentwicklung nach aufsteigenden Potenzen von z und für große Werte mit dem Wert der Reihenentwicklung nach absteigenden Potenzen von $1/z$ übereinstimmt, liegt z. B. in Satz (4, 1) vor, während in § 3 Fälle betrachtet werden, wo dies nicht zutrifft.

J. Mall.

Perron, Oskar: Über die Preece'schen Kettenbrüche. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1953, 21—56 (1954).

Verf. bringt in dieser Arbeit strenge Beweise für die Gültigkeit der Preece'schen Formeln über Kettenbrüche:

$$(1) \quad \int_0^\infty \frac{2e^{-xt}}{e^t + e^{-t}} dt = \left[\frac{1}{x} + \frac{\nu^2}{x} \right]_{\nu=1}^\infty, \quad (2) \quad \int_0^\infty \frac{2te^{-xt}}{e^t + e^{-t}} dt = \left[\frac{1}{x^2-1} + \frac{4\nu^2}{1} + \frac{4\nu^2}{x^2-1} \right]_{\nu=1}^\infty,$$

$$(3) \quad \int_0^\infty \frac{2te^{-xt}}{e^t - e^{-t}} dt = \left[\frac{1}{x} + \frac{\nu^4}{(2\nu+1)x} \right]_{\nu=1}^\infty,$$

$$(4) \quad \int_0^\infty \frac{2t^2 e^{-xt}}{e^t - e^{-t}} dt = \left[\frac{1}{x^2-1} + \frac{2\nu^3}{1} + \frac{2\nu^3}{(2\nu+1)(x^2-1)} \right]_{\nu=1}^\infty.$$

Verf. verwendet zum Beweis der obigen Formeln, die als Spezialfälle Formeln von Ramanujan enthalten, und zum Beweis einiger weiterer Formeln die Transformation von Bauer und Muir, die er in § 2 der Abhandlung genauer erläutert. Das Beweisverfahren gestaltet sich bei allen in den Paragraphen 3—10 behandelten Beispielen so, daß Verf. zunächst gemäß dem Lehrbuch von Perron (Lehre von den Kettenbrüchen, S. 239, Satz 10, 2. Auflage, Leipzig 1929) die Konvergenz der jeweils betrachteten Kettenbrüche feststellt. Für die durch die Kettenbrüche dargestellten Funktionen gewinnt Verf. sodann mit Hilfe der Transformationen von Bauer und Muir Funktionalgleichungen. Diese Funktionalgleichungen führen ihn schließlich zu Reihenentwicklungen für die einzelnen Funktionen, aus denen er weiter, so weit möglich, entsprechende Integraldarstellungen gewinnt. In den Paragraphen 5, 8, 4 und 10 beweist Verf. so die obigen Preece'schen Formeln (1), (2), (3) und (4). Die Preece'schen Formeln ergeben sich dabei als Spezialfälle noch allgemeinerer Formeln, bei denen sich die durch die Kettenbrüche definierten Funktionen durch die Γ -Funktion und ihre Ableitungen darstellen lassen. In § 3 beweist Verf. eine von Ramanujan in dessen Collected Papers (Cambridge 1927) veröffentlichte Formel. In § 6 beweist Verf. eine Verallgemeinerung der Formel (1) von Preece, bei der unter dem Integral statt 2 der Faktor 2^k steht. In § 7 beweist Verf. die Formel:

$$\frac{x^2-1}{2} + 8 \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{4}(x+3))}{\Gamma(\frac{1}{4}(x+1))} \right]^4 = \left[x^2-1 + \frac{(2\nu-1)^2}{1} + \frac{(2\nu-1)^2}{x^2-1} \right]_{\nu=1}^\infty.$$

In § 9 beweist er ebenfalls eine Formel über die Darstellung einer Summe von Funktionen Γ'/Γ mit verschiedenem Argument durch einen Kettenbruch. Der Beweis der Preece'schen Formel (4)

in § 10 erfordert eine zweimalige Anwendung der Transformation von Bauer und Muir. In § 12 wird darauf hingewiesen, daß der Geltungsbereich der gefundenen Formeln wesentlich erweitert werden kann, was darauf beruht, daß die für die verschiedenen Kettenbrüche gefundenen Ausdrücke durchwegs analytische Funktionen von x und den vorkommenden Parametern sind. Das vom Verf. angewandte elegante Beweisverfahren dürfte wohl bei weiteren Kettenbrüchen, die ähnlich wie die hier behandelten gebaut sind, durchgeführt werden können. *J. Mall.*

Korevaar, Jacob: Numerical Tauberian theorems for Dirichlet and Lambert series. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 152—160 (1954).

Verf. beweist den folgenden Satz über Dirichletsche Reihen (die A_i sind positive Konstanten): Es sei $|a_n| \leq A_3 n^{A_4}$ ($n = 1, 2, \dots$). Die durch die Reihe $\sum a_n n^{-w}$ definierte analytische Funktion $F(w)$ ($w = u + iv$) sei für $u \geq -a$ (wo $a > 0$) regulär und genüge dort einer Ungleichung $|F(w)| \leq A_5 e^{A_6 v}$. Es sei $a_n \geq -A_3/n$ ($n = 1, 2, \dots$). Für $s_n = a_1 + \dots + a_n$ gilt dann: $|s_n - F(0)| \leq C \log(n+1)$ ($n = 1, 2, \dots$), wo $C = C(A_2, \dots, A_6, a)$. Der Satz wird durch die Transformation $F(w) = \sum a_n n^{-w} = \{\Gamma(w)\}^{-1} \int_0^\infty (\sum a_n e^{-nx}) x^{w-1} dx$ auf einen früher vom Verf. bewiesenen entsprechenden Tauberschen Satz für Potenzreihen (dies. Zbl. 55, 58) zurückgeführt. Ersetzt man die Voraussetzung $u \geq -a$ durch (I) $u \geq -a/(\log(2+|v|))^b$ (mit einem $b \geq 0$), so kann man (falls $A_6 < \pi/2$ ist) beweisen, daß (II) $|s_n - F(0)| \leq C' (\log \log(n+1))^b \log(n+1)$ ($n = 1, 2, \dots$). Aus dem letzteren Satz leitet Verf. folgenden Tauberschen Satz für Lambertsche Reihen her: Es sei $\sum a_n x (e^{nx} - 1)$ für $x > 0$ konvergent, und ihre Summe $f(x)$ genüge (mit einem gewissen s und positiven A, α) den Ungleichungen $|f(x) - s| \leq A_1 n^\alpha$ für $0 < x < 1$, bzw. $\leq A_1$ für $x > 1$.

Es sei $a_n \geq -A_2/n$ ($n = 1, 2, \dots$). Falls $\zeta(w+1)$ keine Nullstellen im Gebiet (I) hat, so gilt eine Ungleichung (II) mit $F(0) = s$. — Verf. beweist auch, daß seine Abschätzungen im allgemeinen nicht verschärft werden können. *H. D. Kloosterman.*

Leont'ev, A. F.: Über die Überkonvergenz einer Reihe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 381—384 (1954) [Russisch].

Un théorème classique d'ultraconvergence d'Ostrowski est étendu aux séries $\sum \lambda_n f(\lambda_n, z)$, où $f(z)$ est une fonction entière d'ordre fini satisfaisant à des hypothèses complémentaires, et $\{\lambda_n\}$ une suite de nombres complexes dont une suite partielle vérifie $\lambda_{n_k+1} / \lambda_{n_k} \rightarrow \infty$: la convergence de la série dans un cercle de rayon suffisamment grand [dépendant de $f(z)$ et de $\{\lambda_n\}$] entraîne la convergence de la suite des sommes partielles de rangs n_k dans tout le domaine d'existence de la somme de la série. *G. Bourion.*

Pandey, Nirmala: On the analytic continuation of certain series. Math. Student 22, 95—100 (1954).

Die durch die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} e^{Ain\beta - sn^\alpha} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(z+n)}$, $A > 0$, $0 < \alpha < \beta < 1$, und $\sum_{n=2}^{\infty} e^{A(i \log n)^\beta - s \log n} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(z+n)}$, $A > 0$, $\beta > 2$, in $\Re(s) > 0$ und $\Re(z) > 1$ erklärten Funktionen sind ganze Funktionen von s und z . *W. Maak.*

Noble, M. E.: The consistency of cardinal series. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 139—142 (1954).

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |a_n| \log n < \infty$ und die ganze Funktion $f(x)$ durch die Kardinalreihe $\sin \pi x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{a_n}{x-n} + \frac{a_{-n}}{x+n} \right)$ definiert; dann ist

$$f(x) = \sin \pi(x - \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{f(n+\lambda)}{x-\lambda-n} + \frac{f(-n+\lambda)}{x-\lambda+n} \right) \quad \text{für } 0 < \lambda < 1$$

[vgl. J. M. Whittaker (dies. Zbl. 12, 155), S. 69]. Mit Hilfe von Fourier-Transformation und Biorthogonalreihen beweist Verf. ein anderes derartiges Konsistenztheorem, bei dem die zweite Kardinalreihe nicht durch eine große Verschiebung aus der ersten hervorgeht. Für die reellen Folgen α_n, β_n ($-\infty < n < \infty$) und die reelle Zahl λ sei $|\alpha_n - n| < D$, $|\beta_n - \lambda - n| < D$, $D < \pi^{-1} \log 2$; weiter sei $G(x) =$

$\lim_N (x - \alpha_0) \prod_{-N}^N (1 - x/\alpha_n)$, $H(x) = \lim_N (x - \beta_0) \prod_{-N}^N (1 - x/\beta_n)$, und $\sum_{-\infty}^{\infty} |A_n|^2 |n|^4 < \infty$. Dann läßt sich eine ganze Funktion $f(x)$ durch $G(x) \prod_{-\infty}^{\infty} A_n [(x - \alpha_n) G'(\alpha_n)]^{-1}$ definieren, und es ist $f(x) = \lim_N H(x) \sum_{-N}^N f(\beta_n) [(x - \beta_n) H'(\beta_n)]^{-1}$.

W. Meyer-König.

Wilson, R.: Note on a previous paper. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 99—101 (1954).

Some minor corrections of a previous paper (this Zbl. 50. 301) are made by the author, who also generalises theorem 3 (ibid.) to Theorem 3*: Necessary and sufficient conditions that an integral function of order ρ and mean type $F(z) = \sum a_n z^n$

shall have dominant elements of the form $E_\rho(\alpha, z) = \sum_0^\infty \frac{\alpha^n z^n}{\Gamma(n\sigma + \sigma)}$ (where $\sigma = \rho^{-1}$)

and its derivatives with respect to α , each of type h_1 , secondary elements of a similar kind of type h_2 , and so on, are that

$\lim_{n \rightarrow \infty} |D_{n,\nu}|^{q/n} = h_1^{\nu+1}$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, p_1 - 2$), $\lim_{n \rightarrow \infty} |D_{n,p_1-1}|^{q/n} = h_1^{p_1}$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} |D_{n,p_1+\nu}|^{q/n} = h_1^{p_1} h_2^{\nu+1}$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, p_2 - 2$), $\lim_{n \rightarrow \infty} |D_{n,p_1+p_2-1}|^{q/n} = h_1^{p_1} h_2^{p_2}$
 and so on.

N. A. Bowen.

Denjoy, Arnaud: L'expression asymptotique des fonctions entières. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1077—1080 (1954).

Soit $R(u) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{u}{\varrho_n}\right)$ une fonction entière d'ordre borélien ≤ 1 . Supposons que pour n entier positif ϱ_n coïncide avec une fonction $\varrho(n)$ ($n = \mu + i\nu$) régulière dans le demi-plan $\mu \geq 0$ (l'A. considère une région plus générale, nous simplifions l'énoncé ici), réelle, positive, croissante avec n . Alors

$$R(u) = \frac{k}{\sqrt[3]{u}} \exp \left[\int_0^u V_1(u) du + \Delta_1(u) \right],$$

où $V(u) = \int_0^\infty (u + \varrho(n))^{-1} dn$ (intégration le long du demi-axe réel > 0) est supposé

convergent pour $u \neq$ réel ≤ 0 , et $\Delta_1(u) = 2 \Re \left[\int_0^\infty \log \left(1 + \frac{\varrho(it)}{u} \right) \frac{it dr}{e^{2\pi\nu} - 1} \right]$.

En développant $\Delta_1(u)$ suivant les puissances entières négatives de u , on obtient un développement asymptotique de $\log R(u)$ pour $\Re(u)$ grand.

J. Horváth.

Denjoy, Arnaud: Calcul approché des zéros de certaines fonctions entières dont on connaît un développement asymptotique. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1849—1853 (1954).

Soit la fonction entière $F(u) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{u^2}{\varrho_n^2}\right) = H(u) I(u) (1 + \varepsilon_u)$ d'ordre ≤ 1 où $H(u)$ est réel, positif et croissant avec u , $\log H(u)$ régulier dans le plan coupure des u , $u I(u)$ tend vers une limite, admet un développement asymptotique suivant les puissances de u^{-1} et $\varepsilon_u = O(e^{-\Re(u)})$ pour $\Re(u) \rightarrow \infty$. Soit $x = \varrho(n) = \varrho_n$ alors si $\Re[H'(it)/H(it)] > 0$ pour $t > 0$, on a $n = \pi^{-1} \cdot \arg H(i\sqrt{x})$.

J. Horváth.

Shah, S. M. and S. K. Singh: The maximum term of an entire series. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect A 64, 80—89 (1954).

$f(z) = \sum a_n z^n$ étant une fonction entière, soit $M(r)$ le maximum de $|f(z)|$ sur $|z| = r$, soit $\nu(r)$ le rang du terme de module maximum et soit $\mu(r)$ le module de ce

terme. L'A. poursuit ses études antérieures sur la comparaison de $\log M(r)$, $\log \mu(r)$ et $\nu(r)$ pour $r \rightarrow +\infty$. Ici, il considère principalement les fonctions $f(z)$ d'ordre nul ou infini.

J. Dufresnoy.

Keldyš, M. V.: Über Reihen nach rationalen Brüchen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 377—380 (1954) [Russisch].

Ist $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z - h_n}$ eine meromorphe Funktion endlicher Ordnung und $\sum A_n < \infty$, so gilt für jedes $a \neq 0$ $1 - \delta(a) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, a)}{T(r)} = 1$; außer dem ist die Ordnung von $N(r, a)$ gleich der von $T(r)$. Ist überdies $\sum A_n \neq 0$, so gilt die Behauptung auch für $a = 0$ (Bezeichnungen nach Nevanlinna). — Man vergleiche die entsprechenden elementaren Aussagen über den Wertevorrat von endlichen Summen der in Rede stehenden Form.

K. Zeller.

Lehto, Olli: On the distribution of values of meromorphic functions of bounded characteristic. Acta math. 91, 87—112 (1954).

Eine in $|z| < 1$ meromorphe Funktion $f(z)$ mit beschränkter Charakteristik $T(r)$ nimmt bekanntlich fast überall auf $|z| = 1$ bei Winkelannäherung bestimmte Randwerte $f(e^{i\varphi})$ an, welche eine Menge positiver Kapazität bilden. Unter diesen beschränktartigen Funktionen betrachtet Verf. diejenigen, für welche eine abgeschlossene Punktmenge Γ mit positiver Kapazität und nichtleerem zusammenhängendem Komplement $C(\Gamma)$ die Eigenschaft hat, daß $f(e^{i\varphi}) \in \Gamma$ für fast alle φ gilt. (Vgl. die Voranzeige, dies. Zbl. 50, 83, sowie die verwandten Arbeiten, dies. Zbl. 51, 59; Math. scand. 1, 207—212 (1953)). Unter Anwendung des Argumentprinzips und Robinsscher Gleichgewichtspotentiale beweist Verf. erst ein zentrales Lemma in bezug auf den Grenzwert $N(1, a)$ der Anzahlfunktion $N(r, a)$ von $f(z)$: Ist $E \subset C(\Gamma)$ von positiver Kapazität und abgeschlossen, ferner $f(0) \in C(\Gamma)$, dann gibt es auf $\Gamma - E$ eine geeignete Massenbelegung μ , so daß $\int_{\Gamma - E} N(1, a) d\mu(a)$ eine nur von $f(0)$, aber sonst nicht von $f(z)$ abhängige positive Konstante ist.

Hieraus ergibt sich durch Heranziehung der Subharmonizität von $N(r, a)$ in bezug auf a , daß $N(1, a) \leq g(a, f(0), C(\Gamma))$ für $f(0)$ und $a \in C(\Gamma)$ gilt, mit möglicher Ausnahme einer a -Menge der Kapazität 0 (wobei die Ausnahme wirklich in bezug auf jedes a aus einer beliebigen abgeschlossenen harmonischen Nullmenge $\subset C(\Gamma)$ für geeignetes $f(z)$ stattfindet). Hier ist g die Greensche Funktion von $C(\Gamma)$ mit dem Pol $f(0)$ und zugleich $= N(1, a)$ für $f(z) = x(z)$, wobei $x(z)$ den z -Einheitskreis auf die universelle Überlagerungsfläche von $C(\Gamma)$ abbildet. Abgesehen von einer harmonischen Nullmenge gilt für gegebenes $f(z)$ durchgehends $N > g$ oder $N = g$, je nachdem ob $f(z)$ eine Wertmenge aus Γ von positiver Kapazität in $|z| < 1$ annimmt oder nicht. Falls nicht alle Werte $f(z)$ in Γ enthalten sind, bewirkt eine Lineartransformation, daß $f(0) \in C(\Gamma)$, und es folgt, daß $f(z)$ bis auf eine harmonische Nullmenge sogar jedes a aus $C(\Gamma)$ annimmt. — Falls kein Wert $f(z)$ für $|z| < 1$ zu Γ gehört, ist nach dem obigen $\Phi(1/(f-a)) = g(a, f(0), C(\Gamma)) = N(1, a) \leq 0$, und zwar höchstens in einer harmonischen Nullmenge > 0 . Verf. nennt a einen normalen Wert oder einen Ausnahmewert in bezug auf $f(z)$, je nachdem $\Phi = 0$ oder > 0 ist. In der Gleichung $\Phi = N = g$ ist die rechte Seite eine Gebietskonstante mit einbezogener Abhängigkeit von a und $f(0)$, sonst aber nicht von $f(z)$, während Φ und N als Schmiegungs- und Anzahlfunktionen angesehen werden können, da für Φ die folgende Darstellung gilt:

$$2\pi\Phi = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} g(f(re^{i\varphi}), a, C(\Gamma)) d\varphi.$$

Verf. führt den (für Ausnahmewerte a positiven) Defekt $\delta(a) = \Phi/g$ ein. Durch Beispiele wird gezeigt, daß δ alle Werte $0 \leq \delta \leq 1$ wirklich erreichen kann mit $\delta = 1$ nur für Picardsche Ausnahmewerte, von denen aber eine beliebige abgeschlossene harmonische Nullmenge in $C(\Gamma)$ vorkommen kann. — Unter manchen für die Wertverteilungslehre bedeutsamen Interpretationen und Anwendungen sei noch das folgende Resultat erwähnt: Es sei $|f(z)| \leq 1$ für $|z| < 1$, $f(0) = 0$ und z_1, z_2, \dots die Menge der a -Punkte von $f(z)$ in $|z| < 1$ mit $a \neq 0$. Dann ist $|a| \leq |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots$. Nur wenn $|f(e^{i\varphi})| = 1$ für fast alle φ , kann Gleichheit gelten, und gilt tatsächlich für alle a bis auf eine harmonische Nullmenge.

G. af Hallström.

Schild, A.: On a class of functions schlicht in the unit circle. Proc. Amer. math. Soc. 5, 115—120 (1954).

Die betrachtete Klasse ist die der Polynome $f_n(z) = z - \sum_{n=2}^N a_n z^n$ mit $a_n \geq 0$, $N \geq 2$, die in $|z| < 1$, aber in keinem größeren konzentrischen Kreise schlicht sind.

Es werden einige einfache Sätze bewiesen: das Bild des Einheitskreises ist nicht konvex, aber sternförmig, $|w| \leq 1/2$ wird stets vom Bild bedeckt usw.

H. Grunsky.

Kubo, Tadao: Symmetrization and univalent functions in an annulus. math. Soc. Japan 6, 55—67 (1954).

Für im Einheitskreis reguläre schlichte Funktionen $f(z)$ bewiesen Goodman und Jenkins Ungleichungen in bezug auf die Werte, die $f(z)$ daselbst nicht annimmt (dies. Zbl. 33, 176 bzw. 50, 83). Ziel des Verf. ist es, diese Sätze auf den Fall zu modifizieren, daß statt des Einheitskreises ein Kreisring betrachtet wird. Er stützt sich dabei auf ein Prinzip von Pólya über zirkuläre Symmetrisation und auf die Anwendung gewisser extremaler Abbildungsfunktionen. (i. af Hållström.)

Sun, Kung (Syn Gun): Über die Koeffizienten schlichter Funktionen. Acta math. Sinica 4, 87—100 und russische Zusammenfassg. 101—103 (1954) [Chinesisch].

Die Funktionen $f_k(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk+1}^{(k)} z^{nk+1}$ ($k = 1, 2, 3$) seien regulär und schlicht in $|z| < 1$. Wir beweisen I. Für $k = 1$ und $f_1(z) \in S_1(a) =$ Klasse der $f_1(z)$ mit $|f_1'(0)| = 2a$ gilt $|c_n^{(1)}| < \frac{1}{2} \exp \{1 - \frac{1}{2}(2-a)^2\} n + O(n^{1/7})$. [Verschärfung von Ergebnissen von Basilevici. Mat. Sbornik, n. Ser. 28, 283—292 (1951), sowie Lebedev und Milin, dies. Zbl. 44, 80]. Folgerungen: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f_1(z) \in S_1(a)} n^{-1} |c_n^{(1)}| \leq \frac{1}{2} \exp \{1 - \frac{1}{2}(2-a)^2\}$, speziell $\leq e/2$ für $a = 0$ und ≤ 1 für $a \leq 2 - 2^{1/2} (1 - \ln 2)^{1/2} = 1,216 \dots$ — II. Für $k = 2$ und $f_2(z) \in S_2(b) =$ Klasse der Funktionen $f_2(z)$ mit $|c_2^{(2)}| = b$ gilt $|c_n^{(2)}| < 2^{-1/4} 3^{1/2} \exp \{\frac{1}{2} - (1-b)^2\} + o(1)$ (Verschärfung von Ergebnissen von Alenicyan, dies. Zbl. 42, 316). Folgerungen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f_2(z) \in S_2(b)} |c_n^{(2)}| \leq 2^{-1/4} 3^{1/2} \exp \{\frac{1}{2} - (1-b)^2\},$$

speziell $\leq 2^{-1/4} 3^{1/2} e^{-1/2} = 0,8834 \dots$ für $b = 0$, und ≤ 1 für $b \leq 1 - \{1 - \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3\}^{1/2} = 0,0639 \dots$ — III. Für $k = 3$ und $f_3(z) \in S_3(c) =$ Klasse der $f_3(z)$ mit $c_4^{(3)} = c$ gilt $n^{1/3} |c_n^{(3)}| < 2^{3/4} 3^{-1/6} 7^{1/2} \exp \{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}(\frac{2}{3} - c)^2\} + o(1)$. [Verschärfung eines früheren Ergebnisses des Verf., Acta math. Sinica 3, 251—260 (1953)]. Folgerungen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f_3(z) \in S_3(c)} n^{1/3} |c_n^{(3)}| < 2^{3/4} 3^{-1/6} 7^{1/2} \exp \{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}(\frac{2}{3} - c)^2\} + o(1),$$

speziell $< 2^{3/4} 3^{-1/6} 7^{1/2} e^{-1/6} + o(1) = 3,312 \dots + o(1)$ für $c = 0$.

Aus der russ. Zusammenfassg.

Jenkins, James A.: On Bieberbach-Eilenberg functions. Trans. Amer. math. Soc. 76, 389—396 (1954).

The class of functions $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, $|z| < 1$, is considered that satisfy $f(z_1) \cdot f(z_2) \neq 1$ when $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$. The familiar Bieberbach-Eilenberg theorem is that $|a_1| \leq 1$. It is now proved that $|f(z)| \leq r/(1-r^2)^{1/2}$, $|z| = r < 1$ with equality only when $f(z) = f_r(z e^{i\theta})$ where $f_r(z) = (1-r^2)^{1/2} z/(1+irz)$. For fixed $|a_1|$ a best possible upper bound for $|f(z)|$, $|z| = r$, is also given; and a best possible lower bound when, in addition, $f(z)$ is schlicht in $|z| < 1$. These bounds are of rather complicated nature.

W. W. Rogosinski.

Gelfer, S. A.: Über die Koeffizienten der typisch-reellen Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 373—376 (1954) [Russisch].

The function $f(z) = a_{-1}/z + a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$ is said to be typically real in $|z| < 1$ if it has real values on the real axis, and only there. One may normalize by $\Re(f(z)) > 0$ for $\Re(z) > 0$, in which case necessarily $a_{-1} \leq 0$. The main result is: If $a_1 - a_{-1} = 1$, then $|a_n| \leq n$ for $n \geq 2$. When $a_{-1} = a_0 = 0$ and $a_1 = 1$, this was proved by the reviewer (this Zbl. 3, 393); the present extension is proved in a similar way. There are also best estimates for the coefficients in the case where $f(z) \neq 0$ in $|z| < 1$.

W. W. Rogosinski.

Meschkowski, Herbert: Verallgemeinerung der Poisson'schen Integralformel auf mehrfach zusammenhängende Bereiche. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A 1 166 12 S. (1954).

Bekanntlich kann man die Poisson'sche Integralformel aus dem Residuensatz

dadurch gewinnen, daß man die Reellität von $i^{-1} d \log l(z)$ auf $|z| = 1$ ausnutzt, wo $l(z)$ eine lineare Abbildung des Einheitskreises in sich ist. Verf. verallgemeinert diesen Gedanken, indem er dasselbe Verhalten bekannter kanonischer Schlitzabbildungen heranzieht. U. a. kommt er so zu einer Verallgemeinerung der Jensen-Nevanlinnaschen Formel. — Der Grundgedanke findet sich schon in der Diss. des Ref. (dies. Zbl. 5, 362, insbesondere §2 der Diss.). Systematisch ausgebaut wurden die Zusammenhänge durch Garabedian und Schiffer (dies. Zbl. 35, 52).

H. Grunsky.

Rauch, S. E.: Mapping properties of Cesàro sums of order two of the geometric series. Pacific J. Math. 4, 109—121 (1954).

Die Zähler $\sum_{\nu=0}^n \binom{n+k-\nu}{k} z^\nu$ der Cesàro-Mittel k -ter Ordnung der geometrischen Reihe

seien mit $S_n^{(k)}(z)$ bezeichnet. Sie spielen eine Rolle bei der Untersuchung von Potenzreihen, deren Koeffizientenfolge monoton von der Ordnung $k+1$ ist. Hier handelt es sich um den Fall $k=2$: $S_n^{(2)}(z) = x_n(\Phi) + i y_n(\Phi)$. Satz 1: Für genügend großes n gibt es x_n , so daß $y_n(\Phi)$ zunimmt für $0 < \Phi < \alpha$ und abnimmt für $\alpha_n < \Phi < \pi$; dabei ist $\alpha_n = \alpha n^{-1} + O(n^{-2})$ für $n \rightarrow \infty$ mit $\pi - \alpha < 3\pi/2$. Satz 2: Für genügend großes n gibt es β_n , so daß für $0 < \Phi < \beta_n$ gilt $x'_n(\Phi) > 0$ ($x'_n(\Phi) < 0$, falls $n \equiv 0 \pmod{3}$); dabei ist $\beta_n = 2\pi/3 + \beta n^{-1} + O(n^{-3/2})$ mit $\beta = 2\pi, 4\pi/3, 2\pi/3$ für $n \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$. Satz 3: Für genügend großes n ist bei der Abbildung $w = S_n^{(2)}(z)$ das Bild von $|z| = 1$ konvex für $0 < \Phi < \gamma_n$ (γ_n sei der maximale derartige Winkel) und $\gamma_n = \gamma n^{-1} + O(n^{-2})$ mit $2\pi < \gamma < 3\pi$. Beim Beweis benützt Verf. von G. Szegő (Duke math. J. 8, 559—564 (1941)) angegebene geschlossene Ausdrücke für $x'_n(\Phi)$ und $y'_n(\Phi)$. Weitere Literatur: L. Fejér und G. Szegő (dies. Zbl. 42, 317); M. Schweitzer [Duke math. J. 18, 527—533 (1951)].

W. Meyer-König.

Royden, H. L.: The conformal rigidity of certain subdomains on a Riemann surface. Trans. Amer. math. Soc. 76, 14—25 (1954).

Verf. betrachtet ein quadratisches Differential $d\zeta^2$ auf einer endlichen Riemannschen Fläche V . Wenn $d\zeta^2$ auf der Berandung der Teilfläche V_1 von V nicht negativ wird und in V_1 alle mehrfachen Pole enthält, so ist unter gewissen Voraussetzungen die Identität die einzige konforme Abbildung von V_1 in V . Dieses Resultat stellt eine Umkehrung von Schiffer- und Spencerschen Sätzen dar und schließt in gewissen Teilen an die Teichmüllerschen Arbeiten, dies. Zbl. 21, 335; 24, 333, an.

H. P. Künzi.

Reich, Edgar: An inequality for subordinate analytic functions. Pacific J. Math. 4, 259—274 (1954).

Es wird eine Ungleichung von Goluzin (dies. Zbl. 44, 305) verallgemeinert. Der Goluzinsche Satz lautet: Sind $f(z)$ und $F(z)$ zwei im Einheitskreis reguläre Funktionen, für die $f(0) = F(0)$ gilt, und existiert eine dritte für $|z| < 1$ analytische Funktion $\omega(z)$ mit $\omega(z) = \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots$, $|\omega(z)| = 1$ für $|z| = 1$ derart, daß die Relation $f(z) = F(\omega(z))$ gilt, so sagen wir, $f(z)$ sei $F(z)$ untergeordnet, im Zeichen $f(z) \prec F(z)$. Es bezeichne $a(r)$ den Flächeninhalt des durch $f(z)$ vermittelten Bildes von $|z| < r$ auf der Riemannschen Fläche. Auf analoge Weise bezeichne $A(r)$ den Flächeninhalt des durch $F(z)$ vermittelten Bildes von $|z| < r$ auf der Riemannschen Fläche. Dann ist $a(r) \leq A(r)$ für $r \leq 2^{-1/2}$; diese Ungleichung ist für $r > 2^{-1/2}$ im allgemeinen nicht mehr gültig. Verf. gibt nun die genaue obere Schranke für $a(q)/A(q)$ ($q \leq r$) für alle r mit $0 \leq r \leq 1$ an. Der bewiesene Satz enthält natürlich den Goluzinschen Satz als Spezialfall. Es wird folgendes bewiesen: Es sei $T(r)$ folgendermaßen definiert: $T(r) = m r^{2m-2}$ für $(m-1)/m \leq r^2 \leq m/(m+1)$. Dann gilt $a(q)/A(q) \leq T(r)$ für $q \leq r$. Die Fälle, in welchen das Gleichheitszeichen stattfindet, werden auch angegeben.

P. Szűsz.

Huckemann, F.: An extension of the Ahlfors distortion theorem. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 261—265 (1954).

Es wird folgender Satz bewiesen: ein Streifenbereich D (d. h. ein einfach-zusammenhängendes Gebiet, von dem zwei Randelemente p_1, p_2 ausgezeichnet sind) wird konform auf $0 \leq \Re w \leq 1$ abgebildet, und es sei $\zeta_1(s) = \inf_{z \in s} \Re w$, $\zeta_2(s) = \sup_{z \in s} \Re w$, wo s einen p_1 von p_2

trennenden Querschnitt von D bedeutet; $M(s_i, s_k)$ sei der Modul des aus D durch die Querschnitte s_i, s_k herausgeschnittenen Vierecks (d. h. die Länge der einen Seite des zu diesem konform-äquivalenten Rechtecks, dessen s_i und s_k entsprechende Seiten zu 2π normiert sind); dann gilt mit $M(s_{i^*}, s_i) \geq 2\pi$, $M(s_k, s_{k^*}) \geq 2\pi$ stets

$$(*) \quad \zeta_2(s_k) - \zeta_1(s_i) < M(s_{i^*}, s_{k^*}),$$

wenn s_i^* und s_k durch s_i , s_i und s_k^* durch s_k voneinander getrennt werden. — Durch ein Gegenbeispiel wird gezeigt, daß die Voraussetzungen nicht mehr wesentlich abgeschwächt werden können. — (*) bildet das natürliche Analogon einer Ungleichung von Teichmüller (dies. Zbl. 20, 238), die $\zeta_1(s_k) - \zeta_2(s_i)$ nach unten abschätzt und den Ahlforsschen Verzerrungssatz enthält. Eine Abschätzung von $\zeta_2(s_k) - \zeta_1(s_i)$ nach oben findet sich unter spezielleren Voraussetzungen und in weniger einfacher Form schon bei Ahlfors. P. Seibert.

Juve, Yrjö: Über gewisse Verzerrungseigenschaften konformer und quasikonformer Abbildungen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 174, 40 S. (1954).

Der erste Teil der Arbeit behandelt die Frage der Verallgemeinerung des Koebschen Verzerrungssatzes auf quasikonforme Abbildungen. Es wird bewiesen: für die Klasse der quasikonformen Abbildungen von $|z| < 1$ auf ein schlechtes Gebiet der w -Ebene, die den Bedingungen

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|w|}{|z|^{1/d_0}} = 1 \text{ und } \int_0^1 \left([d(0)]^{-1} - \left[2\pi \int_0^{2\pi} d(z) d\varphi \right]^{-1} \right) \frac{dr}{r} \leq M \quad (d(z) \text{ Dilatationsquotient})$$

genügen, ist $\frac{1}{4} e^{-M}$ eine Koebsche Konstante. Daß Beschränktheit von $d(z)$ allein nicht für die Existenz einer Koebe-Konstanten hinreicht, wird durch ein Gegenbeispiel gezeigt. Auch die Richtungsabhängigkeit der Verzerrung wird untersucht. Wegen verwandter Sätze vgl. Pflüger, dies. Zbl. 42, 317. — Weiter wird unter Verwendung einer Methode von Teichmüller eine dem Ahlforsschen Verzerrungssatz analoge Abschätzung für teilweise quasikonforme (d. h. in gewissen Bereichen nur topologische) Abbildungen zweier Parallelstreifen aufeinander bewiesen. Einer Idee R. Nevanlinnas (vgl. dies. Zbl. 47, 320) folgend, erhält Verf. mit Hilfe dieser Abschätzung eine neue, erweiterte Form des Ahlforsschen Verzerrungssatzes, die es z. B. gestattet, den Satz von Denjoy-Ahlfors für den Fall wellenförmiger Zielwege zu verschärfen, während Ahlfors nur im Fall spiralförmiger Zielwege eine Erhöhung der Ordnungsschranke über die halbe Anzahl der direkten Singularitäten hinaus nachgewiesen hatte. P. Seibert.

McLaughlin, J. E. and C. J. Titus: A characterization of analytic functions. Proc. Amer. math. Soc. 5, 348—351 (1954).

Dans l'espace R_2 des matrices carrées d'ordre 2 sur le corps des nombres réels soit W un sous-espace vectoriel tel que, pour toute matrice $C \in W$, $\det(C) \geq 0$ sauf pour $C = 0$. Les A.A. montrent que W est, soit de dimension 1, soit équivalent (par automorphisme intérieur) à l'espace des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Soit F un espace vectoriel formé d'applications, à valeurs dans R^2 , d'un ensemble ouvert $D \subset R^2$, qui sont continûment différentiables et telles que pour toutes $f \in F$, la matrice jacobienne $J(f)$ ait un déterminant ≥ 0 en tout point de D , et ne puisse être de rang < 2 que si elle est nulle; alors les A.A. déduisent de leur premier théorème que si F contient deux fonctions analytiques dont les dérivées (complexes) sont indépendantes en tout point de D , F se compose entièrement de fonctions analytiques. J. Dieudonné.

Rizza, Giovanni Battista: Teoria delle funzioni nelle algebre complesse dotate di modulo e commutative. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 12, 299—331 (1954).

In früheren Arbeiten stellte der Verf. Integralsätze auf für die regulären Funktionen einer reellen kommutativen Algebra A^* der Ordnung $2n$ mit Einselement, die als reelles Bild einer komplexen Algebra A der Ordnung n dient. Auf Grund dieser Resultate, insbesondere mit Hilfe der interessanten Integralformel (dies. Zbl. 47, 322) kann hier die Funktionentheorie der Algebren A ziemlich weit entwickelt werden. Es wird gezeigt, daß für eine reguläre Funktion reguläre Ableitungen beliebiger Ordnung existieren, was zu Reihenentwicklungen nach Taylor und Laurent führt. Auch der Begriff des Residuums und das Analogon zum klassischen Residuensatz wird gewonnen. Die Sätze werden nur für irreduzible A aufgestellt, sie behalten aber bei direkter Summenbildung ihre Gültigkeit. E. Trost.

See, Michele: Monogeneità e totale derivabilità, nelle algebre reali e complesse. III. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 16, 321—325 (1954).

L'A. fa seguito a due Note precedenti (questo Zbl. 55, 74; 75); prova che nelle algebre commutative le funzioni $y(x)$ a jacobiano non nullo tali che $y(x)$ abbia chiusa sono le funzioni totalmente derivabili e che, se l'algebra è inoltre solenoidale

la forma $y(x) dx$, se chiusa, è anche cochiusa; avanza una presunzione circa la validità di una certa formula integrale; sviluppa alcune applicazioni alla risoluzione nel campo reale di certe equazioni alla derivate parziali.

G. Scorza Dragoni.

Magnus, Arne: Volume-preserving transformations in several complex variables. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 256—266 (1954).

Verf. betrachtet volumentreue Abbildungen $u = u(z_1, z_2)$, $v = v(z_1, z_2)$ eines Gebietes im \mathbb{C}^2 auf ein ebensolches durch Paare holomorpher Funktionen u, v . Für den Fall, daß $u = \sum_{i=1}^m f_i(z_1, z_2)$, $v = \sum_{i=1}^n g_i(z_1, z_2)$ mit $f_i(z_1, z_2)$ und $g_i(z_1, z_2)$ als homogenen Polynomen in z_1 und z_2 vom Grade i , gibt Verf. eine Formel, gemäß der sich die f_i durch die g_i ausdrücken. Wenn $m = n$ und u bzw. v vom genauen Grade m bzw. n sind, gilt für $n = 2$ bzw. $n = 3$ die Relation $m \equiv 0 \pmod{2}$ bzw. $m \equiv 0 \pmod{3}$. Zum Abschluß werden einige Beispiele behandelt.

H. Röhrl.

Bremermann, Hans J.: Die Holomorphiehüllen der Tuben- und Halbtuben-gebiete. Math. Ann. **127**, 406—423 (1954).

Nach Bochner und Martin ist ein Tubengebiet T ein Gebiet im Raum \mathbb{C}^n von n komplexen Veränderlichen $z = (z_1, \dots, z_n)$, das durch Bedingungen folgender Form gegeben werden kann: $\{z \mid (x_1, \dots, x_n) \in B\}$, wobei $z_j = x_j + i y_j$ und B ein Gebiet im Raum der x_1, \dots, x_n ist. K. Stein (dies. Zbl. **17**, 74) und S. Bochner (Bochner-Martin, dies. Zbl. **41**, 52) haben zuerst die Holomorphiehüllen \hat{T} solcher Tubengebiete untersucht und haben gezeigt, daß \hat{T} mit der konvexen Hülle von T übereinstimmt. (Holomorphiehülle ist das kleinste T umfassende Existenzgebiet einer holomorphen Funktion.) In der vorliegenden Arbeit wird ein neuer kurzer Beweis dieses Satzes für den \mathbb{C}^2 gegeben. Dabei wird wesentlich ein neuartiger Kontinuitätssatz verwendet, welcher aus einer Eigenschaft der subharmonischen Funktion abgeleitet wird. Dieser Kontinuitätssatz bringt im wesentlichen zum Ausdruck, daß jede auf einer stetigen Schar $E(t)$ von analytischen Ebenenstücken für $0 < t < 1$ holomorphe Funktion in $E(0)$ entweder überall holomorph oder überall singular ist. Der Kontinuitätssatz wird ferner gebraucht, um die Holomorphiehüllen von Halbtubengebieten zu bestimmen. Unter diesen Gebieten versteht der Verf. Gebiete S des \mathbb{C}^2 , die in der Form: $\{(z_1, z_2) \mid (x_1, z_2) \in B\}$ gegeben werden können. Darin ist $B =$ die Basis von $S =$ ein Gebiet im direkten Produkt der z_2 -Ebene (oder einer Riemannschen Fläche) mit der reellen x_1 -Achse. Es ergibt sich: Die Holomorphiehülle \hat{S} einer Halbtube S ist wieder eine Halbtube. Man erhält die Basis \hat{B} von \hat{S} aus B , indem man zunächst nach einem angegebenen Verfahren B zu einem Gebiet $*B: \{(x_1, z_2) \mid z_2 \in \mathfrak{R}, V_1(z_2) < x_1 < V_2(z_2)\}$ (\mathfrak{R} eine Riemannsche Fläche) erweitert, dann die größte subharmonische Minorante $W_1(z_2)$ von V_1 und die kleinste superharmonische Majorante $W_2(z_2)$ von V_2 bildet und schließlich $\hat{B} = \{(x_1, z_2) \mid z_2 \in \mathfrak{R}, W_1(z_2) < x_1 < W_2(z_2)\}$ setzt. Dabei wird verwendet, daß \hat{S} Existenzgebiet einer holomorphen Funktion ist. (Diese Behauptung wurde in der Diss. des Verf. bewiesen.) Am Ende der Arbeit werden einige Beispiele angegeben. Insbesondere wird gezeigt, daß es schlichte Halbtubengebiete mit nicht schlichter Holomorphiehülle gibt.

H. Grauert.

Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Gerstenhaber, Murray: A characterization of the modular group and certain similar groups. Duke math. J. **21**, 113—121 (1954).

Sei G_n ($n \geq 3$) die von $z \mapsto -z^{-1}$ und $z \mapsto z + 2\cos(\pi/n)$ erzeugte Gruppe von Abbildungen der oberen Halbebene auf sich. G_2 ist also die Modulgruppe. Dann zeigt Verf.: Wenn eine diskontinuierliche Gruppe konformer Abbildungen der oberen Halbebene auf sich isomorph dem freien Produkt einer zyklischen Gruppe der Ordnung zwei mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung n ist und wenn sie einen Fundamentaltbereich mit endlichem hyperbolischen Flächeninhalt hat, dann ist sie innerhalb der Gruppe aller konformen Abbildungen der oberen Halbebene auf sich selbst zur Gruppe G_n konjugiert. Der nicht einfache Beweis benützt die Kommutatorgruppe der gegebenen Gruppe. Die durch sie aus der oberen Halbebene entstehende Riemannsche Fläche wird als hyperelliptisch vom Geschlecht $(n-1)/2$ bzw. $(n-2)/2$ erkannt. Sie hat einen Automorphismus der Ordnung n , der mit dem hyperelliptischen Automorphismus vertauschbar und in gewissem Sinne von ihm unabhängig ist. Durch diese Eigenschaften ist die Riemannsche Fläche bis auf konforme Abbildung und daher auch die Kommutatorgruppe bis auf Konjugierte bestimmt. Daraus folgt schließlich, daß auch die Gruppe bis auf Konjugierte bestimmt ist.

G. Lochs.

Pjateckij-Šapiro, I. I.: Ein Analogon zu einem Satze von Lefschetz. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **96**, 917—920 (1954) [Russisch].

Es sei D ein beschränktes Gebiet im Raum von n komplexen Variablen z_1, \dots, z_n und Γ eine diskontinuierliche Gruppe analytischer Abbildungen γ von D auf sich; es sei D modulo Γ kompakt. Die zugehörigen automorphen Funktionen bilden bekanntlich einen algebraischen Funktionenkörper K von n unabhängigen Veränderlichen. Die automorphen Formen $\varphi(z)$ vom Gewicht m sind durch die Eigenschaft $\varphi(\gamma z) = j_\gamma^m(z) \varphi(z)$ ($\gamma \in \Gamma$) erklärt, wo $j_\gamma(z)$ die Funktionaldeterminante der Abbildung $z \rightarrow \gamma z$ bedeutet und m eine natürliche Zahl ist. Es wird folgender Satz bewiesen: Für alle genügend großen $m > m_0(D, \Gamma)$ gibt es ein endliches System automorpher Formen $\varphi_k(z)$ ($k = 0, 1, \dots, s$) vom Gewicht m , so daß die aus den $n+1$ Zeilen $\varphi_0(z), \dots, \varphi_s(z)$ und $\partial \varphi_0(z)/\partial z_1, \dots, \partial \varphi_s(z)/\partial z_1$ ($l = 1, \dots, n$) gebildete Matrix in jedem Punkte z von D den Rang $n+1$ hat und die s Gleichungen $\varphi_0(z')/q_0(z) = \dots = \varphi_s(z')/q_s(z)$ für zwei Punkte z, z' von D nur dann erfüllt sind, wenn diese modulo Γ äquivalent sind. Damit ist für die zu K gehörige algebraische Mannigfaltigkeit ein singularitätenfreies Modell im s -dimensionalen projektiven Raum gewonnen. In der Einleitung wird die bekannte Preisarbeit von S. Lefschetz [Trans. Amer. math. Soc. **22**, 327—482 (1921)] erwähnt, wo auf S. 367—369 ein analoger Satz für die Abelschen Funktionen bewiesen wurde. Bei dieser Gelegenheit möchte Ref. darauf aufmerksam machen, daß der Lefschetzsche Beweis nicht ganz vollständig ist. Dies ist seinerzeit bei der Besprechung in den Fortschr. d. Math. nicht bemerkt worden. C. L. Siegel.

Schoeneberg, Bruno: Über die Quaternionen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. J. reine angew. Math. **193**, 84—93 (1954).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **15**, 61; dort sind auch die Bezeichnungen erklärt) hat Verf. Quaternionenschiefkörper zur Konstruktion von Modulformen der Dimension -2 und der Stufe QD verwendet. Hier untersucht er nun diejenigen dieser Modulformen, die zu einer Primzahlstufe q gehören, was nur für $Q=1$, $D=q$ vorkommt. Die lineare Schar dieser $\theta(\tau; q, a, \delta)$ mit festem a wird in Teilscharen zerlegt, die sich bei Modulsstitutionen nach irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{M}(q)$, der inhomogenen Modulgruppe mod q , umsetzen. Er gelangt dabei zu bisher unbekannten Integranden erster Gattung des durch die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(q)$ bestimmten algebraischen Gebildes. Als Beispiele werden die Fälle $D=11, 19$ behandelt. Es wird dann noch ein Zusammenhang zwischen den Multiplizitäten, mit denen gewisse irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{M}(q)$ in der durch ein maximales System linear unabhängiger Differentiale erster Gattung vermittelten Darstellung vorkommen, und den Klassenzahlen der Algebren der Grundzahl $-q$ aufgezeigt. Ferner leitet Verf. für beliebige Quaternionenschiefkörper eine lineare Relation zwischen ihren θ -Reihen und den φ -Teilwerten der Stufe D her, aus der sich eine bekannte Formel für die Klassenzahl definiter Quaternionen in gewisser Weise als Analogon zur Dirichletschen Klassenzahlformel ergibt. Anwendung der Untersuchungen Heekes über die Kennzeichnung von Dirichletreihen durch ihre Funktionalgleichungen auf seine Funktionen führt für die Funktionen $\xi_Q(s/2)$ bei den Quaternionen mit $D=2$ und 3 zu eindeutigen Kennzeichnungen. G. Lochs.

Herrmann, Oskar: Über Hilbertsche Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktenentwicklung. Math. Ann. **127**, 357—400 (1954).

Es sei K ein total reeller algebraischer Zahlkörper n -ten Grades mit der Klassenzahl h und Z ein zu K gehöriger Bereich idealer Zahlen, der sich aus den Zahlklassen $K_a = K \cap \mathfrak{a}$ ($a = 1, 2, \dots, h$) zusammensetzt. Es sei $K = K_1$, $K_a^{-1} = K \alpha_a^{-1}$ und $\partial(\in Z)$ die Differente von K . S und N mögen in der üblichen Weise die Spur und die Norm bezeichnen. $\Gamma(K_a)$ sei die Menge der ganzen Matrizen $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in K$, $\gamma \in K_a$, $\beta \in K_a^{-1} K_n$, $\delta \in K_n$. $\Gamma_1(K_a)$ bezeichne die Gruppe der Matrizen dieser Art mit der Determinante $|M| = 1$. Im Bereich der n komplexen Variablen $\tau = (\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(n)})$ werde \mathfrak{Z}_ω durch $\Im m \omega \tau > 0$ (für alle konjugierten) erklärt. Schließlich sei $\mathfrak{Z}_{K_a} = \bigcup_{\omega \in K_a} \mathfrak{Z}_\omega$. Eine in \mathfrak{Z}_{K_a} definierte Funktion $F(\tau)$ heißt eine Modulform zur Klasse K_a , in Zeichen: $F(\tau) \in (K_a, -k)$, wenn 1. $F(\tau)$ in \mathfrak{Z}_{K_a} regulär ist; 2. $F(\tau)' L = F(L\tau) N(\gamma' \tau + \delta)^{-k} = F(\tau)$ für $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_1(K_a)$ gilt; 3. $F(\tau)' M$ in $\mathfrak{Z}_{\frac{\omega \tau}{|M|}}$ beschränkt ist für $M \in \Gamma(K_a)$. Für $\tau \in \mathfrak{Z}_\omega$ gestattet $F(\tau) \in (K_a, -k)$ eine Fourierentwicklung der Art

$$(1) \quad F(\tau) = a_0(\omega) + \sum_{\mu} a(\mu) e^{2\pi i S(\mu \tau)},$$

wobei über alle von 0 verschiedenen $\mu \in K_a$, für die $\bar{\epsilon} \mu$ ganz ist, summiert wird. Je h

Formen $F_{K_a} = (K_a, -k)$ werden zu einem Formenvektor $\tilde{F} = \{F_{K_1}(\tau), \dots, F_{K_h}(\tau)\}$ zusammengefaßt. Die volle Schar $\{K, -k\}$ dieser Formenvektoren wird in gewisser Weise in Teilscharen $\{K, -k, \chi, \psi\}$ aufgespalten, wobei χ einen biquadratischen Einheitscharakter und ψ einen Charakter der Zahlklassengruppe bezeichnet. Auf $\{K, -k\}$ wird in Verallgemeinerung eines Ansatzes von de Bruijn (dies. Zbl. 28, 56) ein Operator $\tilde{F} \rightarrow \tilde{F}|T(\sigma)$ für ganzes $\sigma \in \mathbb{Z}$,

$\sigma \neq 0$ erklärt, der auf $\{K, -k, \chi, \psi\}$ der Multiplikationsregel $T(\Sigma) T(\sigma) = \sum_{(\theta)} N(\theta)^{k-1} \psi(\theta) T\left(\frac{\Sigma\sigma}{\theta^2}\right)$

genügt, wobei über alle ganzen Ideale (θ) summiert wird, die (Σ, σ) teilen. Damit ist die Grundformel der Heckschen Operatoretheorie (dies. Zbl. 15, 402) sinnvoll verallgemeinert. Mit Hilfe des Metrisierungsprinzips, angewendet auf die Schar $\{K, -k, \chi, \psi\}_s$, die sich aus den Spitzenformenvektoren in $\{K, -k, \chi, \psi\}$ zusammensetzt, wird gezeigt, daß $\{K, -k, \chi, \psi\}_s$ von Eigenvektoren aller T -Operatoren aufgespannt wird. Es sei $\tilde{F} \in \{K, -k\}$. Dann ist $\omega \in \mathbb{Z}$, $\omega \neq 0$ ein Koeffizienten $a_0(\omega)$ und zu $\mu \in \mathbb{Z}$, $\mu \neq 0$, $\varepsilon\mu = 0(1)$ einen Koeffizienten $a_1(\mu)$, so daß die zur Klasse K_a gehörige Komponente von \tilde{F} für $\tau \in \mathfrak{T}_\omega$ mit $\omega \in K_a$ die Entwicklung (1) hat. Man bilde mit einem beliebigen Zahlklassencharakter $A(\sigma)$ die Dirichletreihen $D(s, A) = \sum_{(\sigma)} a(\sigma) A(\sigma) N(\sigma)^{-s}$, wobei über alle ganzen Ideale $(\sigma) \neq (0)$ summiert wird. Es

zeigt sich dann, daß ein Formenvektor $\tilde{F} \in \{K, -k, \chi, \psi\}$ genau dann ein normierter Eigenvektor aller T -Operatoren ist, wenn die Dirichletreihen $D(s, A)$ eine Eulersche Produktentwicklung $D(s, A) = \prod_{(\varrho)} (1 - a(\varrho) A(\varrho) N(\varrho)^{-s} + \psi(\varrho) N(\varrho)^{k-1-2s})^{-1}$ besitzen, wobei (ϱ) alle Primideale

durchläuft. Zahlreiche Sätze der Heckschen Theorie werden auf Formenvektoren verallgemeinert. Der Fortschritt, der über die Ergebnisse von de Bruijn entscheidend hinausführt, liegt darin, daß Verf. nicht nur Formen zur Gruppe $\Gamma_1(K)$, sondern zu allen Gruppen $\Gamma_1(K_a)$ ($a = 1, 2, \dots, h$) gleichzeitig betrachtet.

H. Maaß.

Kaluza jr., Theodor: Zur Existenz stetiger grenzperiodischer Funktionen mit formal vorgegebener Fourierreihe. Arch. der Math. 5, 344—346 (1954).

For a given almost periodic function $f(x)$ the limit-periodic component of $f(x)$ which in Bochner's sense belongs to a given limit-period is expressed by $f(x)$. It is noted that the series formed by the limit-periodic components generally does not converge uniformly to $f(x)$.

E. Følner.

Doss, Raouf: On generalized almost periodic functions. Ann. of Math., II. Ser. 59, 477—489 (1954).

Dann und nur dann läßt sich eine Funktion $f(x) \in L^p$ durch trigonometrische Polynome $p(x) = \sum A_\nu \exp(i \lambda_\nu x)$ beliebig genau im Sinne der B^p -Norm approximieren, also $\bar{M}_x \{ |f(x) - p_\varepsilon(x)|^p \}^{1/p} < \varepsilon$, wenn gilt: (1) $\lim_{\tau \rightarrow 0} \bar{M}_x \{ |f(x + \tau) - f(x)|^p \} = 0$ für $\tau \rightarrow 0$. (2) Die ε -Fastperioden τ mit $\bar{M}_x \{ |f(x + \tau) - f(x)|^p \} < \varepsilon$ liegen relativ dicht. (3) Für jedes a existiert eine Funktion $f^{(a)}(x) \in L^p$ mit der Periode a , so daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{M}_x \left| n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + ka) - f^{(a)}(x) \right|^p = 0$ für $n \rightarrow \infty$. — Hiermit [insbesondere durch (3)] ist eine neue und natürliche Charakterisierung der B^p -fastperiodischen Funktionen gegeben. Der Beweis des angegebenen Theorems ist nicht einfach. Das ist aber sehr verständlich, falls man berücksichtigt, wie kompliziert die ursprüngliche Bohr-Besicovitchsche Theorie dieser Funktionen ist. W. Maak.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

• **Petrowski, I. G.:** Vorlesungen über die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. 4. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1954. 198 S. DM 7.80.

Si tratta della traduzione dal russo in lingua tedesca di un volume di I. G. Petrowski sulle equazioni differenziali ordinarie, giunto già in quindici anni alla sua quarta edizione. La trattazione moderna è sintetica e orienta rapidamente il lettore tanto sulla parte classica e moderna della materia quanto sui vari metodi di indagine. Sono da notare tra l'altro le dimostrazioni dei teoremi di esistenza ottenute col teorema del punto invariante, la dipendenza degli integrali dai parametri fondata su un lemma di J. Hadamard, e un teorema di S. A. Tschaplygin per la limitazione delle soluzioni delle equazioni differenziali. In prima parte, sulle equazioni del primo ordine con una funzione incognita, comprende tre capitoli sui concetti generali, sulle più semplici equazioni e sulla teoria generale; la seconda parte, sui sistemi di equazioni differenziali

ordinarie, comprende pure tre capitoli sui teoremi generali, sui sistemi lineari, sui sistemi a coefficienti costanti. A ciascun capitolo seguono questioni ben scelte. Un capitolo aggiuntivo riguarda le equazioni alle derivate parziali del primo ordine con una funzione incognita. Il volume che si presenta in ottima veste tipografica, è raccomandabilissimo ai giovani dei secondi bienni dei nostri corsi universitari. *G. Sansone.*

Makal, E.: A note on the solution of Heun's differential equation in a special case. Publ. math., Debrecen **3**, 140—143 (1954).

Verf. untersucht zunächst die Funktion

$$w = y^{-b}(z-x)^{-b} F(a, b, c, y^{-1}(z-y) x(z-x)^{-1}),$$

wobei $F(a, b, c, \xi)$ die Gaußsche hypergeometrische Funktion bedeutet. Er betrachtet w als Funktion von x mit den Parametern y und z oder als Funktion von y mit den Parametern z und x oder schließlich als Funktion von z mit den Parametern x und y . In jedem Falle genügt w einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung vom Heun'schen Typ. Im ersten Falle sind $0, y, z, \infty$ die Singularitäten, im zweiten $0, z, x, \infty$ und im dritten $0, x, y, \infty$. w genügt außerdem zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. — Es gibt auch andere Beispiele dafür, daß die Lösungen gewisser Systeme von partiellen Differentialgleichungen auch bestimmte gewöhnliche Differentialgleichungen befriedigen, welche alle von derselben Struktur sind, und zwar so, daß die Singularitäten der einen Differentialgleichung bei der anderen die Rolle der Variablen spielen usw. Verf. führt das für die homogenen Lösungen (d. h. $x u_x - y u_y + \lambda u = 0$) der von Riemann, Darboux und Appell untersuchten Differentialgleichung $(x-y) u_{xy} - \beta' u_x - \beta u_y = 0$ und weiterhin für die homogenen Lösungen eines Systems von drei partiellen Differentialgleichungen aus. *Johannes Nitsche.*

Campbell, J. G. and Michael Golomb: On the polynomial solutions of a Riccati equation. Amer. math. Monthly **64**, 402—404 (1954).

Es wird nach den Lösungen der Differentialgleichung $A y' = B_0 + B_1 y + B_2 y^2$ (A, B_0, B_1, B_2 Polynome) gefragt, die Polynome sind. In Ergänzung früherer Resultate des ersten Verf. (dies. Zbl. **49**, 68) wird bewiesen, daß die Grade der Polynom-Lösungen einer aus vier möglichen explizit angegebenen Klassen von je höchstens drei Elementen angehören. Drei verschiedene Grade können nur vorkommen, wenn der Grad von A um 1 größer ist als der von B_1 , unter zusätzlichen Bedingungen, die mit Hilfe des „singulären Exponenten“ ausgedrückt werden. Mit besonderer Berücksichtigung des letzteren Falles wird ein Algorithmus zur Bestimmung der Polynom-Lösungen angegeben. *M. J. De Schwarz.*

Zenchen, O.: Über eine Methode zum Beweis der Lösbarkeit des Cauchyschen Problems. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 2 (60), 143—146 (1954) [Russisch].

Diese Methode beruht auf der bekannten Umwandlung des Anfangswertproblems in eine nichtlineare Integralgleichung. Derartige Integralgleichungen hat der Verf. in mehreren Arbeiten untersucht (vgl. dies. Zbl. **47**, 346; Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **91**, 1261—1262 (1953)). *W. Thimm.*

Wintner, Aurel: Remarks to an earlier note. (Vol. 57, 539—540). Amer. J. Math. **76**, 717—720 (1954).

Der Ref. hat früher (S.-Ber. Heidelberger Akad. Wiss., math. naturw. Kl. **1919**, 8. Abhandl.) die Differentialgleichung $y' = \sum f_k(x) y^k$ dadurch integriert, daß er die Gleichung $y' = \sum f_k(x) t^k y^k$ betrachtete, das Integral nach Potenzen des Parameters t entwickelte und dann $t = 1$ setzte. Er fand so, wenn etwa $f_k(x) = M b^{-k}$ ist (Voraussetzung A), z. B. für das am Nullpunkt verschwindende Integral eine Gültigkeit im Intervall $0 < x < \frac{1}{2} b M$, und zwar ist das das bestmögliche Intervall. Dem Verf. gefällt aber der Faktor $\frac{1}{2}$ nicht. Deshalb ändert er die Voraussetzung A ab in B: $|\sum f_k(x) y^k| = M$ im Kreis $|y| = b$. Dann ist nach dem Cauchyschen Koeffizientensatz die Voraussetzung A von selbst erfüllt. Aber es wird doch wesentlich mehr verlangt und das obige Intervall ist infolgedessen nicht mehr das bestmögliche. Verf. findet jetzt das Intervall $0 \leq x < b/M$. *O. Perron.*

Nehari, Zeev: On the zeros of solutions of second-order linear differential equations. Amer. J. Math. **76**, 689—697 (1954).

The present paper concerns the behavior of the solutions of the differential equation (1) $w''(z) + p(z)w(z) = 0$ in a half-strip $S(a) = [0 \leq x < +\infty, -a \leq y \leq a]$, $a > 0$, of the complex z -plane, $z = x + iy$. Here are some of the results. I. If $p(z)$ is regular in $S(1)$ and $|p(x + iy)| \leq x\varepsilon(x)$ in $S(1)$, where $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow +\infty$, and if $\int_0^{+\infty} x |p[x + i(1-\eta)]| dx < +\infty$ for all

$0 < \eta < 1$ small enough, then every solution $w(z)$ of (1) has at most a finite number of zeros in any strip $S(1-\delta)$, $0 < \delta < 1$. II. If $p(z)$ is regular in $S(1)$ and $z_n = a_n + ib_n$, $z_n \in S(1)$, $n = 1, 2, \dots$, are all the zeros of $w(z)$ in $S(1)$, then the assumption $|p(x + iy)| < C/x^\sigma$ for $z \in S(1)$, $1 < \sigma < 2$, is incompatible with $a_n = o(n^{1/(2-\sigma)})$ as $n \rightarrow \infty$. Theorem II extends a previous result of P. Hartman and A. Wintner for the real case (this Zbl. **43**, 87). L. Cesari.

Evans, Robert L.: Asymptotic and convergent factorial series in the solution of linear ordinary differential equations. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 89—92 (1954).

The author considers the differential equation (*) $\sum_{\beta=0}^n P_\beta(x) y^{(n-\beta)} = 0$ where $P_\beta(x) = \sum_{\mu=-m(\beta)}^{\infty} p_{\beta,\mu} x^{-\mu}$ ($p_{\beta,m(\beta)} \neq 0$, $\beta = 0, 1, \dots, n$) converge for $|x| = x_0$ and $|x| > x_0$ contains no finite singular points of (*). For this equation E. Fabry obtained n linearly independent formal solutions which involve series that are generally asymptotic but not convergent. In the present paper the asymptotic series are replaced by convergent factorial series. M. M. Peixoto.

Latyševa, K. Ja.: Über ein Resultat von B. S. Popov. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **96**, 695—696 (1954) [Russisch].

Eine von Popov (dies. Zbl. **51**, 319) angegebene Bedingung dafür, daß die Gleichung $y'' + (a e^x + b) y' + (A e^{2x} + B e^x + C) y = 0$ durch Quadraturen lösbar ist, läßt sich aus allgemeineren Sätzen der Verf. ableiten (vgl. z. B. dies. Zbl. **52**, 90). W. Hahn.

Sears, D. B.: Some properties of a differential equation. II. J. London math. Soc. **29**, 354—360 (1954).

In Verallgemeinerung eines in I. (dies. Zbl. **48**, 64) erzielten Resultates zeigt Verf. hier: Die Differentialgleichung $y'' = f(x)y$ kann keine Lösung $y = \varphi(x)$ mit $0 < \int_0^\infty \varphi(x)^p dx < \infty$ ($p > 1$) besitzen, wenn für ein $x_0 > 0$ und ein $n \geq 0$

$$|f(x)| \leq \frac{p+1}{x^2 p^2} + \frac{p+2}{x^2 p^2} \sum_{r=1}^n \frac{1}{\log x \log_2 x \cdots \log_r x} + \sigma(x)$$

mit $x \sigma(x) \in L(x_0, \infty)$ bei $x = x_0$ gilt. Für $n = 0$ fehlen die log-Glieder. Die Konstanten $(p+1)/p^2$, $(p+2)/p^2$ sind bestmöglich. F. W. Schäfke.

Barbuti, Ugo: Su alcuni teoremi di stabilità. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sei. fis. mat., III. Ser. **8**, 81—91 (1954).

L'A. stabilisce il seguente criterio di stabilità, comprensivo di risultati di altri AA. Nell'equazione (1) $y'' + [B_1(x) - B_2(x)]y = 0$, sia $B_1(x)$ a variazione limitata in (x_0, ∞) e $\lim_{x \rightarrow \infty} B_1(x) = \lambda^2$, $0 < \lambda < \infty$; $B_2(x)$ sia limitata tra due numeri positivi e la sua derivata $B_2'(x)$ risulti a variazione limitata in (x_0, ∞) . In queste ipotesi tutti gli integrali della (1) e le loro derivate sono stabili in (x_0, ∞) . G. Sansone.

Fisher, Edward: The period and amplitude of the van der Pol limit cycle. J. appl. Phys. **25**, 273—274 (1954).

The amplitude and period of the limit cycle for the van der Pol equation, $\ddot{y} + \dot{y} = \nu \dot{y}(1 - y^2)$, are found for all values of ν by joining graphically the results of solutions about $\nu = 0$ and $\nu = \infty$. Autoreferat.

Cunningham, W. J.: A non-linear differential-difference equation of growth. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 708—713 (1954).

L'équation (*) $dx/dt = [a - b x(t - \tau)] x(t)$, $a, b, \tau > 0$ peut posséder, pour $x > 0$, des solutions oscillantes. Pour discuter ce point, l'A. transforme (*) en développant $x(t - \tau)$ selon les puissances de τ et en négligeant les termes à partir de τ^3 ; il obtient l'équation (**) $x'/x = a - b x + b \tau x' - b \tau^2 x''/2$ qui est facile à discuter dans le plan (x, x') . Il y a un point singulier pour $x = a/b$, $x' = 0$ dont la nature dépend du produit $a\tau$. L'A. compare les solutions de (*) et (**): il donne les résultats d'intégrations faites avec une machine analogique; ils sont en bon accord si $a\tau$ est assez petit.

Ch. Blanc.

Putnam, C. R.: On the continuous spectra of singular boundary value problems. Canadian J. Math. **6**, 420—426 (1954).

Let $p(t) > 0$ and $f(t)$ be continuous on $0 \leq t < \infty$ and suppose that the differential equation (1) $[p(t)x'(t)]' - f(t)x(t) + \lambda x(t) = 0$ is of the limit-point type, so that (1) and a linear homogeneous boundary condition (2₀) $x(0)\cos\alpha - x'(0)\sin\alpha = 0$ ($0 \leq \alpha < \pi$) determine a boundary value problem on $0 \leq t < \infty$ for every fixed λ . Let $\varrho_\lambda(\lambda)$ denote the unique continuous monotone basis function on $-\infty < \lambda < \infty$, normalized by $\varrho_\lambda(0) = 0$, determining the eigendifferentials associated with the continuous spectrum, C_λ . A problem raised by H. Weyl is as to whether C_λ is independent of λ (in standard examples, f. i. if $f(t)$ is periodic, this is the case; cf. A. Wintner, this Zbl. **29**, 186). A step toward the solution of this problem is made in this paper by proving the following Theorem: Suppose $C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2}$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) contains an interval J , and that $\varrho_{\lambda_1}(\lambda)$ is absolutely continuous with respect to $\varrho_{\lambda_2}(\lambda)$ on J . Then (i) $J \subseteq C_\lambda$ for every λ , $0 \leq \lambda < \pi$; (ii) $\varrho_{\lambda_1}(\lambda)$ is absolutely continuous on J with respect to each function $\varrho_\lambda(\lambda)$.

B. Sz. Nagy.

Briš, N. I.: Über Randwertaufgaben für die Gleichung $\varepsilon y'' = f(x, y, y')$ bei kleinem ε . Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 428—432 (1954) [Russisch].

A number of theorems are announced concerning the convergence of a solution $y = y_\varepsilon$ of the equation $\varepsilon y'' = f(x, y, y')$ in an interval $a < x < b$ satisfying (1) $y(a) = y(b) = 0$ to a solution u of $f(x, u, u') = 0$ satisfying $u(b) = 0$. The principal theorem assumes that $\partial f / \partial y' < k < 0$ and this condition is later relaxed. The situation when (1) is replaced by a general linear boundary condition is also studied. The case when f is linear in y' has been treated before by R. v. Mises (this Zbl. **37**, 64) and by Coddington and Levinson (this Zbl. **46**, 95). The case when f differs from a function linear in y' by a bounded function was treated by O. A. Olejnik and A. I. Žižina (this Zbl. **47**, 328).

L. Gårding.

Babkin, B. N.: Lösung einer gewissen Randwertaufgabe für eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung nach der Methode von Čaplygin. Priklad. Mat. Mech. **18**, 239—242 (1954) [Russisch].

Es wird die Randwertaufgabe $y'' - f(x, y) = 0$, $y(a) = A$, $y(b) = B$ betrachtet. Wenn die Funktion $v(x)$ im Intervall $[a, b]$ den Randbedingungen und der Differentialungleichung $v'' - f(x, v) = 0$ genügt, dann gilt im Intervall (a, b) die Ungleichung $v(x) > y(x)$, wo $y(x)$ Lösung der Randwertaufgabe ist. Unter Benutzung dieses Satzes werden Folgen oberer und unterer Funktionen konstruiert, die gegen die Lösung konvergieren.

W. Schulz.

Levinson, Norman: The expansion theorem for singular self-adjoint linear differential operators. Ann. of Math., II. Ser. **59**, 300—315 (1954).

Unter Benutzung der Levitanschen Ergebnisse (dies. Zbl. **41**, 57) bewies Coddington (dies. Zbl. **49**, 71) für die selbstadjungierten Differentialoperatoren $L = p_0 \cdot (d/dt)^n + p_1 (d/dt)^{n-1} + \dots + p_n$, $a < t < b$, beliebiger Ordnung u. a. unter gewissen Voraussetzungen über die Singularitäten an den Intervallenden Sätze über die Spektralardarstellung und die bei Levan fehlende Eindeutigkeit der Spektralmatrix. In der vorliegenden Arbeit werden die Levitanschen Ergebnisse und Beweise angeführt und mit ihrer Hilfe der Coddingtonsche Entwicklungssatz erneut hergeleitet.

Es wird kein Gebrauch von der Theorie des Hilbertraumes und der singulären Integralgleichungen gemacht. Die Beweismethode ist ähnlich der in einer früheren Arbeit vom Autor für den Fall $n = 2$ (dies. Zbl. 44, 313) benutzten Methode.

H. Krumhaar.

Franklin, Joel: On the existence of solutions of systems of functional differential equations. Proc. Amer. math. Soc. 5, 363—369 (1954).

Siano $u_1(x), \dots, u_m(x)$ m funzioni continue note della x definite in $(0, x_1)$, con $x_1 > 0$, e ivi soddisfacenti le limitazioni $u_k(x) \leq x$, ($k = 1, 2, \dots, m$). Posto $x_{0,k} = \min_{x \in (0, x_1)} u_k(x)$, $x_0 = \min(x_{0,1}, \dots, x_{0,m})$, ($x_0 \leq 0$), siano $g_1(x), \dots, g_n(x)$ n funzioni (funzioni iniziali) continue note definite in $(x_0, 0)$, senza escludere che sia $x_0 = 0$, nel qual caso le $g_1(x), \dots, g_n(x)$ si riducono alle costanti $g_1(0), \dots, g_n(0)$. Se $y_{h,k} = \min_{x \in (x_0, 0)} g_h(x)$ per $x_{0,k} \leq x \leq 0$, $y_{h,k} = \max_{x \in (x_0, 0)} g_h(x)$ per $x_{0,k} \leq x \leq 0$, le n funzioni $f_v(x; y_{1,1}, \dots, y_{1,m}; \dots; y_{n,1}, \dots, y_{n,m})$ siano definite nel dominio rettangolare R : $0 \leq x \leq x_1$, $y_{h,k} \leq y_{h,k} \leq y_{h,k}$, dove $y_{h,k} = \min [g_h(0) - p, y_{h,k}]$, $y_{h,k} = \max [g_h(0) + p, y_{h,k}]$, $p > 0$, e continue in R . Se $M > 0$ è una costante tale che $|f_v(x; y_{h,k})| \leq M$ in R e $\delta = \min(x_1; p/M)$ esiste allora almeno un sistema di n funzioni $y_1(x), \dots, y_n(x)$ definite in (x_0, δ) , che in $(x_0, 0)$ coincidono rispettivamente con $g_1(x), \dots, g_n(x)$ e soddisfano per $0 \leq x \leq \delta$ il sistema di equazioni funzionali differenziali

$dy_v(x)/dx = f_v(x; y_{1,1}, \dots, y_{1,m}; \dots; y_{n,1}, \dots, y_{n,m})$; $y_{h,k} = y_h(u_k(x))$, ($v = 1, 2, \dots, n$), e le limitazioni $|y_v(x) - g_v(0)| \leq p$. L'A. considera dapprima il caso che le f_v siano lipschitziane rispetto alle $y_{h,k}$, caso in cui vale il teorema di esistenza e di unicità e prova successivamente il teorema esistenziale enunciato.

G. Sansone.

Hayashi, Kyôzô: On transformations of differential equations. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A. 28, 313—325 (1954).

L'A. indica una trasformazione di un sistema del tipo (1) $y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ ($i = 1, \dots, n$), con le f_i continue nell'insieme E_{n+1} definito dalle $0 \leq x \leq a$, $|y_i| \leq +\infty$, in un sistema del tipo (2) $Y'_i = h_i(x, Y_1, \dots, Y_{n+1})$ ($i = 1, \dots, n+1$), con le h_i continue nell'insieme S_{n+1} definito dalle $0 \leq x \leq a$, $Y_1^2 + \dots + Y_{n+1}^2 = 1$, le Y che compaiono nelle (2) essendo appunto assoggettate alla ulteriore condizione $Y_1^2 + \dots + Y_{n+1}^2 = 1$. L'A. utilizza questa trasformazione per indicare condizioni necessarie e sufficienti affinché ogni soluzione del sistema (1) abbia un punto terminale (end point) di ascissa $x = a$; a ciò, per esempio, è necessario e sufficiente che in E_{n+1} esista una funzione continua e positiva $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$, dotata di derivate prime continue nell'interno di E_{n+1} , uniformemente infinitesima al divergere di $(y_1^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}$ siffatta da aversi $\partial\varphi/\partial x + (\partial\varphi/\partial y_1)f_1 + \dots + (\partial\varphi/\partial y_n)f_n \geq 0$. L'A. tratta quindi l'analogo problema per l'equazione $y'' = f(x, y, y')$, data in un insieme del tipo $0 \leq x \leq a$, $\underline{w}(x) \leq y \leq \bar{w}(x)$, $-\infty < y' < +\infty$. G. Scorza Dragoni.

Sibuya, Yasutaka: Sur un système des équations différentielles ordinaires non linéaires à coefficients constants ou périodiques. I. II. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I 7, 19—32, 107—127 (1954).

I. L'A. considère le système des équations différentielles

$$(1) \quad dx_j/dt = \lambda_j x_j + \sum'' a_{j p_1 \dots p_n}(t) x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n} \quad (j = 1, \dots, n),$$

où les $a_{j p_1 \dots p_n}(t)$ sont des fonctions périodiques de la période ω et les λ_j sont des constantes purement imaginaires. Il suppose de plus qu'une transformation formelle à coefficients périodiques (2) $x_j = y_j + \sum'' \gamma_{j p_1 \dots p_n}(t) y_1^{p_1} \dots y_n^{p_n}$ ($j = 1, \dots, n$) amène le système (1) en un système $dy_j/dt = \lambda_j y_j$ ($j = 1, \dots, n$). On peut alors déterminer les constantes contenues dans les $\gamma_{j p_1 \dots p_n}(t)$ de manière que les séries formelles (2) soient convergentes, si l'une des deux conditions suivantes est remplie: (i) les $\omega \lambda_j / i\pi$ sont des nombres rationnels; (ii) toute solution de (1) prenant des valeurs assez petites reste bornée pour $t \rightarrow +\infty$. On établit encore parallèlement les propositions analogues dans le cas où les $a_{j p_1 \dots p_n}(t)$ sont indépendants de t .

II. L'A. étudie, comme dans le premier mémoire, un système des équations différentielles périodiques, en supposant l'existence d'une transformation formelle périodique qui amène le système donné en un système $dy_j/dt = \lambda_j y_j$ ($j = 1, \dots, n$). Supposons que la partie réelle de λ_j soit $=, >, < 0$ suivant que $j \leq s, s < j \leq r, j > r$, et de plus que les $\omega \lambda_j / i\pi$ soient des nombres rationnels pour $j = 1, \dots, r$ ($s \leq r$). Il existe alors une solution développable en des séries entières convergentes de $C_j e^{\lambda_j t}$ ($j = 1, \dots, r, r+1, \dots, n$) à coefficients périodiques. Si l'on suppose

l'existence des relations analytiques $\xi_j = \xi_j(\xi_1, \dots, \xi_\tau)$ ($j = \tau + 1, \dots, n$) entre les valeurs initiales ξ_j , telles que la solution correspondante reste bornée pour $t \rightarrow -\infty$, il existe une solution développable en des séries entières convergentes de $C_j e^{\lambda_j t}$ ($j = 1, \dots, s$) à coefficients périodiques.
M. Hukuhara.

Urabe, Minoru and Shôichirô Katsuma: Generalization of Poincaré-Bendixson theorem. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 17, 365—370 (1954).

Per il sistema di equazioni differenziali ordinarie (1) $dx/dt = X(x, y)$, $dy/dt = Y(x, y)$ l'A. dà un'estensione del teorema di Poincaré-Bendixson, rilevando che sotto opportune condizioni di derivabilità, in un campo R privo di punti critici esiste almeno un ciclo limite anche nel caso in cui il campo di direzioni definito dal sistema (1) è tangente in qualche punto alle curve che limitano il campo R .

S. Cinquini.

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On curves defined by binary non-conservative differential systems. Amer. J. Math. 76, 497—501 (1954).

Betrachtet wird das System $x' = \alpha x + \beta y$, $y' = \gamma x + \delta y$, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ stetige Funktionen von t sind und der Strich Differentiation nach t angibt. Dabei wird angenommen, daß diese Funktionen für $t \rightarrow \infty$ die Grenzwerte a, b, c, d haben. Verff. untersuchen das Verhalten des Winkels $\theta = \arctg y/x$ einer Lösungskurve für $t \rightarrow \infty$ und zeigen: Sind die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 1. reell und verschieden, so existiert für jede Lösung (*) $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta_0$; 2. konjugiert komplex, so gilt (*): $|\theta(t)| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$; 3. gleich und hat die Matrix mehrfache Elementarteiler, so gilt entweder (*) für alle Lösungskurven oder aber (*). Dabei bestimmt sich θ_0 aus $c \cdot \cos^2 \theta_0 + \frac{1}{2}(d-a) \cdot \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0 - b \cdot \sin^2 \theta_0 = 0$. — Zum Schluss Ausdehnung der Ergebnisse auf das System $x = a x + b y + f(x, y, t)$, $y = c x + d y + g(x, y, t)$. Im 3. Fall gilt jetzt die Alternativaussage nicht mehr gleichzeitig für alle Lösungskurven.

Joachim Nitsche.

Bautin, N. N.: Über periodische Lösungen eines gewissen Differentialgleichungssystems. Priklad. Mat. Mech. 18, 128 (1954) [Russisch].

Für das System $dx/dt = x(a_{00} + a_{10}x + a_{01}y)$, $dy/dt = y(b_{00} + b_{10}x + b_{01}y)$, das in der Theorie der nicht-linearen Schwingungen auftritt, kann man die Frage nach der Existenz von Grenzyklen der Trajektorien auf Grund einer Bemerkung von Dulac (dies. Zbl. 16, 400) negativ beantworten.

Mikolajska, Z.: Sur l'équation généralisée des oscillations entretenues. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 309—313 (1954).

Das System (1) $\dot{x} = v$, $\dot{v} = g(x, v)$ habe nur periodische Lösungen. (1) und (2): $\dot{x} = v$, $\dot{v} = g(x, v) + p(x, v)$ haben nur um Nullpunkt der (x, v) -Ebene einen singulären Punkt: p, g seien stetig. $W(x, v) \in C^1$ sei ein erstes Integral von (1). Es gelte $W(0, 0) = 0$ und $\text{sign } W_v = \text{sign } v$ für $v \neq 0$, $W_x \Rightarrow 0$ für $|v| \rightarrow \infty$ und $W_v \Rightarrow \pm 1$ für $v \rightarrow \pm \infty$. Die gleichmäßige Konvergenz beziehe sich auf ein Intervall $\Delta: (-x_1, x_1)$. Weiter sei $W_v p \neq 0$ für $x = x_1$. Es mögen ein $\eta > 0$ und zwei im Lebesgueschen Sinne in Δ integrierbare Funktionen $a(x)$ und $b(x)$ existieren, so daß $p(x, v) \leq v a(x)$ für $|x| \leq x_1$, $v \geq \eta$ und $p(x, v) \geq -v b(x)$ für $|x| \leq x_1$, $v \leq -\eta$ sowie $\int_{-x_1}^{x_1} a(x) dx < \int_{-x_1}^{x_1} b(x) dx$. In der Umgebung einer Kurve $W(x, v) = k_0 > 0$ sei $vp(x, v) \geq 0$. Dann gilt: 1. Die Klasse aller periodischen Integrale von (2) ist leer, oder alle Integrale sind beschränkt. 2. Es existiert mindestens ein nicht-konstantes periodisches Integral. — In einem zweiten Satz werden andere, umfangreichere Bedingungen formuliert, bei deren Erfüllung (2) die gleichen Eigenschaften wie im hier angegebenen Satz hat.

W. Haacke.

Graffi, Dario: Sulle oscillazioni forzate nei sistemi non lineari a due gradi di libertà. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 16, 176—180 (1954).

L'A. considera il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} L \ddot{y}_1 + M \ddot{y}_2 + g_1(\dot{y}_1) + K_1 y_1 &= -\omega e_1 \sin(\omega t + \gamma_1), \\ M \ddot{y}_1 + L_2 \ddot{y}_2 + g_2(\dot{y}_2) + K_2 y_2 &= -\omega e_2 \sin(\omega t + \gamma_2) \end{aligned}$$

il quale, sotto certe condizioni, ammette soluzioni periodiche di periodo $T = 2\pi/\omega$ (D. Graffi, questo Zbl. 43, 312). È possibile stabilire delle limitazioni per i valori quadratici medi in un periodo T di codeste soluzioni (y_1, y_2) e anche delle derivate prime (\dot{y}_1, \dot{y}_2) dalle quali si deduce talvolta la stabilità o l'instabilità delle soluzioni medesime.

G. Lamparellò.

Gillies, A. W.: On the transformations of singularities and limit cycles of the variational equations of van der Pol. Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 152—167 (1954).

The paper considers the differential system $\dot{b} = b(1 - b^2) - F \cos \Phi$, $\dot{\Phi} = -b \mp F \sin \Phi$ from the point of view of the variation of its singularities and limit cycles with the parameters F and x . This system appears as the variational equations of the van der Pol equation with a forcing term and has been considered by Cartwright (this Zbl. 39, 99). The author's contribution consists in finding out and suggesting a way to correct a mistake in Cartwright's work. As a consequence certain hysteresis effects to be expected from a van der Pol oscillator are less complicated than it was suggested by Cartwright's solution.

M. M. Peixoto.

Ajzerman, M. A. and F. R. Gantmacher: Existenzbedingungen für das Stabilitätsgebiet für ein einläufiges automatisches Regelungssystem. Priklad. Mat. Mech. 18, 103—122 (1954) [Russisch].

Ein Regelkreis heißt strukturell instabil, wenn seine charakteristischen Gleichung bei beliebiger Wahl der stets positiven Zeitkonstanten und Verstärkungskoeffizienten) mindestens eine Nullstelle mit nichtnegativem Realteil besitzt. Die Verff. beweisen hierfür einige teils notwendige, teils hinreichende Kriterien. Man muß dazu wissen, wieviel Glieder der einzelnen Grundtypen (Schwinger, Speicher, astatisch) in dem Regelkreis enthalten sind, und Ungleichungen zwischen den verschiedenen Anzahlen nachprüfen. Die Beweise beruhen auf den Ortskurvenkriterien und erfordern eine große Zahl von Fallunterscheidungen. — Die Verff. formulieren zum Schluß das Problem, von dessen allgemeiner Lösung man noch weit entfernt ist, in abstrakter Form:

Es sei ein System von Differentialgleichungen $\sum_{j=1}^m (\alpha_{ij} a_{ij} p^2 + \beta_{ij} b_{ij} p + \gamma_{ij} c_{ij}) x_j = 0$ ($p = d/dt$) ($i = 1, \dots, m$) gegeben. Darin sind die a, b, c beliebig positiv, die α, β, γ sind nur der Werte $+1, 0, -1$ fähig, diese Werte sind vorgegeben zu denken und bestimmen den Typ des Systems. Man soll bei gegebenem Typ entscheiden, ob im Raum der Parameter a, b, c ein Gebiet stabiler Lösungen existiert oder nicht.

W. Hahn.

Spasskij, R. A.: Über eine Klasse von Regelsystemen. Priklad. Mat. Mech. 18, 329—344 (1954) [Russisch].

Verf. geht von dem Differentialgleichungssystem $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^N b_{ij} x_j + \sum_{s=1}^m h_{si} f_s(\sigma_s)$

($i = 1, \dots, N$), $\sigma_s = \sum_{j=1}^N p_{sj} x_j$ ($s = 1, \dots, m$) aus, das eine regeltechnische Deutung zuläßt: das Regelsystem hat m Stellglieder, und die Funktionen f sind die (i. a. nichtlinearen) Charakteristiken der Stellmotoren. Für diese gilt die Monotoniebedingung $f_s(0) = 0$, $y f_s(y) > 0$ für $y \neq 0$. Die Matrix (b_{ij}) habe k verschwindende Eigenwerte, die übrigen Eigenwerte sollen negative Realteile haben. Verf. führt das System in die „kanonische Gestalt“ mit den Variablen z_i (vgl. Lufé, dies. Zbl. 31, 183) über. Er leitet zunächst zwei Bedingungen dafür ab, daß die triviale Gleichgewichtslage $z_1 = \dots = z_N = 0$ die einzig mögliche ist (notwendig hierfür ist $m \geq k$) und untersucht die Stabilität der trivialen Gleichgewichtslage mit Hilfe der zweiten Ljapunovschen Methode, und zwar durch zwei verschiedene Ansätze zur Konstruktion einer Ljapunovschen Funktion V für das kanonische System. Der erste Ansatz (Lufé, dies. Zbl. 42, 179) lautet: V = quadratische Form in den Variablen mit unbestimmten Koeffizienten, über die später verfügt wird, minus lineare Verbindung der z_i^2 . Im zweiten Ansatz (Malkin, dies. Zbl.

42, 98) ist der Subtrahend eine lineare Verbindung der Integrale $\int_0^{\sigma_s} f_s(y) dy$. Durch Auswertung der üblichen Bedingungen (V muß positiv, $\frac{dV}{dt}$ negativ definit sein) ergeben sich für die

unbestimmten Koeffizienten des Ansatzes Gleichungen, deren Erfüllbarkeit hinreichend für asymptotische Stabilität der Null-Lösung ist. Verf. formuliert zum Schluß die im allgemeinen Fall sehr unhandlichen Bedingungen für spezielle Fälle, wo sie einfacher werden. [Vgl. auch die vom Verf. noch nicht berücksichtigten Arbeiten von Letov, Priklad. Mat. Mech. 17, 401—410 (1953); Duvakin-Letov, folgend. Referat]. W. Hahn.

Duvakin, A. P. und A. M. Letov: Über die Stabilität von Regelsystemen mit zwei regulierenden Organen. Priklad. Mat. Mech. 18, 163—166 (1954) [Russisch].

Die Verf. untersuchen die Stabilität der trivialen Lösung bei einem Gleichungssystem von der im vorsteh. Referat aufgeführten Art für $m = 2$, und zwar ohne erst die „kanonische Form“ herzustellen. Sie setzen eine Ljapunovsche Funktion in der von Malkin (vgl. vorsteh. Referat) gegebenen Form an und erhalten für asymptotische Stabilität der Null-Lösung verhältnismäßig einfach formulierbare hinreichende Bedingungen. Das Verfahren wird an einem einfachen Beispiel erläutert. W. Hahn.

Krasovskij, N. N.: Über die Stabilität einer Bewegung im großen bei dauernd wirkenden Störungen. Priklad. Mat. Mech. 18, 95—102 (1954) [Russisch].

Es sei ein System der Gestalt (1) $\dot{x}_i = X_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, \dots, n$) vorgelegt, das die triviale Lösung $x_1 = \dots = x_n = 0$ besitzt. Diese sei „im großen“ stabil, d. h. jede Lösung für $t \rightarrow \infty$ gegen das System $0, \dots, 0$. Neben (1) wird (2) $\dot{x}_i = X_i(x_1, \dots, x_n) + R_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, \dots, n$) betrachtet, wobei die R_i an der Stelle $x_1 = \dots = x_n = 0$ i. a. von null verschieden sind. Nach Ljapunov heißt die triviale Lösung von (1) „stabil bei dauernd wirkenden Störungen“, wenn bei gegebenem $\varepsilon > 0$ und von ε abhängigen $\eta_1(\varepsilon)$ und $\eta_2(\varepsilon)$ jede Lösung (x_1, \dots, x_n) von (2), für die $|x_i(t_0)| < \varepsilon$ ($i = 1, \dots, n$) gilt, der Ungleichung $|x_i(t)| < \eta_1(t > t_0)$ genügt, sofern nur die Störungen in Bereich $|x_i(t)| < \varepsilon$ den Ungleichungen $|R_i| < \eta_2$ genügen. Verf. erweitert diesen Begriff zur „Stabilität im großen bei dauernd wirkenden Störungen“, indem er fordert: jede Lösung von (2) soll der Forderung $\limsup |x_i(t)| < \varepsilon$ für $t \rightarrow \infty$ genügen und zwar bei beliebigen R_i , sofern diese im Gebiet $|x_i(t)| < \varepsilon$, $t > t_0$ den Ungleichungen $|R_i(x_1, \dots, x_n, t)| < \eta(\varepsilon) f(r)$ ($r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$) genügen; $f(r)$ ist eine vorgegebene Funktion. Verf. stellt nun für einige Systeme zweiter Ordnung hinreichende Bedingungen für die erklärte Art der Stabilität auf (mittels der „zweiten Methode von Ljapunov“ und vervollständigt damit Untersuchungen, die ursprünglich von einem Problem aus der Theorie der automatischen Regelungen ausgehend, von Barbašin (dies. Zbl. 47, 86), Erugin (dies. Zbl. 47, 179), Malkin (dies. Zbl. 48, 72) und dem Verf. [Priklad. Mat. Mech. 17, 339 (1953)] durchgeführt worden sind. Vgl. auch folgend. Referat. W. Hahn.

Eršov, B. A.: Ein Satz über die Stabilität der Bewegung im großen. Priklad. Mat. Mech. 18, 381—383 (1954) [Russisch].

Bei einem im speziellen Teil des vorsteh. Ref. behandelten Gleichungssystem kann man eine Voraussetzung sparen. W. Hahn.

Malkin, I. G.: Zur Frage der Umkehrbarkeit des Satzes von Ljapunov über die asymptotische Stabilität. Priklad. Mat. Mech. 18, 129—138 (1954) [Russisch].

Es sei $\dot{x}_s = X_s(t, x_1, \dots, x_n)$ ($s = 1, \dots, n$) im Bereich $t \geq 0$, $\sum x_s^2 \leq H$ definiert. Das System besitze die triviale Lösung $x_1 = \dots = x_n = 0$. Diese ist bekanntlich asymptotisch stabil, wenn eine Ljapunovsche Funktion V existiert (d. h. es ist dV/dt negativ definit und $\limsup V = 0$ für $t \rightarrow \infty$). Dagegen kann man nicht ohne weiteres aus der asymptotischen Stabilität der Nulllösung auf die Existenz einer Ljapunovschen Funktion schließen, sondern dies ist nur unter speziellen Annahmen für die X_s oder unter Zusatzvoraussetzungen für die Lösungen zulässig. Verf. beweist über die bisherigen Ergebnisse hinaus unter Verwendung Masserascher Sätze (vgl. dies. Zbl. 38, 250): Es sei $F_s(t, x_1^0, \dots, x_n^0, t^0)$ diejenige Lösung, die für $t = t^0$ die Werte x_s^0 annimmt. Es existiere eine Zahl $\delta > 0$ derart, daß für $t^0 \geq 0$, $\sum (x_s^0)^2 \leq \delta^2$ die Beziehung $\lim F_s = 0$ (die aus der asymptotischen Stabilität folgt) gleichmäßig bezüglich der x_s^0, t^0 gilt. Dann existiert eine Ljapunovsche Funktion, und dieser Satz ist umkehrbar. Er gilt auch für etwas allgemeinere Systeme (mit beständig wirkenden Störungen, vgl. z. B. die oben besprochene Arbeit von Krasovskij). W. Hahn.

Barbašin, E. A. und N. N. Krasovskij: Über die Existenz der Ljapunovschen Stabilität im ganzen. Priklad. Mat. Mech. 18, 345—350 (1954) [Russisch].

Die Verf. zeigen, daß die im vorsteh. Referat gewonnenen Sätze von Malkin bei stimmungsgemäßer Übertragung auch für die asymptotische Stabilität im ganzen (also bei beliebigen Anfangswerten) richtig bleiben. Zur genauen Formulierung ist eine neue Modifikation des Stabilitätsbegriffs, die „gleichmäßige Stabilität im ganzen“ erforderlich. Wenn die Nulllösung des Systems gleichmäßig stabil im ganzen ist, dann kann man auch eine Stabilitätsaussage über ein System von Differential-Differenzengleichungen machen, das aus dem Ausgangssystem durch Einführung verzögerter Argumente hervorgeht.

W. Hahn.

Kamenkov, G. V.: Über die Stabilität der Bewegung in einem endlichen Zeitintervall. Priklad. Mat. Mech. 17, 529–540 (1953) [Russisch].

Verf. beschäftigt sich mit einer Modifikation des Stabilitätsbegriffes, der für spätere Anwendungen der Theorie von größerer Wichtigkeit sein dürfte als manche andere Spielart. Es sei ein System von nichtstationären Differentialgleichungen nach Absonderung der linearen Teile in der Form

$$\dot{x}_i = p_{i1}(t)x_1 + \dots + p_{in}(t)x_n + X_i(x_1, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, \dots, n)$$

gegeben, $x_1 = \dots = x_n = 0$ sei die „ungestörte Bewegung“. Wenn sich zu jedem System t_0 ,

x_{10}, \dots, x_{n0} von Anfangswerten, die der Bedingung $\sum_{i=1}^n (a_{i1}x_{10} + \dots + a_{in}x_{n0})^2 \leq A$ ge-

nügen (die a_{ij} reelle Zahlen mit nicht verschwindender Determinante, A eine „hinreichend kleine“ Zahl), ein Intervall $(t_0, t_0 + \tau)$ derart finden läßt, daß für $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ beständig

$\sum_{i=1}^n (a_{i1}x_1(t) + \dots + a_{in}x_n(t))^2 \leq A$ ist, dann heißt die ungestörte Bewegung stabil in dem

endlichen Intervall. Kriterien hierfür liefern die Wurzeln der Gleichung $\det((p_{ij}(t_0) - \lambda E) = 0$. Sie müssen alle negative Realteile haben; wenn mehrere Wurzeln auftreten, kommen noch weitere Bedingungen hinzu. Die Beweise verlaufen ähnlich wie die der Ljapunovschen Theorie. Es wird eine Art Ljapunovscher Funktion konstruiert, nämlich der „Abstand“ der gestörten Bewegung von der ungestörten im Phasenraum. — Vgl. auch das folgende Referat. W. Hahn.

Lebedev, A. A.: Zum Problem der Stabilität der Bewegung in einem endlichen Zeitintervall. Priklad. Mat. Mech. 18, 75–94 (1954) [Russisch].

Verf. führt die Untersuchungen der vorstehend besprochenen Arbeit fort. 1. Er gibt ein Verfahren an, die Zahl τ , d. h. die Länge des Intervalls, zu bestimmen bzw. abzuschätzen. 2. Er leitet Kriterien dafür ab, daß Stabilität bei endlichen Anfangsbedingungen vorliegt, d. h. die in der Definition auftretende Zahl A ist nicht „hinreichend klein“, sondern fest gegeben. 3. Er läßt „ständig wirkende Störungen“ zu; d. h. die rechten Seiten des Gleichungssystems verschwinden nicht notwendig für $x_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$). 4. Er beweist einige Sätze, die auf Stabilität in einem endlichen Zeitintervall schließen lassen, wenn man Aussagen über das Verhalten der Lösungen in Teilintervallen machen kann. 5. Er erläutert die Ergebnisse an einigen Beispielen, und zwar für $n = 2$.

W. Hahn.

Vinograd, R. E.: Ein neuer Beweis eines Satzes von Perron und gewisse Eigenschaften regulärer Systeme. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 2 (60), 129–136 (1954) [Russisch].

Definitionen aus der Ljapunovschen Theorie. 1. „Charakteristische Zahl“ einer Funktion f : $X(f) = -\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln |f(t)|$. 2. Es sei $dx_s/dt = p_{s1}x_1 + \dots + p_{sn}x_n$ ($s = 1, \dots, n$)

ein System linearer Differentialgleichungen mit beschränkten Koeffizienten. Ein Fundamentalsystem von Lösungen heißt „normal“, wenn die charakteristischen Zahlen in ihrer Gesamtheit die möglichen Maximalwerte haben. 3. Die Gesamtheit der charakteristischen Zahlen eines normalen Systems sind die char. Z. des Systems von Differentialgleichungen. 4. Ein System von Differentialgleichungen heißt „regulär“ (pravil'nyj), wenn die Summe seiner charakteristischen

Zahlen gleich der charakteristischen Zahl der Funktion $\exp\left(\int_0^t \sum_{s=1}^n p_{ss} dt\right)$ und gleichzeitig gleich

der negativen charakteristischen Zahl von $\exp\left(-\int_0^t \sum_{s=1}^n p_{ss} dt\right)$ ist. Verf. schreibt das Ausgangs-

system vektoriell: $x' = A(t)x$ und zeigt: a) Bei einem regulären System existiert für jeden Lösungsvektor der Ausdruck $\lambda[x] = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln |x(t)|$. b) Es sei $x_1(t), \dots, x_n(t)$ ein normales

Lösungssystem, aus dem durch Orthogonalisieren das System z_1, \dots, z_n hervorgeht. Es sei $x_1 = z_1$ und $x_k - z_k = x_k^*$ ($k \geq 2$). Dann gilt für ein reguläres Ausgangssystem

$$\lambda [\sin(x_k; x_k^*)] = 0 \quad (k = 2, \dots, n).$$

(Der Sinus ist wie üblich vektoriell erklärt.) c) Die Sätze sind in gewissem Sinne umkehrbar. Haupt Hilfsmittel ist der Satz von Perron, nach dem man das Ausgangssystem unitär auf ein Dreieckssystem mit reellen Diagonalelementen transformieren kann. Für diesen Satz gibt Verf. einen neuen kurzen Beweis. (Bemerkung: Verf. arbeitet mit den „charakteristischen Exponenten“, die sich von den oben definierten char. Zahlen nur durch das Vorzeichen unterscheiden.)

W. Hahn.

Zimmerberg, Hyman J.: On fundamental matrix solutions. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 391—394 (1954).

L'A. considère le problème aux limites écrit sous forme matricielle,

$$(*) \quad L[y] \equiv y' - A(x)y = 0, \quad S[y] \equiv M y(a) + N y(b) = 0.$$

Il montre que l'on peut représenter la matrice solution fondamentale de (*) en fonction de la matrice de Green de ce système ou en fonction de la matrice de Green généralisée si (*) est compatible.

Fl. Bureau.

Čermák, J.: On a new method of solving homogeneous systems of linear difference equations with constant coefficients. Ann. Polon. math. **1**, 195—202 (1954).

Es handelt sich um die explizite Lösung der Differenzengleichung $u(x+1) = A(x)u(x)$, wo A eine n -reihige quadratische Matrix mit konstanten Elementen und $u(x)$ ein einspaltig geschriebener Vektor mit n Komponenten ist. Da die Lösung natürlich in der Gestalt $u(x) = v_1 A^x u(x)$ hingeschrieben werden kann, handelt es sich also darum, die Elemente der Potenz $A^x u(x)$ explizit darzustellen. Solche Darstellungen mit Hilfe der charakteristischen Wurzeln sind, wie Verf. bemerkt, bereits bekannt; er gewinnt auf neuem Wege eine weitere. Dabei stützt er sich weitgehend auf Ergebnisse einer umfangreichen Arbeit von Weyl [Monatsh. Math. Phys. **1**, 163—237 (1890)], die dort vermutlich aus der Elementarteilertheorie geflossen sind, jedenfalls sich daraus gewinnen lassen. Haupt Hilfsmittel ist das „Normalvektorsystem in bezug auf eine charakteristische Wurzel α^v “, womit folgendes gemeint ist: Der Rang der Matrixpotenz $(A - \alpha E)^v$ ist mit wachsendem v monoton abnehmend und von einem gewissen r an konstant gleich $n - \alpha$, wo α die Vielfachheit der Wurzel α bedeutet. Bezeichnet man demgemäß diesen Rang mit $n - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_r$, so ist $\alpha_\mu \geq 0$, und zwar Gleichheit etwa von $\mu = r + 1$ an, so daß $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = \alpha$ ist. Außerdem ist $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_r$. Es gibt dann α linear unabhängige Vektoren $a^{\mu, \nu}$ ($\mu = 1, \dots, r$; $\nu = 1, \dots, \alpha_r - \mu + 1$), die den Gleichungen genügen: $(A - \alpha E) a^{\mu, \nu} = a^{\mu, \nu+1}$ für $\mu = 1, \dots, r - 1$; $(A - \alpha E) a^{r, \nu} = 0$. Sie bilden das genannte „Normalvektorsystem“. Aus diesen den verschiedenen charakteristischen Wurzeln zugehörigen Normalvektorsystemen mit im ganzen n Vektoren läßt sich die explizite Lösung des Problems unschwer aufbauen.

O. Perron.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Lal, Goverdhan, Georges Papy et Jacob Sonnenschein: Procédés de calcul en algèbre extérieure. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **40**, 238—246 (1954).

On donne un procédé de calcul de l'élément q_p , tel que $q_p \wedge I^{n-\mu+1} = 0$, dans la décomposition directe d'une forme extérieure Ω_p , $p \leq n$, relativement à une forme quadratique extérieure I de rang $2n$.

Th. Lepage.

Papy, Georges: Sur la réciproque du théorème de Volterra-Poincaré pour les formes à coefficients continus. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **40**, 25—28 (1954).

Démonstration du Lemme de Poincaré pour les formes à coefficients continus, présentant une variante de la démonstration de Gillis [Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **29**, 179—186 (1943)].

H. Guggenheimer.

Lepage, Th.: Équation du second ordre et transformation symplectiques. Centre Belge Rech. math., Colloque équations aux dérivées partielles, Louvain 17—19 déc. 1953, 79—104 (1954).

Der Inhalt der Note ist enthalten im wesentlichen in den folgenden Abhandlungen des Verf.: Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **35**, 694—708 (1945); dies. Zbl. **48**, 72; **51**, 80.

K. Maurin.

Glenn, Oliver E.: Invariants when the transformation is infinitesimal, and their relevance in bio-mathematics and the theory of terrestrial magnetism. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 8, 1—42 (1954).

Der Begriff der Berührungstransformation wird dahingehend verallgemeinert, daß nach solchen Funktionen $H(q, r, \vartheta, dq, dr, d\vartheta)$ (q, r, ϑ : räumliche Polarkoordinaten) gefragt wird, die sich bei einer Transformation $q \rightarrow q'$ usw. mit einer Konstanten multiplizieren. Nach dem Vorbild Lies wird hierfür eine Differentialgleichung angegeben. Weiterhin wird dann eine spezielle Transformationsgruppe betrachtet und für diese das Invariantenproblem gelöst. Auch das inverse Problem (gegeben eine Funktion, gesucht die Transformationsgruppe, bei der diese Funktion invariant ist) wird untersucht. Sodann wird eine Anwendung auf die Vererbungslehre diskutiert, bei der auf Grund plausibler Annahmen der Satz von Lamarck bewiesen wird. Schließlich wird in einer weiteren Anwendung die vertikale Komponente des magnetischen Erdfeldes untersucht.

C. Heinz.

Maccoll, J. W.: Some British applications of the method of characteristics. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém. Coll. 8° 28, Nr. 6, 17—27 (1954).

Geiringer, Hilda: Bemerkung zur Theorie der Charakteristiken. Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 107—109 (1954).

Für den Fall zweier quasilinearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für zwei Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$ werden die charakteristischen Gleichungen (Richtungsbedingung und Verträglichkeitsbedingung) hergeleitet. Dies geschieht so, daß hierbei die Symmetrien und die bestehenden Identitäten deutlich in Erscheinung treten, was in der bisherigen einschlägigen Literatur meist zu vermissen ist.

R. Sauer.

Plis, A.: The problem of uniqueness for the solution of a system of partial differential equations. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 55—57 (1954).

Für das Differentialgleichungssystem

$$(*) \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, y) \frac{\partial u_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^m b_{ij}(x, y) u_j \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

hat T. Carleman (dies. Zbl. 22, 340) einen Eindeutigkeitssatz bewiesen unter der Voraussetzung, daß in einer Umgebung W des Punktes $(0, 0)$ von den Koeffizienten a_{ij} , b_{ij} gewisse Differenzierbarkeitsforderungen erfüllt werden und daß dort alle Eigenwerte der Matrix $\|a_{ij}(x, y)\|$ voneinander verschieden sind: Jede in W stetig differenzierbare und den für hinreichend kleine $|y|$ gestellten Anfangsbedingungen $u_i(0, y) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) genügende Lösung $u_i(x, y)$ verschwindet identisch in einer Nachbarschaft des Punktes $(0, 0)$. — Verf. gibt ein Beispiel eines Systems der Form $(*)$ an, bei dem eine der obigen Voraussetzungen, nämlich die Verschiedenheit der Eigenwerte der Matrix $\|a_{ij}(x, y)\|$ für $x = 0$, verletzt und für welches die formulierte Eindeutigkeitsaussage nicht mehr richtig ist. Er wählt $m = 2$; die $a_{ij}(x, y)$ sind in der ganzen Ebene unendlich oft differenzierbar, die $b_{ij}(x, y)$ verschwinden identisch. Die Lösung $u_i(x, y)$ ist ebenfalls für alle x, y unendlich oft differenzierbar, verschwindet mit allen ihren Ableitungen für $x = 0$, aber in keiner Umgebung des Nullpunktes identisch.

Johannes Nitsche.

Hornich, H.: Lösung der verallgemeinerten Eulerschen Differentialgleichung für homogene Funktionen. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 36, 361—365 (1954).

Behandelt wird die Differentialgleichung $\sum a_{ik} x_i \partial u / \partial x_k = f(x_1, \dots, x_n)$, wobei die a_{ik} reell sind, $a_{ik} = a_{ki}$, $\text{Det } |a_{ik}| \neq 0$. Durch eine orthogonale Transformation läßt sie sich auf die Normalform $\sum a_i x_i \partial u / \partial x_i = f(x_1, \dots, x_n)$ bringen, wo die a_i reelle, von 0 verschiedene Zahlen sind, f sei eine Potenzreihe $f = \sum f_{l_1, \dots, l_n} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$. Die Gleichung wird dann formal befriedigt durch die Reihe $u = \sum u_{l_1, \dots, l_n} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$, wenn $u_{l_1, \dots, l_n} \sum a_i l_i = f_{l_1, \dots, l_n}$ ist. Verf. setzt nun voraus, daß stets $\sum a_i l_i \neq 0$ ist (außer für $l_1 = \dots = l_n = 0$), so daß die u_{l_1, \dots, l_n} existieren. Aber die Reihe wird unter Umständen, wenn nämlich unter den Zahlen $\sum a_i l_i$ absolut hinreichend kleine vorkommen, nirgends konvergieren, so daß es kein am Null-

punkt reguläres Integral gibt. Verf. weist in diesem Fall die Existenz eines Integrals nach welches nach Potenzen von x_1, \dots, x_n fortschreitet, wobei aber nur die Exponenten l_1, \dots, l_n von x_1, \dots, x_{n-1} sämtlich ganz und ≤ 0 sind, während unter den Exponenten von x_n außerdem auch solche der Form $-a_n^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i l_i$ vorkommen. O. Perron.

Kamynin, L. I.: Über einen Mangel der Methode der Geraden. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 13–16 (1954) [Russisch].

Das Anfangswertproblem für eine partielle Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Veränderlichen (x, t) , wobei die Anfangswerte auf der ganzen Geraden $t = 0$ gegeben sind, kann mit Hilfe der Methode der Geraden auf das folgende System von unendlich vielen gewöhnlichen Differentialgleichungen (1) $\frac{d^k u_n}{dt^k} = f_n(t, u_n, \dots, u_{n+k})$ mit Anfangsbedingungen (2) $\frac{d^l u_n(0)}{dt^l} = q_l(n)$, $l = 0, 1, \dots, k-1$, $n = \dots, -1, -2, 0, 1, 2, \dots$ zurückgeführt werden. Es zeigt sich dabei, daß die Klasse der Funktionen, in der die Eindeutigkeit der Lösung des Systems (1), (2) gewährleistet wird, viel enger ist, als die Klasse, in der das entsprechende Anfangswertproblem für die partielle Differentialgleichung eindeutig lösbar ist. Dieser Umstand erweist sich als ein Mangel der Methode der Geraden. Verf. beweist nämlich, daß unter gewissen Bedingungen, die das Wachsen der Lösung und der Anfangswerte bei $|x| \rightarrow \infty$ beschränken, die Lösung des Systems (1), (2) eindeutig ist und daß diese Bedingungen im gewissen Sinne für die Eindeutigkeit notwendig sind. J. Szarski.

Diaz, Joaquin et Goeffrey Ludford: Sur la solution des équations linéaires aux dérivées partielles par des intégrales définies. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1963–1964 (1954).

Für die lineare homogene Differentialgleichung $L(u) = u_{xx} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = 0$ hat Le Roux gezeigt, daß man aus einer von einem Parameter α abhängigen Lösung $U(x, y; \alpha)$, die auf jeder Charakteristik $x = \alpha$ die Bedingung $U_y + a(x, y) U = 0$ erfüllt, weitere Lösungen $u(x, y) = \int_{\alpha_0}^x U(x, y; \alpha) \cdot f(\alpha) d\alpha$ erhält, wobei $f(\alpha)$ eine willkürliche Funktion ist [Ann. Sci. École norm. sup., III. Sér. **12**, 227–316 (1895)]. Auch die Integraloperatorenmethode von Bergman (dies. Zbl. **46**, 190) liefert Lösungen der Differentialgleichung $L(u) = 0$, die von einer willkürlichen Funktion einer Veränderlichen abhängen. In der vorliegenden Note wird gezeigt, daß die Lösungen von Bergman sich in die Lösungen von Le Roux überführen lassen. Zum Schluß wird die Äquivalenz der Methoden von Le Roux und Bergman am Problem der stationären zweidimensionalen Gasdynamik näher erläutert. R. Sauer.

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On the local behavior of solutions of non-parabolic partial differential equations. II. The uniqueness of the Green singularity. Amer. J. Math. **76**, 351–361 (1954).

[Teil I *ibid.* **75**, 449–476 (1953).] Wie Bôcher [Bull. Amer. math. Soc. **9**, 455–465 (1903)] gezeigt hat, folgt für jede zweimal differenzierbare Lösung $u(x, y)$ der Gleichung $u_{xx} + u_{yy} + d u_x + e u_y + f u = 0$, falls d, e, f analytisch von x, y abhängen, aus $u \rightarrow \infty$ mit $x^2 + y^2 \rightarrow 0$ das Verhalten $u \sim \text{Const.} \cdot \log(x^2 + y^2)^{-1}$. Verff. untersuchen diese Frage für die allgemeine Gleichung $a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + f u = 0$ bei den Voraussetzungen a, b, c stetig differenzierbar und $ac - b^2 > 0$, d, e, f stetig, und zeigen die Richtigkeit der Aussage unter der schwächeren Annahme, daß die stetig differenzierbare Funktion u die integrierte Differentialgleichung erfüllt. Joachim Nitsche.

Serrin, J. B.: A note on the wave equation. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 307–308 (1954).

Se E_1, E_2 sono due solidi ellissoidici confocali appartenenti ad un campo di

regolarità di una funzione armenica u , è noto che i valori medi di u su E_1 ed E_2 sono uguali. L'A. estende questo teorema alle soluzioni dell'equazione delle onde, considerando due solidi ellissoidici del cronotopo, soddisfacenti a certe condizioni.

G. Lampariello.

Petrovskij, I. G. und L. A. Čudov: Über die Linien und zweidimensionalen Flächen, längs derer eine Lösung der Wellengleichung eine Unstetigkeit haben kann. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3, 175—180 (1954) [Russisch].

Let $u(x, y, z, t)$ solve the wave equation and have continuous second derivatives except on a smooth variety V of dimension 0, 1, 2 or 3. The discontinuity must not be removable and may be such that the wave equation is not weakly satisfied. Any isolated point or 3-dimensional surface can occur as a V , but by considering solutions of the form $u(x - at, y - bt, z - ct)$ it is made plausible that a straight discontinuity line V can only be timelike or spacelike but not isotropic, and that a 2-dimensional one must contain a timelike direction. (The cases V = isolated point and V = spacelike curve are excluded by requiring three continuous derivatives outside V .)

L. Hörmander.

Protter, M. H.: New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type. J. rat. Mech. Analysis 3, 435—446 (1954).

Data l'equazione in tre variabili indipendenti $u_{xx} + u_{yy} = u_{zz}$, si enunciano per essa quattro problemi del tipo di Goursat e si dimostra l'unicità della soluzione di ognuno di essi, definita in un campo opportuno, osservando che i risultati si estendono all'equazione $u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} = u_{tt}$. Si considera poi l'equazione di tipo misto in tre variabili indipendenti (1) $K(z)(u_{xx} + u_{yy}) + u_{zz} = 0$, dove $K(z)$ è una funzione continua colle sue derivate dei primi due ordini, crescente e tale che sia $K(0) = 0$, $K'(z) = 0$ per $z < 0$; si dimostra l'unicità della soluzione della (1), che risolve un problema simile a quello di Tricomi generalizzato, e che è definita in un campo opportuno, facendo l'ipotesi ulteriore che $1 + 2(K/K') > 0$ per $z \leq 1$; si osserva infine che metodi e risultati si possono estendere all'equazione

$$K(t)(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n}) + u_{tt} = 0.$$

M. Cinquini-Cibrario.

Protter, M. H.: The two noncharacteristic problem with data partly on the parabolic line. Pacific J. Math. 4, 99—108 (1954).

Sia data l'equazione: (1) $K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0$, con $K(y)$ funzione monotona crescente con derivata prima e seconda continue e $K(0) = 0$; la (1) è di tipo iperbolico per $y < 0$. Siano γ_1 e γ_2 le caratteristiche dei due diversi sistemi uscenti rispettivamente dai punti $(0, 0)$ e $(2, 0)$ e aventi un punto in comune, e sia D' il campo limitato da γ_1 , γ_2 e dal segmento $0 \leq x \leq 2$ dell'asse x . Sia $\Gamma: y = h(x)$ ($x_0 \leq x \leq 2$) una curva appartenente a D' , uscente dal punto $(2, 0)$, che tagli una volta al più ogni caratteristica della (1), e intersechi γ_1 nel punto $P_0(x_0, y_0)$; esistano due costanti positive m e M , tali che sia $m \leq h'(x) \leq M$. Siano $F_0(x)$ ($0 \leq x \leq 2$), $G_0(x)$ ($x_0 \leq x \leq 2$) due funzioni con derivate quinte continue. Si dimostra che in queste ipotesi nel campo D' limitato da Γ , γ_1 e dal segmento $0 \leq x \leq 2$ dell'asse x (e anche in tutto D') esiste un'unica soluzione dell'equazione (1), che soddisfa le condizioni $u(x, 0) = F_0(x)$ ($0 \leq x \leq 2$), $u(x, h(x)) = G_0(x)$ ($x_0 \leq x \leq 2$), e si danno limitazioni in D' per la $u(x, y)$ in funzione dei dati. Il caso in cui Γ coincide con γ_2 era già stato studiato dall'A. (questo Zbl. 44, 95); riprendendo il procedimento sfruttato in tale lavoro e già introdotto da L. Bers [N.A.C.A.T.N. Nr. 2058 (1950)] l'A. risolve prima in forma esplicita il problema per l'equazione: $K^*(y)u_{xx} + u_{yy} = 0$, dove $K^*(y) = \lambda^2(y)$, $\lambda^2(y) \leq y$, $\lambda^2(y) = 1$, $2, \dots, m$, $\lambda_1^2 = 0$, $y_0 = 0$, $y_m = c > 0$ e $K^*(y)$ è non decrescente, poi approssima $K(y)$ mediante una successione di funzioni del tipo della $K^*(y)$, e infine dimostra il teorema, utilizzando sia un risultato de L. Bers (l.e.) sia il teorema di Giulio Ascoli relativo alle successioni di funzioni equicontinue ed equilimitate.

M. Cinquini-Cibrario.

Hadamard, J.: Équations du type parabolique dépourvues de solutions. J. rat. Mech. Analysis 3, 3—12 (1954).

M. A. Wintner (ce Zbl. 38, 260) a donné l'exemple d'une fonction continue $f(x, y)$, telle que l'équation (1) $fu = f^2 u / x^2 + f^2 u / y^2 = f(x, y)$ n'admet aucune solution. Cet exemple repose sur le résultat de Petrinì qui a démontré que pour que le potentiel logarithmique $-\frac{1}{2\pi} \int_D \log \frac{1}{r} f(\xi, \eta) d\xi d\eta$ ($r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$) d'un domaine plan D admette les

dérivées u''_{xx} et u''_{yy} et satisfasse à (1) au point (x, y) , il faut et il suffit qu'il existe la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \iint_{D \cap C_h} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{1}{r} f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad C_h \text{ étant le cercle de rayon } h \text{ et de centre en } (x, y), \text{ et la limite}$$

de l'expression analogue relative à la dérivée $\partial^2 \partial y^2 \log 1/r$. On peut même choisir la fonction f de sorte que (1) ne soit pas satisfaite par le potentiel correspondant, aux points, constituant un ensemble dénombrable quelconque, contenu dans D . L'A. reprend et simplifie sur quelques points de détail l'analyse des auteurs cités ci-dessus, et ensuite passe à l'équation de la chaleur avec second membre, (2) $\partial^2 u / \partial x^2 - \partial u / \partial y = f(x, y)$. A présent c'est l'intégrale

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{D_y} f(\xi, \eta) \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)} \right] d\xi d\eta$$

qui joue le rôle analogue à celui du potentiel logarithmique du domaine plan; D_y est la partie du domaine donné D , située au dessous de la caractéristique $\eta = y$. L'A. démontre le théorème analogue à celui de Petriti et construit l'exemple d'une fonction $f(x, y)$ telle que l'équation (2) n'admet aucune solution. (Un autre exemple relatif à l'équation (2) a été construit par P. Hartman et A. Wintner, ce Zbl. 50, 318.) La construction de l'A. permet d'obtenir une fonction $f(x, y)$ telle que (2) ne soit pas satisfaite en un ensemble dénombrable quelconque de points du domaine D . M. Krzyżański.

Svec, M. E.: Über die Lösung einer Aufgabe für eine Gleichung vom parabolischen Typus. Priklad. Mat. Mech. 18, 243–244 (1954) [Russisch].

Certains problèmes de la mécanique des fluides se ramènent à la recherche des solutions de l'équation suivante (1) $(\partial/\partial z) z^\sigma \partial q/\partial z + A(x) z^\sigma \partial q/\partial z = B(x) z^{\sigma-1} \cdot \partial q/\partial x$ ($\sigma < 1$). L'A. détermine effectivement la solution fondamentale de l'équation (1) et la solution de (1) satisfaisant aux conditions $q(0, z) = 0$, $q(x, 0) = 1$, $q(x, \infty) = 0$. M. Krzyżański.

Narasimhan, R.: On the asymptotic stability of solutions of parabolic differential equations. J. rat. Mech. Analysis 3, 303–313 (1954).

Soit G un domaine borné de l'espace à n dimensions, Γ la frontière de G , $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le point variable de $G + \Gamma$. On considère l'équation quasilineaire du type parabolique

$$(1) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u'_{x_i} + F(x, t, u) = u'_t,$$

dont les coefficients a_{ij}, b_i sont continus dans $G + \Gamma$, la forme $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$ y étant supposée définie positive. Quant à la fonction $F(x, t, u)$, on suppose qu'il existe un nombre $K > 0$ tel que l'inégalité $u_1 \leq K$ entraîne $u F(x, t, u) \leq \lambda u^2$ pour $x \in G$, $t > 0$, $\lambda > 0$ étant un nombre constant, dépendant des coefficients de (1) et du domaine G . Ceci étant supposé, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que si l'on a $|u(x, 0)| \leq \delta$ pour $x \in G$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ uniformément par rapport à x .

pour $x \in G$. Dans la démonstration de ce théorème l'A. applique les théorèmes de Prodi (ce Zbl. 42, 335) et de Westphal (ce Zbl. 35, 65). Le th. exposé ci-dessus s'étend à l'équation quasilineaire du type parabolique plus générale, à savoir

$$(2) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u''_{x_i x_j} + F(x, t, u, u'_{x_k}) = u'_t \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

[à condition que la fonction $F(x, t, u, u'_{x_k})$ satisfasse à certaines hypothèses], et au système d'équations analogues à (2). M. Krzyżański.

Olejník, O. A. und T. D. Ventcel': Das Cauchysche Problem und die erste Randwertaufgabe für eine quasilineare Gleichung vom parabolischen Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 605–608 (1954) [Russisch].

Les AA. démontrent deux théorèmes d'existence et d'unicité des solutions de l'équation quasilineaire (1) $u''_{xx} - A(x, t, u) u'_t + B(x, t, u) u'_x + F(x, t, u)$, à savoir: 1° Si l'on a a) $A(x, t, u) \geq a > 0$, $F'_u(x, t, u) \geq c$, $|F(x, t, 0)| \leq M$ pour toutes les valeurs de l'argument u , lorsque le point (x, t) appartient au rectangle R ($0 \leq x \leq 1$,

$0 \leq t \leq T$). a, c, M et T étant des constantes b) $F(0, 0, 0) = F(1, 0, 0) = 0$, et si les coefficients de (1) et la fonction $F(x, t, u)$ satisfont en outre à certaines conditions de régularité, alors dans le rectangle R il existe une solution unique de (1) continue ainsi que ses dérivées qui figurent dans (1) et satisfaisant aux conditions $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$. 2° Si les coefficients de (1) et la fonction $F(x, t, u)$ satisfont aux hypothèses du th. 1°, le point (x, t) appartenant à une région illimitée R_1 ($-\infty < x < +\infty$, $0 \leq t \leq T$), alors il existe une solution $u(x, t)$ de (1) continue dans R_1 , ainsi que les dérivées de $u(x, t)$ qui figurent dans (1), satisfaisant à la condition initiale $u(x, 0) = 0$ pour $-\infty < x < +\infty$. Cette solution est unique dans la classe des fonctions $u(x, t)$ bornées dans R_1 .

M. Krzyżański.

Prodi, Giovanni: Problemi al contorno non lineari per equazioni di tipo parabolico non lineari in due variabili. Soluzioni periodiche. Rend. Sem. math. Univ. Padova 23, 25—85 (1954).

Folgende beiden Probleme werden behandelt: (A) Es sei $\bar{R} = (0 \leq x \leq x^*; 0 \leq t \leq t^*)$ und $R = (0 < x < x^*; 0 < t \leq t^*)$, $L = (0 \leq x \leq x^*; t = 0)$. Mit C werde bezeichnet das System aller Funktionen $u(x, t)$, die in \bar{R} stetig sind und für welche in $\bar{R} - L$ die partielle Ableitung u'_x von u nach x existiert sowie stetig ist mit beschränktem $u'_x \cdot t^{1/2}$. — Differentialgleichung: (D) $u'_t = u''_{xx} + F(x, u, t, u'_x)$, wobei F folgenden Bedingungen genügt: (I, 1) $F(x, t, u, p)$ ist stetig in R , $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < p < +\infty$ mit $|F(x, t, u, p)| \leq K(|u| \cdot t^{-\alpha} + |p|^{2\alpha})$, wo $K(r) \geq 0$ nicht-abnehmende Funktion von $r \geq 0$ ist und α eine Konstante mit $0 < \alpha < 1$. — (I, 2) Es genügt F in jedem Punkte seines Definitionsbereiches einer Hölderbedingung. — Randbedingung: (II, 1) Es sei $\varphi(x)$ stetig für $0 \leq x \leq x^*$, ferner $\varphi_1(t, u)$ und $\varphi_2(t, u)$ stetig für $0 < t \leq t^*$, $-\infty < u < +\infty$ mit $|\varphi_i(t, u)| \leq H(|u|) \cdot t^\beta$, $i = 1, 2$, wobei $H(r) \geq 0$ nicht-abnimmt und β eine Konstante mit $0 \leq \beta < 0.5$ ist. — (II, 2) Es existieren zwei, zu C gehörige Funktionen $\bar{u}(x, t)$, $\underline{u}(x, t)$ mit folgenden Eigenschaften: Die 1. Ableitung (von \bar{u} und \underline{u}) nach x genügt in jedem Punkt von R einer Hölderbedingung; ferner existieren in R die 1. Ableitung nach t und die 2. Ableitung nach x , wobei

$$u'_t < u''_{xx} + F(x, t, \underline{u}, u'_x), \quad \bar{u}''_{xx} + F(x, t, \bar{u}, \bar{u}'_x) < \bar{u}'_t; \quad -u'_x(0, t) < \varphi_1(t, \underline{u}(0, t)), \quad \varphi_1(t, \bar{u}(0, t)) < -\bar{u}'_x(0, t); \\ \underline{u}'_x(x^*, t) < \varphi_2(t, \underline{u}(x^*, t)), \quad \varphi_2(t, \bar{u}(x^*, t)) < \bar{u}'_x(x^*, t); \quad \underline{u}(x, 0) < \varphi(x) < \bar{u}(x, 0).$$

Gesucht werden Lösungen u von (D), die zu C gehören, in R Ableitungen u''_{xx}, u'_t besitzen und den Randbedingungen genügen: $u(x, 0) = \varphi(x)$ in $0 \leq x \leq x^*$, sowie $u'_x(0, t) = -\varphi_1(t, u(0, t))$, $u'_x(x^*, t) = \varphi_2(t, u(x^*, t))$ in $0 < t \leq t^*$. — Satz. Es existiert mindestens eine derartige Lösung u . Die Vor. (I, 1), (I, 2) und (II, 1) genügen, um die Existenz einer Lösung der Randwertaufgabe bei hinreichend kleinem t^* zu gewährleisten. Für den Fall $F(x, t, u, p) = f(x, t) u(x, t)$ wird unter gewissen Spezialisierungen der obigen Vor. die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen, falls $\varphi_1(t, u(0, t)) = \varphi_1(t, u(0, t))$ und $\varphi_2(t, u(x^*, t)) = \varphi_2(t, u(x^*, t))$. — Ein zweites Problem, für welches in der Arbeit die Existenz mindestens einer Lösung bewiesen wird, betrifft die Frage nach periodischen Lösungen unter ähnlichen Voraussetzungen und Randbedingungen; indes muß dafür auf die Arbeit selbst verwiesen werden. — Zum Beweise wird [vgl. die Methode von Leray-Schauder, sowie frühere Arbeiten des Verf.: dies. Zbl. 49, 75 und Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 86, 3—47 (1953)] eine Minorante und eine Majorante bestimmt, welche Grenzen für die gesuchten Lösungen liefern bzw. zur Konstruktion einer linearen Differentialgleichung dienen, in welche die vorgegebene durch stetige Abänderung überführbar ist. Otto Haupt.

Cameron, R. H.: The generalized heat flow equation and a corresponding Poisson formula. Ann. of Math., II. Ser. 59, 434—462 (1954).

In this paper, making use of results recently obtained by him and others, the author constructs a solution of the heat flow equation by means of an important generalization of Poisson's formula. This formula, as it is known, may be written in the form of the Wiener integral

$$(1) I_{\theta, \sigma}(t, \xi) = \int_{\sigma}^w \int_{\sigma}^a \left[2 \int_{\sigma}^{\xi} \frac{1}{a} \cdot x(1) + \xi \right] d_a x, \text{ the differential equation being } (2) LG = \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} -$$

$a \partial G / \partial t = 0$ with boundary condition $\sigma(\xi)$, $(-\infty < \xi < \infty)$ for $t \rightarrow +0$. The generalization of (1) for the equation (3) $LG = \theta(t, \xi)G$ is (4) $I_{\theta, \sigma}(t, \xi) = \int_{\sigma}^w \exp \left[\frac{t}{a} \int_0^1 \theta(\lambda, \mu) d\lambda \right] \sigma(\nu) d_w x$

with $\lambda = t(1-s)$, $\mu(t, s) = 2 \int_{\sigma}^{\xi} t a \cdot x(s) + \xi$, $\nu = u(t, \xi)$. A first theorem considers the case of θ continuous in \bar{R} ($0 < t < t_0 < \infty$, $-\infty < \xi < \infty$), and bounded in the neighbourhood of each point of $(0, \xi)$. If G is an almost everywhere positive, continuously differentiable, solution

of (3), it is shown that (5) $G(t, \xi) \leq I_{\theta, \sigma}(t, \xi)$. The proof is based on a theorem on non linear transformations of Wiener integrals due to the author and R. E. Fagen (this Zbl. 51, 345), and this theorem is only stated in section 2. In section 3 the proof of (5) is deduced from it. Section 4 is devoted to a particular case of (3) when θ is continuous and bounded above in R , bounded below in the neighbourhood of every point of $0 \leq \xi$. Then, provided G is almost everywhere positive, continuously differentiable and subject to certain limitations, the inequality (5) becomes an equality. Sections 5–11 generalize the result obtained in section 4, the condition for G to be non negative being dropped. This necessitates a detailed study of certain Wiener integrals and, to this effect, a theorem of Margaret Owchar (this Zbl. 47, 110) is utilized. These sections are the most important and interesting of the paper. They call into play delicate reasonings and heavy calculation. Section 12 deals with the uniqueness conditions of the solution proposed in the previous sections. Some restrictive conditions, however of a general nature, are necessary to obtain a uniqueness theorem with regard to the solution (4). Section 13 sketches a few methods of evaluation of Wiener integrals. The author points out, in his introduction, that his results may, no doubt, be considered as a generalization of the Poisson formula, but that they may be interpreted also as establishing the finiteness of a Wiener integral and giving a method to calculate it in terms of the solution of a boundary value problem. C. Racine.

Ljsternik, L. A.: Über Differenzenapproximationen des Laplaceschen Operators. I, II. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 2 (60), 3–66, Nr. 1 (59), 131–133 (1954) [Russisch].

I. Differenzenoperatoren werden in folgender Weise eingeführt: Es seien A, B, \dots Punkte (Vektoren) der Ebene. $c(A, B) = d(A, B - A)$ seien reelle Zahlen, die den Bedingungen genügen: $c(A, B) \geq 0$; $c(A, B) \neq 0$ nur für eine endliche Anzahl Punkte B bei gegebenem A ; $c(A, B) = c(B, A)$; $\sum_B c(A, B) = 1$. Dann wird unter dem Operator S , angewandt auf eine Funktion $f(A)$, der Ausdruck

$$Sf(A) = \sum_B c(A, B) f(B) = \sum_i d(A, A_i) f(A + A_i), \quad d(A, A_i) = c(A, A + A_i)$$

verstanden. Punkte B , für die $c(A, B) \neq 0$ ist, heißen benachbart zu A . Für beliebiges $h > 0$ soll weiter $S_h f(hA) = \sum_i d(A, A_i) f(hA + hA_i)$ sein. — Homogene Operatoren sind solche, für die $c(A, B) = d(A, B - A)$ nur von der Differenz $B - A$ abhängt, also gleich $d(B - A)$ gesetzt werden kann. Ist in diesem Fall $A_i = (x_i, y_i)$ und bedeutet $d_i = d(A_i)$, so wird $\sum d_i x_i = \sum d_i y_i = 0$, $\sum d_i = 1$. Setzt man $\sum x_i y_i = 0$ und $\sum x_i^2 = \sum y_i^2 = 2M$ voraus, so gilt für genügend glatte Funktionen f

$$S_h f(A) = f(A) + M h^2 \Delta f(A) + o(h^2) \quad (\Delta = \partial^2_x + \partial^2_y)$$

Aus $\Delta f(A) = [(S_h - 1)/M h^2] f(A) + \varepsilon_h$ mit $\varepsilon_h \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$ erhält man daher Operatoren zur Approximation des Laplaceschen Operators. Man kann auch inhomogene Operatoren konstruieren, die den Laplaceschen Operator approximieren. — Verf. untersucht die Eigenwerte und Eigenelemente solcher Operatoren in ihrem Verhalten zu den Eigenwerten und Eigenfunktionen des Laplaceschen Operators. Es werden unter anderem Konvergenzbetrachtungen für beliebige Parallelogrammnetze durchgeführt und die Dirichletsche Aufgabe für die Laplacesche Gleichung sowie die Wärmeleitungsgleichung für Randbedingungen gemischten Typs behandelt. Bei der Untersuchung über Fehleranhäufungen werden Abschätzungen des wahrscheinlichen Fehlers vorgenommen. — II. Verf. kündigt die Übertragung früherer Resultate auf den dreidimensionalen Fall ($\Delta = \partial^2_x + \partial^2_y + \partial^2_z$) an, sowie die Untersuchung der Wärmeleitungsgleichung $\partial u(A, t)/\partial t = \Delta u(A, t)$ mit $u(A, 0) = q(A)$, wenn A in einem endlichen ebenen Gebiet Q liegt, und $u(B, t) = 0$, wenn B auf der Begrenzung von Q liegt. W. Schulz.

Serrin, J. B.: On the Phragmén-Lindelöf principle for elliptic differential equations. J. rat. Mech. Analysis 3, 395–413 (1954).

The theory of elliptic differential equations of the second order has shown that many properties of potential functions are shared by solutions of these equations. The paper under review extends to the solutions of a uniformly elliptic equation of the second order $L(u) = a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + du_x + e u_y = 0$ the Phragmén-Lindelöf theorem, under the restrictive condition (1) $\sqrt{d^2 + e^2}(u + c) \leq p(r)$, $\int_0^\infty p(r) dr < \infty$. Previous work by D. Gilbarg (this Zbl. 46, 104) and E. Hopf (this Zbl. 46, 104) is mentioned and utilized. Three theorems are proved, the most important being the second one. They read as follows: Theorem 1. If u satisfies the inequality $L(u) \geq 0$, with $d = e = 0$, in the upper half plane, being continuous

and non positive on Oy , then $\alpha = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M(R)}{R}$, where $M(R)$ denotes the maximum of u for $|x^2 + y^2| \leq R$, exists, finite or infinite, and $u \leq \alpha y$ for $y \geq 0$. If however $u = \alpha y$ for a $y \geq 0$, then $u = \alpha y$. Theorem 2. Let D be a domain of the upper half plane such that if $y \in \bar{D} - D$, $y \leq y_0 < \infty$; let u and v be two functions defined in D where they are continuously differentiable and such that $L(u) \geq 0$, $L(v) \leq 0$, u being non positive on \bar{D} and v non negative in D . Then $\alpha = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M(R)}{R}$,

$\beta = \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{m(Y)}{Y}$, where $m(Y) = \min_{y \rightarrow Y} v$, exist and $\beta u \leq \alpha v$ throughout D . If however $\beta u = \alpha v$ then $u = \alpha \Psi$, $v = \beta \Psi$, $L(\Psi) = 0$ in D , $\Psi = 0$ on \bar{D} and $\lim_{y \rightarrow \infty} \Psi y = 1$. — The proof of this theorem covers more than ten pages of the text and applies a number of lemmas about a priori limitations. Theorem 3 deals with an equation for which condition (1) is not satisfied. In the particular case considered $\lim_{R \rightarrow \infty} M(R)/R$ has to be replaced by $\lim_{R \rightarrow \infty} M(R)/R^{m+1}$. Again the proof is made to depend on several lemmas concerning a priori limitations.

C. Racine.

Karmanov, V. G.: Über eine Randwertaufgabe für eine Gleichung von gemischtem Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 439—442 (1954) [Russisch].

Definitionen: Es sei G ein n -fach zusammenhängendes Gebiet der (x, y) -Ebene, dessen Rand aus den folgenden einfachen geschlossenen Kurvenbögen besteht: $K_i = \gamma_i + [A_i, C_i] + [C_i, B_i]$ ($i = 1, \dots, n$), γ_i ein Bogen in der oberen Halbebene, mit den Endpunkten A_i, B_i auf der x -Achse, C_i der Schnittpunkt der Charakteristiken $y = A_i - x$; $y = x - B_i$, $[A_k, B_k] \cap [A_l, B_l] = \emptyset$, $k \neq l$ ($k, l = 2, \dots, n$), $[A_k, B_k] \subset [A_1, B_1]$. Es wird mit Hilfe eines Differenzenverfahrens die folgende Randwertaufgabe gelöst: 1. $u(x, y)$ löst in G (für $y \neq 0$) die Gleichung $\epsilon^2 u_{xx} + \epsilon^2 u_{yy} - \sin y (\epsilon^2 y_{xx} + u^2) = 0$; 2. $u \in C(\bar{G})$; 3. $\epsilon u_{xx}, \epsilon u_{yy} \in C(\bar{G})$ (in A_i, B_i werden sie eventuell unendlich von der Ordnung < 1); 4. $u|_{\gamma_k} = f_k \in C$; $u|_{[A_1, C_1]} = \psi_1$, $u|_{[C_k, B_k]} = \psi_k$, wobei ψ_k zweimal differenzierbar ist.

K. Maurin.

Magenes, Enrico: Sui problemi al contorno misti per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 8, 93—120 (1954).

Sia D un dominio del piano xy limitato da una curva FD chiusa e di classe due. Si consideri in $D - FD$ l'equazione

$$(1) \quad E(u) = \sum_{h,k=1}^2 a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^2 b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + c u = f$$

che si suppone di tipo ellittico. In opportune e, peraltro, assai generali ipotesi per i coefficienti di questa equazione l'A. dimostra un teorema di esistenza e unicità per una soluzione della (1) per la quale sono assegnate su una curva $F_1 D$ di FD i suoi valori e su $F_2 D = FD - F_1 D$ i valori della derivata conormale. Il detto teorema sussiste in una ben specificata classe di funzioni per le quali la condizione al contorno su $F_2 D$ è verificata nel senso classico e quella su $F_1 D$ lo è secondo Ciimmino (questo Zbl. 19, 263). L'A. dà però anche la dimostrazione dell'esistenza di una soluzione che verifica le condizioni al contorno nel senso classico.

G. Fichera.

Michlin, S. G.: Zur Theorie der ausartenden elliptischen Gleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 183—185 (1954) [Russisch].

Es werden (ohne Beweise) Ergebnisse angegeben über die Randwertaufgaben für die formal selbstadjungierten elliptischen Gleichungen zweiter Ordnung, die auf dem Rande ausarten. Anmerkung der Ref.: Diese Ergebnisse wurden inzwischen weitgehend überholt in der gleichzeitig erschienenen Note von M. I. Višik (vgl. folgendes Referat).

K. Maurin.

Visik, M. I.: Elliptische Gleichungen, die auf dem Rande des Gebiets ausarten.

Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 1 (59), 138—143 (1954) [Russisch].

In der vorliegenden Note werden die Resultate von M. W. Keldyš (dies. Zbl. 43, 95), Michlin (dies. Zbl. 52, 101 sowie vorstehendes Referat) und Verf. [dies. Zbl. 39, 320; Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 9—12, 225—228 (1953)] sehr weitgehend verallgemeinert. Definitionen: D ein beschränkter offener Bereich des n -dimensionalen Halbraumes $x_n > 0$. $\partial D = \Gamma_0 + \Gamma_1$, wobei $\Gamma_0 \in E^{n-1}$; $x_n = 0$. Γ_1 liegt in dem Halbraum $x_n > 0$. Der Operator

$$Lu = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u$$

heißt am Rande ∂D ausgeartet, wenn für $x \in D$: $F(x, \xi) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \xi_i \xi_k > 0$; für $\hat{x} \in \Gamma_0$:

$F(\hat{x}, \xi) \geq 0$, wobei der Rang von $F(\hat{x}, \xi) = r$, $0 \leq r \leq n-1$ ist, $\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 > 0 \right)$.

$$(u, v)_1 = \int_D \left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) dx; (u, v)_\sigma = \int_D \sigma(x) u(x) v(x) dx;$$

$L_\sigma^2(D)$ der Hilbertsche Raum mit dem Skalarprodukt $(u, v)_\sigma$. — Ergebnisse: Es werden, gänzlich ohne Beweise, 8 umfangreiche Sätze angeführt. Wir heben als Beispiele zwei Sätze über die erste Randwertaufgabe sowie das entsprechende Eigenwertproblem hervor: Satz 5. Vor.:

In einer gewissen Umgebung von Γ_0 gelten die folgenden Ungleichungen: (1) $0 \leq x_n^2 \left(\sum_{i=1}^n l_i(x) \xi_i \right)^2$

$\leq K^2 F(x, \xi)$, wobei $l_i \in C^1$, $l_n(x) \geq \omega^2 > 0$, $\dot{l}(x) = (l_i(x))$, $\dot{l}(x) = 1$; $K = \text{const.}$ (2) $c^2 x_n^2 + a_{nn}(x) \leq K^2 x_n^2$ für $\alpha \geq 1$, (3) $b_n(x) \geq -K^2 x_n^{\alpha-1} |\ln |\ln x_n||^{-\varepsilon_1}$ für $\alpha \neq 1$, wobei $\varepsilon_1 > 0$ für $\alpha > 1$, $\varepsilon_1 = 0$ für $\alpha < 1$, und $b_n(x) \geq -K^2 |\ln x_n| |\ln |\ln x_n||^{-\varepsilon_1}$ für $\alpha = 1$. (4) $c(x) -$

$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \leq 0$ für $x \in D$. Behauptung: Die erste Randwertaufgabe $Lu = h$ [$u|_{\Gamma_1} = 0$]

auf Γ_0 werden keine Bedingungen aufgestellt für $\alpha \geq 1$; für $\alpha < 1$: $u|_{\Gamma_1} = 0$ hat für $\alpha \geq 0$ eine einzige Lösung für $h \in L_{\sigma-1}^n(D)$; dabei ist $\sigma(x) = O(x_n^{\alpha-2} \ln x_n^{-1-\varepsilon})$ für $\alpha \neq 1$, bzw. $= O(x_n^{-1} |\ln x_n|^{-2-\varepsilon})$ für $\alpha = 1$. — Satz 6. Vor.: Es gelten außer (1), (2), (3) folgende Ungleichungen:

$x_n^\beta \leq \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq K^2 F(x, \xi)$; $c(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} = O(\sigma(x))$. (β beliebige fixierte Konstante). Beh.: Für die ersten Randwertaufgaben für die Gleichungen $Lu = h$, $L^+ u = g$

(L^+ = formal Adjungierte von L) gelten die drei Fredholm'schen Sätze. L ist halbbeschränkt im folgenden Sinn: $(Lu, u) \leq -(1-\varepsilon)(u, u)_1 + M(\sigma u, u)$, $\varepsilon > 0$. $(L - \lambda \sigma I)^{-1}$ ist für reguläre λ vollständig; das Spektrum ist diskret von endlicher Vielfachheit. — Es gelten analoge Sätze für die zweite Randwertaufgabe.

K. Maurin.

Birman, M. S.: Über das Spektrum singulärer Randwertaufgaben für elliptische Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 5—7 (1954) [Russisch].

In dieser bedeutenden Note werden sehr gewandt wichtige Sätze über die Häufungspunkte des Spektrums für Randwertaufgaben des formal selbstadjungierten elliptischen Operators zweiter Ordnung in unbeschränkten Gebieten bewiesen. Diese Untersuchungen bilden eine Verallgemeinerung der fundamentalen Ergebnisse von K. Friedrichs, Carleman und Pólya (vgl. dies. Zbl. 50, 322). Definitionen: Ω das Äußere des beschränkten Bereiches des E^m ; $\partial\Omega = \Gamma_1 + \Gamma_2$ der stückweise glatte Rand von Ω ; $\sigma(x)$ stetig auf Γ_1 ;

$$(1) \quad Lu = - \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + c(x) u; \inf c(x) > -\infty, \\ \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k \leq M(r) \sum_{i=1}^m |\xi_i|^2, \int_R^\infty M(r) dr = \infty; r = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{1/2};$$

L_0 die Einschränkung von L auf die glatten Funktionen mit kompaktem Träger, die den Randbedingungen: (2) $u|_{\Gamma_1} = 0$, $\partial u / \partial \nu + \sigma u|_{\Gamma_1} = 0$ genügen; \tilde{L}_0 die Friedrichssche Fortsetzung von L_0 . — Es werden folgende Sätze bewiesen: 1. Das Häufungspunktspektrum von \tilde{L}_0 ist unabhängig sowohl von $\partial\Omega$ als auch von den Randbedingungen (2); es wird auch nicht verändert durch die Zufügung einer Funktion $\eta(x)$ zu $c(x)$ für die $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \eta(x) = 0$. (2) Links vom Punkte

$\lambda_0 = \liminf_{x \rightarrow \infty} c(x)$ ist das Spektrum von L^p diskret. Die Beweismethode soll auch zu analogen Sätzen für andere singuläre Randwertaufgaben führen. K. Maurin.

Gillis, P.: Sur certaines classes d'équations aux dérivées partielles du second ordre, non linéaires. Centre Belge Rech. math., Colloque équations aux dérivées partielles, Louvain 17—19 déc. 1953, 105—118 (1954).

Die Arbeit bildet eine Weiterführung der Untersuchungen des Verf. über die partiellen Differentialgleichungen der Variationsrechnung (vgl. dies. Zbl. 47, 336). Der Verf. zeigt, daß für diese nichtlinearen Gleichungen vom elliptischen Typus in $2n$ unabhängigen Veränderlichen das Dirichletsche Problem höchstens eine Lösung besitzt, wenn n ungerade, dagegen zwei, wenn n gerade ist. Es wird außerdem referiert über klassische Ergebnisse betreffs der Analytizität der Lösungen der elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Zum Schluß werden einige Probleme und Vermutungen in der oben genannten Richtung aufgestellt.

K. Maurin.

Duff, G. F. D.: A tensor boundary value problem of mixed type. Canadian J. Math. 6, 427—440 (1954).

L'A. a montré antérieurement [Ann. of Math., II. Ser. 57, 115—127 (1952)] qu'une variété de Riemann M , de classe C^∞ ainsi que sa frontière B , peut être prolongée en une variété compacte F de même classe et de même dimension N , par adjonction de son double \tilde{M} . Il a également indiqué, à la fin d'un mémoire antérieur [Canadian J. Math. 5, 524—525 (1953)] que les problèmes aux limites concernant l'équation de Laplace $\Delta q = 0$ dans M (où q est une forme différentielle de degré p) peuvent être traités en considérant d'abord l'équation $\Delta q + Aq = 0$, où A est une matrice tensorielle de classe C^∞ , définie positive dans \tilde{M} , nulle dans M , et définissant une application linéaire $q \rightarrow Aq$ de l'espace des formes différentielles q dans lui-même. Cette méthode est appliquée ici à la solution des problèmes aux limites (K) $tq = t\tilde{\xi}$, $t\delta q = t\delta\tilde{\xi}$, $M \cap q = n\tilde{\xi}$, $n\delta q = n\delta\tilde{\xi}$, (M) se ramenant à (K) pour une forme de degré $N - p$. Ces problèmes sont limites de ceux considérés par l'A. (Canadian J. Math. 5, 196—210 (1953)). On montre d'abord que ces problèmes ont une solution unique pour l'équation $\Delta q + Aq = 0$ quand A est définie positive dans M . La solution est construite au moyen de potentiels de simple et double couche, étendues à B , de la solution élémentaire g_A relative à F , et les densités de couche sont déterminées par une équation intégrale à la quelle on applique la méthode de Poincaré-Fredholm. Dans le cas où A s'annule sur M , on remplace g_A par la forme de Green de de Rham, selon la méthode exposée dans le 2^{ème} mémoire cité; et on montre ainsi que le problème (K) pour l'équation $\Delta q = 0$, admet une solution pourvu que $\int_B \delta\tilde{\xi} \wedge *q = 0$ pour tout champ

harmonique q satisfaisant à $tq = 0$ sur B . L'A. examine ensuite le cas particulier des formes fermées et cofermées; puis il établit l'existence d'un opérateur de Green P_K tel que $P_K q$ est la forme harmonique résolvant le (K) problème pour les données frontières q , et assujettie à $Kq = 0$, où K est l'opérateur de projection sur l'espace des formes propres de (K). Il termine par quelques exemples de l'espace à 2 et 3 dimensions. J. Lelong.

Hunt, G. A.: On positive Green's functions. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 816—818 (1954).

Es wird ein Kriterium angegeben dafür, daß im Euklidischen Raum E^k der elliptische Differentialausdruck $\Delta u = \sum (\partial^2 / \partial x_i^2) (a_{ij} (\partial u / \partial x_j))$ mit differenzierbaren und in den Indizes symmetrischen a_{ij} eine positive Greensche Funktion besitzt, die im Unendlichen verschwindet. Ein Beweis, der sich auf gewisse homogene Riemannsche Räume übertragen läßt, wird skizziert. J. Heinhold.

Bertolini, Fernando: Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace, in tre variabili indipendenti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 16, 615—624 (1954).

Diese Arbeit gibt eine Verallgemeinerung der vom Verf. [ibid. 16, 10—17 (1954)] im ebenen Fall hergeleiteten Resultate auf den dreidimensionalen Raum, jedoch unter der Einschränkung, daß derjenige Teil T der Begrenzung des als regulär im Sinne von M. Picone vorausgesetzten Bereiches, auf dem die Cauchyschen Daten, d. h. die Werte der gesuchten harmonischen Funktion $q(P)$ und deren Normalableitung, nicht vorgeschrieben sind, eben ist. Verf. gelangt zu notwendigen und hinreichenden

Bedingungen für die Existenz von $q(P)$, indem er $\text{grad } q(P)$ auf T in eine Fourierreihe nach einem passend gewählten System von im ganzen Raum harmonischen Vektoren entwickelt und die Koeffizienten dieser Reihe, unter Heranziehung des Reziprozitätssatzes, mit Hilfe von Integralen ausdrückt, die über den restlichen Teil der Begrenzung, auf dem also die Cauchyschen Daten vorgeschrieben sind, erstreckt sind.

M. J. De Schwarz.

Mysovskich, I. P.: Über eine Randwertaufgabe für die Gleichung $\Delta u = k(x, y) u^2$. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 995—998 (1954) [Russisch].

The equation in question, where $k > 0$, is considered in a simply connected region in the plane with a smooth boundary S . It is required to find a solution u assuming given values on S . If v is the harmonic function with the same boundary values, $u - v$ satisfies an integral equation, which is shown to be solvable by successive approximations.

L. Gårding.

Dezin, A. A.: Die zweite Randwertaufgabe für die polyharmonische Gleichung im Raum $\mathbb{R}_2^{(m)}$. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 901—903 (1954) [Russisch].

Let Ω be a bounded region in real n -space with a smooth boundary and let L be the closure of all real polynomials defined in Ω with respect to the metric $D(u, u) =$

$\int_{\Omega} \sum (D^1 \dots D^m u)^2 dx, \left(L^i = \frac{\partial^i}{\partial x^i} \right)$. All real polynomials of degree m constitute the null-class of L . If ϱ is a linear functional on L , $H(u) = D(u, u) + 2\varrho(u)$

attains its minimum for a unique element $v \in L$. If $\varrho(u) = 0$ when u vanishes in a neighbourhood of the boundary, v is polyharmonic, $\Delta^m v = 0$. There is an interpretation of the corresponding boundary value problem. The method is due to Soboleff (Some applications of functional analysis to mathematical physics, Leningrad 1950) who treats the case $m = 1$.

L. Gårding.

Pini, Bruno: Sulle funzioni sub e super-biarmiche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 16, 702—707 (1954).

Folgende Bedingungen sind notwendig und hinreichend dafür, daß eine in einem Gebiete G der Ebene definierte reelle Funktion u biharmonisch ist: (1) u sei stetig samt Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich; (2) $\lim_{r \rightarrow 0} r^{-4} \cdot$

$[u(P) - \mu_0(P, r) + 2\mu_1(P, r)] = 0$ in jedem Punkt P von G . Dabei bezeichnet $\mu_0(P, r)$ das über die Peripherie, $\mu_1(P, r)$ das über das Innere des Kreises vom Radius r um P erstreckte arithmetische Mittel von u . Dieses Resultat stellt eine neue Möglichkeit dar, einen falschen — erstma's von M.-T. Cheng (vgl. dies. Zbl. 43, 109) korrigierten — Satz von M. Nicolesco (vgl. dies. Zbl. 10, 114) zu berichtigen. Verf. gibt auch Kriterien für Sub- und Superbiharmonizität.

A. Huber.

Moretti, Fiorenza: Alcune disuguaglianze relative alle funzioni armoniche nel complementare di un dominio limitato ed infinitesime all'infinito. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 190—195 (1954).

Sia D un dominio regolare illimitato avente frontiera limitata FD . Sia ψ una funzione armonica in $D - FD$ e infinitesima all'infinito. L'A. dimostra le seguenti disuguaglianze $\int_{FD} \psi^2 d\sigma = H_1 \int_{FD} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma, \int_D |\text{grad } \psi|^2 d\tau \leq H^2 \int_{FD} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma,$

$\left(\int_{FD} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} d\sigma \right)^2 \leq H_3 \int_{FD} \psi^2 d\sigma$ ($\frac{\partial}{\partial \nu}$ denota derivazione secondo la normale a FD) e determina quantitativamente le constanti H_1, H_2, H_3 .

G. Fichera.

Vidav, Ivan: Sur une extension du théorème de Mandelbrojt-MacLane aux fonctions harmoniques et sous-harmoniques. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 2483—2485 (1954).

Pour le théorème en question voir ce Zbl. 32, 67.

J. Horváth.

Tideman, M.: Elementary proof of a uniqueness theorem for positive harmonic functions. Nordisk mat. Tidskrift 2, 95—96 (1954).

Vojt, S. S.: Die Fortpflanzung des Schalls in isothermer Atmosphäre. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3 (61), 235—236 (1954) [Russisch].

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Germa, R. H.: Sur une équation intégrale généralisant l'équation de première espèce de Volterra. Extension d'un théorème de Le Roux. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér. 68, 34—41 (1954).

Es soll $\varphi(s)$ so bestimmt werden, daß $\Omega(x, u_1, u_2, \dots, u_p) = f(x)$ wird, wo $u_j = \int_0^x \Phi_j(x, s, q(s)) ds$ ($j = 1, \dots, p$) gesetzt ist. Verf. zeigt, daß diese Verallgemeinerung der Volterra'schen eindimensionalen Integralgleichung 1. Art genau eine Lösung besitzt. Wichtigste Voraussetzungen: Die partiellen Ableitungen der Funktionen Ω und Φ_j mögen Lipschitzbedingungen genügen. $f(x)$ soll stetig differenzierbar sein. Beweis durch Zurückführung des Problems auf einen früheren Satz des Verf. [Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. Sér. 13, Nr. 8 (1927); 14 (1928)]. Verf. gibt ein Iterationsverfahren zur Bestimmung von $q(s)$ an. K. Nickel.

Krejn, M. G.: Über Integralgleichungen, die Differentialgleichungen 2-ter Ordnung erzeugen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 21—24 (1954) [Russisch].

L'A. montre que si $H(t)$ est une fonction continue pour $t \in [0, 2R]$, telle que l'éq. intégrale $(1) q(t, r) = \int_{-r}^t H(t-s) q(s, r) ds = 1$ ait, quel que soit $r \in [0, R]$ une solution $q(t, r)$, unique et continue pour $t \in [0, r]$, $r \in [0, R]$, alors cette fonction „engendre“ l'éq. différentielle $(d/dr)[p dy/dr] + x^2 p y = 0$ pour $r \in [0, R]$ et $p(r) = q^2(r, r)$ dont les solutions

$$\varphi(r, x^2) = \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{q(s, r) \cos x s ds}{p(r)} \quad \text{et} \quad \psi(r, x^2) = \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{q(s, r) \omega(x, s) ds}{p(r)}$$

où

$$x \omega(t, x) = \sin x t + \int_0^t H(t-s) \sin x s ds,$$

$t \in [0, R]$, forment un système fondamental. Il montre ensuite que si $H(t)$, $t \in [0, 2R]$ est une fonction absolument continue telle que l'éq. intégrale $(2) q(t, r) = \int_0^r F(t, s) q(s, r) ds = 1$, $t \in [0, r]$, $F(t, s) = H(|t-s|) + H(t+s)$, $(t, s) \in [0, R]^2$, admette, quel que soit $r \in [0, R]$, une solution unique, alors la solution $\Phi(r, x)$ de l'éq. $(3) z'' - V(r)z + \lambda z = 0$, $z(0) = 1$, $z'(0) = h$, $r \in [0, R]$, $V(r) = 2 \frac{dK(r, r)}{dr}$, $h = 2H(0)$, $q(r, r) K(r, t) = \frac{\partial q(r, t)}{\partial r}$, $(t, r) \in [0, R]^2$

est $\Phi(r, \lambda) = \cos \int_0^r K(r, s) \cos \int_0^s \lambda ds ds$. Inversement, quels que soient le nombre complexe h et la fonction $V(r)$ intégrable dans un intervalle $[0, a]$, $a \in [0, R]$, il existe toujours une fonction et une seule, $H(t)$, $t \in [0, 2R]$, engendrant (3). S. Vasilache.

Stesin, I. M.: Berechnung von Eigenwerten mit Hilfe von Kettenbrüchen. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 2, 191—198 (1954) [Russisch].

Eine von L. A. Lusternik angegebene Methode zur Bestimmung der Eigenwerte von symmetrischen Matrizen und linearen Operatoren, wonach die der gegebenen Matrix (bzw. dem linearen Operator) zugeordnete Reihe $(1) c_0 z + c_1/z^2 + \dots$ in einen Kettenbruch entwickelt wird, wendet der Verf. an auf den Fall von Integralgleichungen mit symmetrischen Kern $K(x, y)$. Es wird zunächst ein Verfahren zur Entwicklung der Reihe (1) in den Kettenbruch $(2) 1/b_1 z + 1/b_2 + 1/b_3 z + \dots$ dargestellt, welches für den vorliegenden Zweck geeigneter ist, als der bekannte Tschebyscheffsche Algorithmus. Weiter wird gezeigt, daß die Wurzeln z_n der Nenner $Q_n(-z)$ der Näherungsbrüche $P_n(z)/Q_n(z)$, die hierbei auftreten, gegen die Reziproken der Eigenwerte λ_i von $K(x, y)$ streben, wofür eine Abschätzung ange-

geben wird. Schließlich wird eine Methode zur Ermittlung der n ersten Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ angeführt, die sich an ein bekanntes Iterationsverfahren zur Ermittlung des ersten Eigenwertes λ_1 anschließt. *N. Stuloff.*

Widder, D. V.: The convolution transform. Bull. Amer. math. Soc. **60**, 444—456 (1954).

Wiedergabe eines Vortrags über die Umkehrung der Faltungstransformation $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y) \varphi(y) dy$ durch den Differentialoperator $E(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{D}{a_k}\right) e^{D/a_k}$, wenn der Kern G definiert ist durch $\frac{1}{E(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xy} G(y) dy$. Spezielle Anwendung auf die Laplace- und die Weierstraß-Transformation. *G. Doetsch.*

Rooney, P. G.: A generalization of the complex inversion formula for the Laplace transformation. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 385—391 (1954).

Für die Laplace-Transformation $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \varphi(t) dt$ gilt unter denselben Bedingungen wie für die komplexe Umkehrformel die folgende Umkehrung

$$\varphi(t) = [2\pi i \Gamma(1-\beta)]^{-1} \text{ V. P. } \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} (st)^{-\beta} {}_1F_1(1; 1-\beta; st) f(s) ds$$

($\Re \beta > 0$, $\beta \neq 1, 2, \dots$), die für $\beta = 0$ in die komplexe Umkehrformel übergeht. *G. Doetsch.*

San Juan Llosá, Ricardo: Charakterisierung der durch einfach konvergente Laplace-Integrale darstellbaren Funktionen. Math. Nachr. **12**, 113—118 (1954).

Es werden zwei Gruppen von notwendigen und hinreichenden Bedingungen angegeben dafür, daß eine Funktion $f(s)$ in einer Halbebene $\Re s > x_0$ durch ein Laplace-Integral darstellbar ist. Die erste Gruppe lautet: (1) $f(s)$ stetig in $\Re s > x_0$.

(2) $\frac{f(x+i y)}{x+i y} \in L^2(-\infty < y < +\infty)$ für jedes $x > x_0$. (3) $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\tau}^{x+i\tau} e^{ts} \frac{f(s)}{s} ds$ definiert für jedes $x > x_0$ eine von x unabhängige, in jedem endlichen Intervall totalstetige Funktion $\Phi(t)$ mit den Eigenschaften $\Phi(t) = 0$ für $t \leq 0$, $\Phi(t) = O(e^{x_0 t})$ für $t \rightarrow +\infty$. — Die Bedingungen sind die allgemeinsten bisher bekannten unter denjenigen, die bei ihrer Formulierung das komplexe Integral (3) benutzen. *G. Doetsch.*

Pleijel, Arne: Beitrag zur Theorie der Laplace-Transformationen. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 217—221 (1954).

$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx$ konvergiere für $s_0 = 0$. Notwendig und hinreichend dafür, daß $f(s)$ in die Halbebene $\sigma > 0$ fortgesetzt werden kann und dort $O(t^k)$ ist ($s = \sigma + it$), ist die Bedingung $\left| \int_0^y e^{-ix} F(x) (y-x)^{k+1} dx \right| \leq K y^{k+1} (1 + |\tau|)^k$ für alle $y > 0$ und alle reellen τ (K eine Konstante). *G. Doetsch.*

Kawata, Tatsuo: A theorem on Fourier transforms. Kōdai math. Sem. Reports **1954**, 22—24 (1954).

Let $F(x)$ be a bounded non-decreasing function in $(-\infty, \infty)$. Let $L_2(F)$ denote the class of functions $f(x)$ for which $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dF(x) < \infty$. The author proves the following result: Let (1) $f(x)$ belong to $L_2(F)$ and be Lebesgue integrable in the ordinary sense in any finite interval; (2) $f(x+u)$ belongs to $L_2(F)$ for every fixed u

and $\lim_{u \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+u) - f(x)|^2 dF(x) = 0$. Then for every $\varepsilon > 0$ there exists an A and a function $K(t) = K_A(t)$ of bounded variation in $(-A, A)$ such that $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \int_{-A}^A e^{-itx} dK(t)|^2 dF(x) < \varepsilon$. In the proof, the author uses the method of Fejer kernels.

V. Ganapathy Iyer.

Esseen, Carl-Gustav: A note on Fourier-Stieltjes transforms and absolutely continuous functions. Math. Scandinav. **2**, 153—157 (1954).

Es sei $F(x)$ eine (reelle oder komplexe) Funktion von beschränkter Variation auf der ganzen Achse $-\infty < x < \infty$. $f(u)$ sei ihre Fourier-Stieltjes-Transformierte:

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF(x). \text{ In einer früheren Arbeit [Acta math. } \mathbf{77}, 1-125 \text{ (1945)]}$$

zeigte der Verf.: Wenn $f(u) = 0$ in einem unendlichen Intervall, so ist $F(x)$ absolut stetig. In der vorliegenden Arbeit wird bewiesen, daß $F(x)$ diese Eigenschaft schon hat, wenn $f(u)$ in einem unendlichen Intervall zur Klasse L^2 gehört. G. Doetsch.

Lafleur, Charles: Sur un développement en série de Taylor de la fonction de Dirac, et un développement en série de fonctions de Dirac de la fonction e^{jux} . Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **40**, 784—786 (1954).

Indem die Diracsche Pseudofunktion $\delta(x)$ durch das divergente Integral $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwx} dw$ „dargestellt“ wird, werden Reihenentwicklungen wie

$$\delta(x-x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x'^n \delta^{(n)}(x) \text{ und } e^{iwx} = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \delta^{(n)}(x) \delta^{(n)}(w) \text{ rein formal ab-}$$

geleitet.

G. Doetsch.

Lafleur, Ch. et V. Namias: Sur la résolution de l'équation de Wiener-Hopf, basée sur l'utilisation des propriétés formelles des fonctions δ_+ et δ_- . Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **40**, 787—790 (1954).

Im Stil der vorstehend referierten Note wird $\delta(u)$ in $\delta_+(u) + \delta_-(u)$ mit $\delta_+(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{iut} dt$, $\delta_-(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{iut} dt$ und eine Funktion $F(u)$ durch Faltung mit δ_+ und δ_- in zwei Funktionen zerlegt, die je in einer Halbebene analytisch sind.

Damit wird formal eine Lösung der Integralgleichung $\chi(t+x) = \int_0^{\infty} k(\tau) q(t-\tau) d\tau$ hergestellt.

G. Doetsch.

Kumar, Ram: A theorem on operational calculus. Bull. Calcutta math. Soc. **46**, 37—40 (1954).

Durch Anwendung des Parseval-Goldsteinschen Theorems auf $e^{-bt} q(t)$ und auf die verallgemeinerte Besselfunktion $t^\mu J_\mu^\mu(a t^\mu)$ (Wright, dies. Zbl. **10**, 211) ergibt sich durch einfache Integralsubstitution die Korrespondenz für $\Phi(t) = t^{(2/\mu)-1} \cdot e^{-bt^{1/\mu}} q(t^{1/\mu})$. Erfüllt nun $q(t)$ die Funktionalgleichung $q(t) = e^{(c+bt)t} \Phi(t)$, so ist die Laplacetransformierte $f(p)$ von $q(t)$ Lösung einer Integralgleichung 1. Art. Der Gültigkeitsbereich dieses Satzes wird aus der Forderung der Konvergenz des auftretenden uneigentlichen Integrals bestimmt. Für den Fall $\mu = 1$ und $c = 0$ ergibt sich der Satz, daß $x^{2+1/2} (x^2 + 2b)^{-1} f(x^2/2 + b)$ in bezug auf die Hankeltransformation von der Ordnung λ identisch mit seinem Bild ist. Setzt man außerdem auch $b = 0$, so ergibt sich ein von Gupta [J. Indian math. Soc. **7**, 117—126 (1943)] angegebenes Resultat. Ähnlich ergibt sich ein weiterer Satz über selbstreziproke Hankeltransformierte.

F. Selig.

Mitra, S. C. and Dinesh Chandra: On certain functions which are self-reciprocal under a new transform. Bull. Calcutta math. Soc. **46**, 15—24 (1954).

Es wird die Transformation $g(x) = \int_0^\infty \omega_{\mu, \nu}(x, y) f(y) dy$ mit dem Kern

$\omega_{\mu, \nu}(x, y) = \sqrt{xy} \int_0^\infty J_\nu(t) J_\mu\left(\frac{xy}{t}\right) t^{-1} dt$ betrachtet, die involutorisch ist. Es werden

Beispiele von Funktionen $f(y)$ angegeben, die unter dieser Transformation selbstreziprok sind, und auf formalem Weg allgemeine Bedingungen für Selbstreziprozität abgeleitet. G. Doetsch.

Rajagopal, C. T.: On Tauberian theorems for the Riemann-Liouville integral. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **6**, 27–46 (1954).

Das Riemann-Liouvillesche Integral einer Funktion $q(x)$, die in jedem endlichen Intervall von beschränkter Variation ist ($q(0) = 0$), ist durch

$$\Phi_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt \quad (\alpha > 0), \quad \Phi_0(x) = \varphi(x),$$

definiert. $W(x)$ sei positiv und monoton wachsend, $\theta(x) > 0$, $x \leq x' \Rightarrow \theta(x) \leq \theta(x')$. Es sei $|\Phi_\alpha(x)| \leq m W(x)$. Aus

$$\sup_{0 < t < \theta(x)} [\Phi_{\alpha'}(x) - \Phi_{\alpha'}(x-t)] \leq \frac{m W(x)}{[\theta(x)]^{\alpha-\alpha'}} \quad \text{folgt} \quad \Phi_{\alpha'}(x) \leq K \frac{m W(x)}{[\theta(x)]^{\alpha-\alpha'}},$$

wo K eine von α, α' abhängige Konstante ist. — Dieser Satz enthält eine Reihe von Sätzen Tauberscher Art von anderen Autoren. G. Doetsch.

Vučković, Vladeta: Quelques théorèmes relatifs à la transformation de Stieltjes. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **6**, 63–74 (1954).

1. $A(u)$ sei in jedem endlichen Intervall von beschränkter Variation und

$$A(0) = 0. \text{ Wenn } S(x) = \int_0^\infty \frac{dA(u)}{(u+x)^{\alpha-1}} = O(e^{-x^\alpha}) \text{ für } x \rightarrow \infty \left(\alpha > 1, 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \right),$$

so ist die für $\Re s > 0$ analytische Funktion $\chi(s) = \int_0^\infty e^{-su} u^\gamma A(u^{1/\alpha}) du$ ($\gamma = -1$)

auch noch im Punkte $s = 0$ analytisch. 2. Aus $S(x) = O(e^{-x^\alpha})$ für $x \rightarrow \infty$ ($0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$) und $u^\beta [A(v) - A(u)] > -m$ für alle $u \leq v \leq u + u^{1-\alpha}$ ($\beta > -\alpha$) folgt $u^\beta S(u) = O(1)$ für $u \rightarrow \infty$. G. Doetsch.

Khamis, Salem H.: On the reduced moment problem. Ann. math. Statistics **25**, 113–122 (1954).

Let $\Phi(x)$ and $\Psi(x)$ be two nonnegative, nondecreasing functions such that

$$\int_{-\infty}^\infty x^r d\Phi(x) = \int_{-\infty}^\infty x^r d\Psi(x) \text{ for } r = 1, 2, \dots, 2n. \text{ Then a form of Tchebycheff's}$$

inequalities state that (*) $|\Phi(x) - \Psi(x)| \leq \varrho_n(x)$ (see Shohat and Tamarkin, this Zbl. **41**, 433), where the definition of $\varrho_n(x)$ is also given. The author shows that in certain cases the right hand side of (*) can be replaced by $C \varrho_n(x)$ where $0 < C < 1$. For example if $\Phi(x)$ and $\Psi(x)$ are differentiable and $-\Phi'(x)/\Psi'(x)$ is bounded above, we can take $C = 1 + 1/\text{u. b. } (-\Phi'(x)/\Psi'(x))$. J. Horváth.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Grothendieck, Alexandre: Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires. I, II. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 577–579, 607–609 (1954).

Vorankündigung einer vektoriell-topologischen Klassifikation der linearen Abbildungen der wichtigsten Räume der Funktionalanalysis ineinander. L^1, L^2, L^∞ seien im Folgenden die bekannten Räume, die mit einem beliebigen Radonschen Maß über einem lokalkompakten Raum M erklärt sind, $C_0(M)$ der Raum der auf M stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen. Eine lineare Abbildung u eines Banachraumes E in einen Banachraum F heißt präintegral, wenn es zu L^1 isomorphe Räume G bzw. H gibt, von denen E bzw. F' Quotientenräume sind, so daß die durch u auf $G \times H$ erzeugte Bilinearform integral ist im Sinne des Verf. (dies. Zbl.

55, 97). Das zentrale Theorem ist der Satz, daß der identische Operator von L^2 präintegral ist. Eine lineare Abbildung $E \rightarrow F$ heißt hilbertsch, wenn sie als Produkt zweier Abbildungen $E \rightarrow L^2$, $L^2 \rightarrow F$ geschrieben werden kann. Die präintegralen Abbildungen $E \rightarrow F$ sind mit den hilbertschen identisch. Zusammengesetzte Abbildungen von den Typen $L^1 \rightarrow L^2 \rightarrow L^\infty$ bzw. $L^1 \rightarrow L^\infty \rightarrow L^1 \rightarrow L^\infty$ sind stets integral, solche von den Typen $L^2 \rightarrow L^\infty \rightarrow L^1$, $L^\infty \rightarrow L^1 \rightarrow L^2$, $L^\infty \rightarrow L^1 \rightarrow L^\infty \rightarrow L^1$ sogar nuklear. Abbildungen von der Form $L^2 \rightarrow L^1 \rightarrow L^2$ bzw. $L^2 \rightarrow L^\infty \rightarrow L^2$ sind stets vom Hilbert-Schmidtschen Typus, jede Abbildung $L^\infty \rightarrow L^1$ ist hilbertsch. Jede in L^1 summierbare Folge ist absolut quadratisch summierbar. Das Tensorprodukt $C_0(M) \otimes C_0(M)$ ist die lineare Hülle der $i = C_0(M \times M)$ von positivem Typus. Es ergibt sich eine neue Charakterisierung der nuklearen Räume durch Nullumgebungssysteme vom Typus der Kugeln aus L^1 bzw. L^2 bzw. L^∞ . Schließlich ergibt sich eine neue Charakterisierung der Hilbertschen Räume: Ein lokalkonvexer Raum E ist dann und nur dann topologisch isomorph einem Hilbertschen Raum, wenn er topologisch isomorph einem Quotientenraum eines L^∞ und einem Teilraum eines L^1 ist.

G. Köthe.

Nikodým, Otton Martin: On transfinite iterations of the weak linear closure of convex sets in linear spaces. Rend. Circ. mat. Palermo 3, 5—75 (1954).

Soient E un espace vectoriel de dimension infinie, A un ensemble convexe dans E . L'A. note $\text{lin}^1 A$ l'ensemble des $y \in E$ tels qu'il existe un $x \neq y$ tel que le segment ouvert en y , fermé en x , soit tout entier contenu dans A . Pour tout ordinal $\alpha < \Omega$ il pose $\text{lin}^\alpha A = \text{lin}^1(\text{lin}^{\alpha-1} A)$ si α a un antécédent, $\text{lin}^\alpha A = \bigcup_{\beta < \alpha} \text{lin}^\beta A$ dans le cas contraire. L'A. construit, dans ce travail, pour tout $\alpha < \Omega$, un ensemble convexe convenable A tel que $\text{lin}^{\alpha+1} A \neq \text{lin}^\alpha A$. Cette construction, très complexe et très ingénieuse, ne saurait être résumée ici; pour la commodité, l'A. définit un produit scalaire préhilbertien sur E , et se place dans l'espace hilbertien complété. Les ensembles qu'il utilise pour former son contre-exemple sont ce qu'il appelle des „dendrites“, qu'il définit par récurrence transfinie, et la plus grande partie du mémoire est consacrée à une étude détaillée de ces ensembles, parmi lesquelles l'A. distingue certains qu'il appelle „dendrites complètement réguliers“. Ce sont ces derniers ensembles qui finalement donnent le contre-exemple; pour donner une idée de la complexité de la démonstration, mentionnons que le théorème doit être successivement démontré pour $\alpha = 1$, $\alpha = n < \omega$, $\alpha = \omega$, $\alpha = \omega + 1$, $\alpha = \omega + n$ et finalement $\alpha > \omega$.

J. Dieudonné.

Halperin, Israel: Uniform convexity in function spaces. Duke math. J. 21, 195—204 (1954).

Soient S un espace mesuré, $\lambda(u)$ une fonction positive, croissante, convexe, positivement homogène, définie sur l'ensemble des fonctions $u \geq 0$ et mesurables dans S ; on suppose en outre que $\lambda(u) = 0$ si u est presque partout nulle, et que $\lambda(\sup u_n) = \sup \lambda(u_n)$ pour une suite croissante (u_n) . Alors, pour tout espace de Banach B , $L^\lambda(B)$ est l'ensemble des classes de fonctions mesurables à valeurs dans B , pour lesquelles $\lambda(f) < +\infty$, muni de la norme $\lambda(f)$. L'A. dit que λ est uniformément convexe si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout η tel que $0 < \eta < 1$, il existe $\delta(\varepsilon, \eta) > 0$ tel que lorsque $\lambda(u) = \lambda(v) = 1$ et $(1 - \eta)u(x) \leq v(x)$ pour tout x dans un ensemble mesurable E tel que $\lambda(\chi_E) < \varepsilon$, alors $\lambda(\frac{1}{2}(u + v)) < 1 - \delta(\varepsilon, \eta)$. Il montre alors que, pour que $L^\lambda(B)$ soit uniformément convexe, il faut et il suffit que λ et B le soient. Il particularise ensuite le résultat obtenu dans le cas où $\lambda = \lambda_m$ appartient au type de fonctions „longueurs“ définies par l'A. dans un travail antérieur (ce Zbl. 52, 113).

J. Dieudonné.

Halperin, Israel: Reflexivity in the L^λ function spaces. Duke math. J. 21, 205—208 (1954).

Les notations et définitions étant celles du précédent compte-rendu, l'A. montre que, pour que $L^\lambda(B)$ soit réflexif, il faut et il suffit que B et $L^\lambda(R)$ (R droite numérique) le soient; il exprime ensuite les conditions pour que $L^\lambda(R)$ soit réflexif, en termes de la fonction „longueur“ λ et de ses „enjuguées“ λ^* et λ^{**} . J. Dieudonné.

Dieudonné, Jean: On biorthogonal systems. Michigan math. J. 2, 7—20 (1954).

Es wird eine sehr übersichtliche Darstellung der in Arbeiten von Gelbaum

James, Karlin und Wilansky enthaltenen Ergebnisse über Biorthogonalsysteme mit wichtigen Ergänzungen gegeben. Anstatt für Banachräume werden die Sätze gleich für die wesentlich allgemeineren tonnelierten Räume (die die F - bzw. LF -Räume als Spezialfälle umfassen) bewiesen. Das bedingt eine stärkere Heranziehung der Hilfsmittel der Theorie der topologischen Vektorräume, vor allem der schwachen Topologie. Die Sätze beziehen sich auf die quasiregulären, die schwach regulären, die stark regulären, die vollständig regulären und die absoluten Biorthogonalsysteme und ihre wichtigsten Eigenschaften. Zur Abgrenzung der genannten verschiedenen Typen wird eine Reihe von Beispielen betrachtet. (G. Köthe.

Mergeljan, S. N. und A. P. Tamadjan: Über die Vollständigkeit in einer gewissen Klasse von nicht-Jordanschen Gebieten. Akad. Nauk Armjan. SSR. Izvestija fiz.-mat. estest. techn. Nauki 7, Nr. 2, 1—17 (1954) [Russisch].

P étant un ensemble parfait non dense sur la circonférence $|z| = 1$, soit D_P le domaine obtenu en ôtant du cercle-unité $|z| \leq 1$ tous les points $\text{Arg } z = \text{Arg } t$, $1 - h \leq |z| < 1$ ($0 < h < 1$) avec $t \in P$. Les AA. donnent une condition métrique sur P permettant d'affirmer que la classe des polynômes est dense dans l'espace H_2 des fonctions analytiques dans D_P avec $\iint_{D_P} |f|^2 dx dy$ finie; ils montrent ensuite qu'une condition analogue un peu plus faible est insuffisante. (G. Bourion.

Davis, Philip and J. L. Walsh: On representations and extensions of bounded linear functionals defined on classes of analytic functions. Trans. Amer. math. Soc. 76, 190—206 (1954).

Soit $H(B)$ une famille de fonctions analytiques régulières dans le domaine B , avec une définition du produit scalaire faisant de $H(B)$ un espace de Hilbert. On écrit $H(B) \subset H(G)$ si $G \subset B$ et si $f \in H(B)$ implique $f \in H(G)$ et $\|f\|_G \leq \|f\|_B$. Les AA. étudient les fonctionnelles linéaires bornées sur $H(B)$, et en particulier leur prolongement sur un $H(G)$. Je citerai les résultats suivants: l'existence d'un noyau $K(z_1, z_2)$ (reproducing kernel) équivalent au fait que toute fonctionnelle de la forme $L(f) = f(w)$, $w \in B$, est bornée sur $H(B)$. Toute fonctionnelle linéaire bornée sur $H(B)$ peut être approchée uniformément par des combinaisons finies de fonctionnelles ponctuelles, c'est-à-dire du type $f(w)$ ou $f^{(k)}(w)$ avec $w \in B$. Les résultats sont appliqués au cas particulier de $L^2(B)$: $(f, g) = \int_B f \bar{g} dx dy$. La possibilité de prolonger la fonctionnelle $L(f)$ définie sur $L^2(B)$ à un $L^2(G)$ avec $\bar{G} \subset B$ est rattachée à la possibilité de prolonger à un C avec $\bar{B} \subset C$ la fonction $l(z)$ qui donne la représentation de Riesz $L(f) = (f, l)$.

(G. Bourion.

Fujiwara, Kaichiro: Sur les anneaux des fonctions continues à support compact. Math. J. Okayama Univ. 3, 175—184 (1954).

The ring of all complex valued continuous functions with compact supports on a locally compact Hausdorff space Ω is denoted by $C_k(\Omega)$. The author notes that this ring, with the usual norm, though it is not complete and has no unit element, has the two following properties: (1) each element belongs to a complete ideal; (2) for each $f \in C_k(\Omega)$ there exists an element $e_f \in C_k(\Omega)$ such that $e_f f = f$. It is in fact stated erroneously that each principal ideal is complete. This error is however of no consequence in what follows since, for the purpose of (1), we may take the ideal consisting of all elements of $C_k(\Omega)$ that vanish outside the support of the given function. The author proves that the properties (1) and (2) characterize the *-subalgebras of a commutative B^* -algebra which are of the form $C_k(\Omega)$. An abstract ring A is also considered, having a property generalizing (2); namely, (3) for each $a \in A$ there is an element $e_a \in A$ with $ae_a = a = e_a a$ and $ae_a = ax$, $e_a xa = xa$, $x \in A$. The primitive ideals of A are studied, and it is proved that the structure space $\mathfrak{S}(A)$, in the sense of Jacobson [Proc. nat. Acad. Sci. USA 31, 333—338 (1945)] is locally compact; also, if a set of primitive ideals form a compact subset of $\mathfrak{S}(A)$, then their intersection is a regular ideal. Properties are also obtained of normed rings satisfying (1) and (3).

(F. F. Bonsall.

Bonsall, F. F.: A minimal property of the norm in some Banach algebras. J. London math. Soc. 29, 156—164 (1954).

Die Arbeit setzt die Untersuchungen von F. Bonsall und A. Goldie (vgl. dies. Zbl. 55, 106) fort. Eine Banachalgebra A heißt eine $B^\#$ -Algebra, wenn zu jedem $a \in A$ ein $a^\# \neq 0$ existiert mit $\|(a^\# a)^n\|^{1/n} = \|a^\#\| \|a\|$ für alle $n = 1, 2, \dots$

Dies ist eine Verallgemeinerung der B^* -Algebren. Ist X ein reflexiver Banachraum, so ist die Algebra $F(X)$ aller gleichmäßigen Limites der Operatoren endlicher Dimension auf X eine $B^\#$ -Algebra. Jede Norm $\|a\|$ mit $\|a\| \leq \|a\|$ auf einer $B^\#$ -Algebra fällt mit der Norm $\|a\|$ zusammen und jede $B^\#$ -Algebra ist halbeinfach. Jede $B^\#$ -Algebra A , die überdies eine Annihilatoralgebra ist, ist isomorph und isometrisch der $B(\infty)$ -Summe (im Sinn von Kaplansky, dies. Zbl. 33, 187) der minimalen abgeschlossenen zweiseitigen Ideale aus A , die selbst isomorph und isometrisch Algebren $F(X)$ mit reflexiven X sind. Damit ist die Struktur der $B^\#$ -Annihilatoralgebren aufgeklärt. Ist A eine reelle Banachalgebra beschränkter reellwertiger Funktionen auf einer Menge X mit der Norm $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, so ist jede zweite Norm $\|f\| \leq \|f\|$ identisch mit $\|f\|$. Daraus folgt dieselbe Aussage für B^* -Algebren.

G. Köthe.

Waelbroeck, Lucien: Structure des algèbres à inverse continu. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 762—764 (1954).

A sei eine Algebra mit stetigen Inversen im Sinn von I. Gel'fand (dies. Zbl. 24, 320). Es gilt der Satz, daß A algebraisch isomorph ist dem Quotientenring des Ringes der auf dem Spektrum von A analytischen Funktionen nach einem abgeschlossenen Ideal von Funktionen, die auf dem Spektrum verschwinden. Das Spektrum von A wird einmal im Sinn von Gel'fand als der Raum der Maximalideale von A definiert, das andere Mal als projektiver Limes aus den Spektren je endlichvieler Elemente eines Systems von analytischen Erzeugenden von A im Sinn von Waelbroeck [C. r. Acad. Sci., Paris 238, 640—641 (1954)].

G. Köthe.

Brown, Arlen: The unitary equivalence of binormal operators. Amer. J. Math. 76, 414—434 (1954).

Un anneau d'opérateurs R est binormal si, quels que soient X_1, X_2, X_3, X_4 dans R , on a $\sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} X_{\sigma(1)} X_{\sigma(2)} X_{\sigma(3)} X_{\sigma(4)} = 0$, σ parcourant l'ensemble des permutations de $\{1, 2, 3, 4\}$, ε_{σ} étant la signature de σ . On voit aisément que ces anneaux sont les produits d'anneaux de type I_1 et de type I_2 . L'A. donne la structure des anneaux de type I_2 comme anneaux de matrices d'ordre 2 sur un anneau abélien. Un opérateur A est binormal s'il engendre un anneau d'opérateurs R binormal. L'A. donne un système complet d'invariants unitaires de A , en considérant quatre fonctions de A et A^* qui appartiennent au centre de R (on résout d'abord le problème analogue pour les matrices carrées d'ordre 2 à éléments complexes). Des cas particuliers sont étudiés directement par des méthodes analogues (opérateurs A tels que $A^2 = 0$, ou $A^2 = A$; systèmes de deux projecteurs).

J. Dixmier.

Pallu de la Barrière, Robert: Sur les algèbres d'opérateurs dans les espaces hilbertiens. Bull. Soc. math. France 82, 1—52 (1954).

Démonstration de résultats annoncés antérieurement (Pallu de la Barrière, ce Zbl. 42, 350; 46, 119), avec quelques compléments [par exemple, toute trace sur un anneau d'opérateurs est de la forme $A \rightarrow \sum_{r \in I} (A e_r, e_r)$]. Il y a des points communs avec un article de Griffin (ce Zbl. 51, 343).

J. Dixmier.

Mautner, F. L.: Geodesic flows and unitary representations. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 33—36 (1954).

Sei G eine lokal kompakte topologische Gruppe ohne endlichdimensionale stetige unitäre Darstellungen. Sei K eine geschlossene Untergruppe von G mit der Eigenschaft, daß der Nebenklassenraum G/K ein invariantes endliches Maß besitzt. Wenn f eine meßbare Funktion auf G ist, die die Gleichung $f(g) = f(hg h')$ ($g \in G$; $h, h' \in K$) fast überall erfüllt, dann muß f eine Konstante sein. Einige andere Sätze werden angegeben, mit skizzierten Beweisen, unter diesen eine neue Formulierung eines Satzes von Hedlund und E. Hopf (Siehe auch Gel'fand und Fomin, dies. Zbl. 48, 92).

E. Hewitt.

Dieudonné, Jean: Sur le produit de composition. *Compositio math.* **12**, 17—34 (1954).

Es sei G eine beliebige lokalkompakte abelsche Gruppe, Φ_0 der Raum der komplexen stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf G , $\bar{\Phi}_0$ der Raum der stetigen im Unendlichen verschwindenden Funktionen, Φ_1 der Raum der stetigen und beschränkten Funktionen, Φ'_1 der Raum der gleichmäßig stetigen und beschränkten Funktionen, Φ_{IV} der Raum der beschränkten borelschen Funktionen. Es seien λ_n und μ_n zwei Folgen von Maßen auf G , $\lambda_n * \mu_n$ die Folge der Faltungen $(\lambda_n * \mu_n)(f) = \iint f(xy) d\lambda_n d\mu_n$. Es werden folgende Sätze bewiesen: Konvergiert λ_n gegen λ auf Φ_1 (d. h. für jedes $f \in \Phi_1$), μ_n gegen μ auf $\bar{\Phi}_0$, so konvergiert $\lambda_n * \mu_n$ gegen $\lambda * \mu$ auf $\bar{\Phi}_0$. Konvergieren λ_n und μ_n beide auf Φ_1 gegen λ bzw. μ , so auch $\lambda_n * \mu_n$ gegen $\lambda * \mu$ auf Φ_1 . Die entsprechende Aussage gilt für Φ_{IV} statt Φ_1 . Konvergiert λ_n gegen λ auf Φ_1 und $f_n \in L^1(G)$ gegen $f \in L^1(G)$ auf Φ_{IV} , so konvergiert $\lambda_n * f_n$ gegen $\lambda * f$ auf Φ_{IV} . (Geht λ_n gegen λ auf Φ'_1 und $f_n \in L^1(G)$ stark gegen $f \in L^1(G)$, so geht $\lambda_n * f_n$ stark gegen $\lambda * f$. Ersetzt man die Folgen durch beschränkte Filter, so sind diese Resultate im allgemeinen nicht mehr richtig. Der folgende von A. Wintner für die Gerade bewiesene Satz gilt für beliebiges G : Ist μ_n eine Folge beschränkter und positiver Maße auf G , so daß für jedes $\hat{x} \in \hat{G}$ (Charaktergruppe) die Folge $\hat{\mu}_n(\hat{x})$ der Fouriertransformierten einen endlichen Limes $q(\hat{x})$ hat, und ist q stetig in einer Umgebung der Null in \hat{G} , so konvergiert μ_n auf Φ_1 gegen ein beschränktes Maß μ_0 , dessen Fouriertransformierte q ist. G. Köthe.

Harish-Chandra: Representations of semisimple Lie groups. II, III. *Trans. Amer. math. Soc.* **76**, 26—65, 234—250 (1954).

II. Une partie des résultats a été annoncée antérieurement (ce Zbl. **45**, 386). Les démonstrations sont ici détaillées; elles sont fort délicates, utilisent beaucoup de résultats antérieurs de l'A. eux-mêmes difficiles, et même des résultats inédits de Chevalley. L'article continue un article antérieur (ce Zbl. **51**, 340); les notations $G, \mathfrak{D}, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}, \mathfrak{f}_0, \mathfrak{f}, \mathfrak{B}, \mathfrak{X}$ ont la signification de cette revue. Soient \mathfrak{f}' l'algèbre dérivée de \mathfrak{f} , Ω (resp. Ω') l'ensemble des classes de représentations irréductibles de dimension finie de \mathfrak{f} (resp. \mathfrak{f}'), $\Omega_{\mathfrak{f}}$ les classes de Ω' qui interviennent dans la réduction d'une représentation de dimension finie de \mathfrak{g} restreinte à \mathfrak{f}' , \mathfrak{X}' l'algèbre enveloppante de \mathfrak{f}' ($\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X} \subset \mathfrak{B}$). Théorème 1: Soit \mathfrak{Y}' un idéal à gauche maximal de \mathfrak{X}' tel que la représentation naturelle de \mathfrak{f}' sur $\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'$ soit dans $\Omega_{\mathfrak{f}}$; alors l'idéal à gauche de \mathfrak{B} engendré par \mathfrak{Y}' est l'intersection des idéaux à gauche maximaux de codimension finie dans \mathfrak{B} qui contiennent \mathfrak{Y}' . — Soient \mathfrak{Q} le centralisateur de \mathfrak{f} dans \mathfrak{B} , \mathfrak{Z} le centre de \mathfrak{B} , χ un homomorphisme de \mathfrak{Z} dans le corps complexe, \mathfrak{Z}_{χ} le noyau de χ , $\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}_0}$ le noyau dans \mathfrak{X} d'une $\mathfrak{D}_0 - \Omega$. — Théorème 2: Soit $M(\mathfrak{D}_0, \chi)$ l'ensemble des idéaux à gauche maximaux dans \mathfrak{B} qui contiennent $\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}_0} + \mathfrak{Z}_{\chi}$. Alors, pour tout $\mathfrak{M} \in M(\mathfrak{D}_0, \chi)$, $\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{Q}\mathfrak{X})$ est un idéal à gauche maximal dans $\mathfrak{Q}\mathfrak{X}$. Deux éléments $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ de $M(\mathfrak{D}_0, \chi)$ sont équivalents dans \mathfrak{B} si et seulement si $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{Q}\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{Q}\mathfrak{X}$ sont équivalents dans $\mathfrak{Q}\mathfrak{X}$ (deux idéaux à gauche d'une algèbre associative étant dits équivalents si les représentations de l'algèbre qu'ils définissent canoniquement sont équivalentes). — Théorème 3: Soient $\mathfrak{M} \in M(\mathfrak{D}_0, \chi)$ et π la représentation canonique de \mathfrak{B} sur $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}/\mathfrak{M}$. Pour toute $\mathfrak{D} \in \Omega$, soit $\mathfrak{B}_{\mathfrak{D}}^*$ l'ensemble des éléments de \mathfrak{B}^* transformés par π suivant \mathfrak{D} . Alors il existe un entier N tel que $\dim \mathfrak{B}_{\mathfrak{D}}^* \leq N(\dim \mathfrak{D})^2$, N indépendant de \mathfrak{D} . — Le théorème 4 ne peut être expliqué ici. Il concerne les relations entre caractère infinitésimal, poids, et fonctions sphériques d'une représentation quasi simple irréductible de G dans \mathfrak{B} . — Le lemme suivant, essentiel pour un mémoire ultérieur, a un intérêt propre: soient \mathfrak{f} une algèbre de Lie semi-simple complexe, \mathfrak{B} son algèbre enveloppante; il existe un z dans le centre de \mathfrak{B} tel que, pour toute représentation irréductible de dimension finie π de \mathfrak{f} , on ait $\pi(z) = (\dim \pi)^2$. La démonstration utilise la formule de Weyl donnant $\dim \pi$ à l'aide du plus haut poids de π . — III. A l'aide des résultats accumulés, l'A. démontre, cette fois assez aisément, de nombreux théorèmes (annoncés en général dans les Notes citées) concernant les représentations quasi-simples irréductibles d'un groupe de Lie semi-simple G dans un espace de Banach. Notons en outre: 1. le lemme suivant: soit \mathfrak{f} une algèbre de Lie semi-simple complexe de rang l ; alors $\sum_{\mathfrak{D}} [\dim \mathfrak{D}]^{-l-1} < +\infty$, où \mathfrak{D} parcourt l'ensemble des représentations irréductibles de dimension finie de \mathfrak{f} ; 2. lorsque G est complexe, une formule explicite pour calculer certaines fonctions sphériques à l'aide des racines de l'algèbre de Lie. J. Dixmier.

Harish-Chandra: The Plancherel formula for complex semisimple Lie groups. *Trans. Amer. math. Soc.* **76**, 485—528 (1954).

Développement d'une Note antérieure (ce Zbl. 44, 328). Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe. Soit E l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G . L'A. veut munir E d'une mesure positive $d\omega$ telle que $f(1) = \int_E T_\omega(f) d\omega$, où: 1. f est indéfiniment différentiable à support compact sur G ; 2. T_ω est la distribution centrale, caractère de ω , que l'A. a antérieurement attachée à ω : si $\pi = \omega$, $T_\omega(f) = \text{Tr} \int_G f(x) \pi(x) dx$. — Préliminaires.

D'après le lemme 3, deux représentations unitaires π_1, π_2 sont équivalentes si elles ont le même caractère, pourvu qu'elles satisfassent à certaines conditions plus larges que celles données antérieurement (rapp. précéd.). Les th. 1-2 donnent des expressions intégrales de $T_{\pi_1, \delta}(f), T_{\pi_2, \delta}$ étant le caractère d'une certaine représentation unitaire dépendant de π (forme linéaire sur un sous-espace de l'algèbre de Lie de G) et δ (représentation unitaire irréductible d'un sous-groupe compact de G): cette représentation opère (à peu près) dans l'espace des fonctions de carré intégrable sur un sous-groupe compact de G . Le th. 2 notamment permet de donner des conditions pour que $T_{\pi_1, \delta_1} = T_{\pi_2, \delta_2}$. Supposant G complexe, l'A. obtient (th. 3) une formule intégrodifférentielle pour $f(1)$. Il la modifie par une transformation de Fourier relativement à un sous-groupe abélien de G . Alors $f(1)$ apparaît, grâce au th. 1, comme une somme d'intégrales, les paramètres de sommation et d'intégration repérant des caractères $T_{\pi, \delta}$ correspondant à des représentations irréductibles, à condition d'éliminer un ensemble de mesure nulle (th. 4). Grâce au lemme 3 et au th. 2, on peut enfin transporter à une partie de E la mesure obtenue sur l'ensemble des caractères précédents. — Les démonstrations sont difficiles et demandent un très grand nombre de notions, de sorte que le résumé qui précède est très imparfait. *J. Dixmier.*

Methée, Pierre-Denis: Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz. *Commentarii math. Helvet.* 28, 225–269 (1954).

Eine Transformation $x'_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$ ($i = 1, \dots, n$), die die quadratische Form $u =$

$x_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$ invariant läßt und deren Determinante gleich ± 1 ist, heißt eine Lorentz-Rotation.

Eine Rotation, die den im R^n durch $x_n = 0, u = 0$ definierten Kegel (Zukunftskegel für $x_n = t$) in sich überführt, heißt eigentlich. „Invariante Distribution“ heißt eine Distribution im Sinne von L. Schwartz, bei der $\lambda T = T$ für jedes λ aus der Gruppe G der eigentlichen Lorentz-Rotationen gilt. Jede invariante Distribution, deren Träger sich auf den Punkt 0 reduziert, ist eine lineare Kombination von Distributionen der Form $\square^k \delta_0$ ($k = 0, 1, \dots$), wo δ_0 die Diracsche Distribution und \square der d'Alembertsche Operator $\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ist. Es werden die

speziellen Distributionen untersucht, die als Träger ein Hyperboloid $u = \varepsilon$ ($\varepsilon < 0$) oder die Fläche eines Hyperboloides $u = \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) haben. Diese besitzen als Funktionen von ε eine asymptotische Entwicklung in der Umgebung von $\varepsilon = 0$. Dadurch lassen sich (unter Verwendung der Hadamardschen Methode der „partie finie“ von divergenten Integralen) in den R^n solche Distributionen fortsetzen, die für $u = 0$ gleich gewissen Funktionen von u sind, die in der Umgebung von $u = 0$ nicht summierbar sind. Unter diesen Funktionen kommen gerade diejenigen vor, die bei folgendem Problem auftreten, von dem die obige Untersuchung, anschließend an eine Arbeit von D. Rivier (*Helvet. phys. Acta* 22, 265–318 (1949)) ihren Ausgangspunkt genommen hat: Im R^n ($n \geq 3$) alle gegenüber der Gruppe G invarianten Distributionen zu finden, die der Wellengleichung $\square T = k T = 0$ bzw. $-\delta_0$ genügen. Verf. gibt zum Schluß die explizite Lösung dieses Problems. *G. Dotsch.*

Gates jr., Leslie D.: Differential equations in the distribution of Schwartz. (Abstract of a thesis.) *Iowa State College, J. Sci.* 28, 323–324 (1954).

Citlanadze, E. S.: Über eine bedingte Extremumaufgabe im Hilbertschen Raum. *Uspechi mat. Nauk* 9, Nr. 3 (61), 225–226 (1954) [Russisch].

Nikodým, Otton Martin: Sur les opérateurs normaux maximaux dans l'espace hilbertien séparable et complet. I. Notion de „lieux“ et ses propriétés. II. Représentation canonique. *C. r. Acad. Sci., Paris* 238, 1373–1375, 1467–1469 (1954).

Dans ces deux notes l'A. étend aux opérateurs normaux N de l'espace de Hilbert \mathfrak{H} sa théorie des opérateurs self-adjoints (ce Zbl. 29, 51; 37, 278). Au rectangle $R = \{x + iy, x \in \alpha, \beta, y \in \gamma, \delta\}$, $\alpha < \gamma < \beta, \gamma < \delta$, $x \in \alpha, \beta, y \in \gamma, \delta$, $x' = \beta', \gamma' = \delta'$, du plan complexe P le théorème de décomposition spectrale de N fait correspondre un espace de projection $s(R)$ et, par prolongement additif, à toute figure f (somme finie de rectangles R) un espace $s(f)$. Ces espaces $s(f)$ constituent la tribu (algèbre borélienne) spectrale $\{s\}$, son extension borélienne est désignée par $\{s_b\}$. Les lieux σ sont définis comme suites descendantes minimales d'espaces $s(R_1)$, $s(R_2), \dots, s(R_n), \dots$; à tout σ correspond un nombre complexe $\lambda(\sigma)$ commun aux fermatures des

rectangles R_n . On suppose d'abord que (s_b) est saturée. Il existe alors dans le domaine de définition D de N (partout dense dans \mathfrak{H}) un vecteur générateur ω , et $\mu(a) = \text{carré de la norme de la projection de } \omega \text{ sur } a$, pour $a \in (s_b)$, est une mesure dénombrablement additive et effective (positive). Par une méthode analogue à celle utilisée dans le cas réel, est établie une correspondance isomorphe entre les vecteurs X de \mathfrak{H} et les fonctions de lieu à valeurs complexes $X(\sigma)$ de carré μ -sommable. L'opérateur transféré \mathfrak{N} s'exprime par $\mathfrak{N} X(\sigma) = \lambda(\sigma) \cdot X(\sigma)$. Utilisant $\lambda(\sigma)$ pour nommer le lieu σ et ses associés et transférant μ à P , il est possible de représenter les vecteurs X par les fonctions $\varphi(z)$ de carré μ -sommable et l'opérateur N prend la forme canonique $N\varphi(z) = z \cdot \varphi(z)$. Dans le cas d'un opérateur N général, l'auteur introduit une famille dénombrable (q) d'espaces q_n de manière que l'extension borélienne (s_b^*) de $(s_b) + (q)$ soit saturée, un vecteur ω^* générateur de \mathfrak{H} par rapport à (s_b^*) , représente canoniquement la restriction N_n de N à q_n au moyen de la projection de ω^* sur q_n et juxtapose les représentations obtenues. [Remarque — Il semble au rapporteur (1) que la quadripartition auxiliaire des points z de P serait évitée en définissant les lieux à l'aide de rectangles fermés, (2) que dans la formule p. 1469, § 11, la virgule entre „Nom p “ et „ $\varphi(p)$ “ doit être remplacée par un point.] *Chr. Pauc.*

Devinatz, A.: A note on semi-groups of unbounded selfadjoint operators. Proc. Amer. math. Soc. 5, 101—102 (1954).

Let $\{T_x\}$ ($x > 0$) be a one-parameter semi-group of self-adjoint operators on a Hilbert space H and D_x be the domain of T_x . Suppose that for every $f \in \bigcap_{x>0} D_x$ the function $(T_x f, f)$ is either bounded or measurable in some interval. Then there exists a unique resolution of the identity $\{E_t\}$ such that $E_t = 0$ if $t < 0$, and

$T_x = \int_0^\infty t^x dE_t$. For bounded T_x this theorem is due to B. Sz.-Nagy [Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes (this Zbl. 27, 227). p. 73]. *J. Horváth.*

Lippmann, Horst: Differentialoperatoren im Hilbertraum. Math. Nachr. 12, 9—28 (1954).

Ausführliche Diskussion des Operators $d dx$ im $L^2(-\pi, +\pi)$ unter Benutzung des Orthogonalsystems $\exp(inx)$ und evtl. der speziellen Funktion x : Charakterisierung durch Einwirkung auf Orthogonalsysteme, Inverse und die mit ihnen vertauschbaren Operatoren. *D. Morgenstern.*

• **Gårding, Lars:** Applications of the theory of direct integrals of Hilbert spaces to some integral and differential operators. (Lecture Series No. 11). University of Maryland, Inst. for Fluid Dyn. and Appl. Math. 1954. 23 p.

J. von Neumann (dies. Zbl. 34, 61) hat ein sehr allgemeines Spektraltheorem aufgestellt, das ein Analogon zu dem gewöhnlichen Spektraltheorem für Hermiteische Matrizen ist. Dieses wird zunächst auf Entwicklungen angewendet, die mit Carleman'schen Kernen zusammenhängen, wodurch die Verallgemeinerung eines Satzes von F. J. Mautner (dies. Zbl. 50, 119) entsteht. Hieraus ergibt sich wiederum ein Entwicklungssatz für selbstadjungierte elliptische Differentialoperatoren, der bekannte Ergebnisse von H. Weyl und M. H. Stone verallgemeinert. — Eine Ausarbeitung des vorliegenden Vortrags soll in einer Zeitschrift erscheinen. *G. Doetsch.*

Coddington, E. A.: The spectral representation of ordinary self-adjoint differential operators. Ann. of Math., II. Ser. 60, 192—211 (1954).

Ein weiterer Beweis des Spektralsatzes für formal selbstadjungierte gewöhnliche Differentialoperatoren beliebiger Ordnung. Verf. benutzt als wesentliches Bewiselement nicht die Greensche Funktion, sondern eine in ihrer Idee wohl zuerst von E. Hilb [Math. Ann. 66, 1—66 (1909)] entdeckte, später auch von Levitan (dies. Zbl. 41, 57) verwendete Methode der Approximation des singulären Differentialoperators durch reguläre Operatoren in Grundintervallen, die abgeschlossene Teilintervalle des ursprünglichen, offenen Grundintervalles sind. Der Levitansche Existenzbeweis wird durch Verwendung eines störungstheoretischen Resultates von F. Rellich vereinfacht und durch Eindeutigkeitsaussagen ergänzt. Im Gegensatz zu zahlreichen früheren Arbeiten über dieses Thema wird das Problem behandelt für Differentialgleichungen beliebiger (auch ungerader) Ordnung und unter Zu-

lassung komplexer Koeffizienten, wobei aber auf das Problem der vollständigen Charakterisierung aller möglichen Randbedingungen nicht eingegangen wird, sondern nur reguläre Enden und Enden mit Grenzpunktfall erlaubt werden. *H. O. Cordes.*

Taldykin, A. T.: Über die Existenz der Eigenwerte und über die Vollständigkeit des Systems der Eigenelemente bei gewissen linearen Operatoren. *Mat. Sbornik, n. Ser.* **34 (76),** 201—122 (1954) [Russisch].

Verf. betrachtet einen beliebigen linearen beschränkten Operator A im Hilbertraum und seine im Fredholmkreis liegenden Eigenwerte. Bezeichnungen: Der Fredholmkreis hat als Mittelpunkt den Nullpunkt der komplexen Ebene und als Radius die obere Grenze der Konvergenzradien der Reihen $E + \lambda B + \lambda^2 B^2 + \dots$, wo $A = B +$ vollstetiger Operator. —

Bei der Darstellung der Resolvente $A_\lambda = \sum_{k=-m}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k a_k$ (die a_k mit negativem Index sind endlichdimensionale Operatoren) sind die Elemente der Form $a_{-m} h \neq 0$ Eigenelemente, die Elemente der Form $a_k h$ ($k = 1, \dots, m-1$) heißen angeschlossen (присоединенный). Ergebnisse: Satz 1. A hat genau dann einen Eigenwert im Fredholmkreis (Radius r), wenn für ein $j = 0$, ein $\varepsilon > r^{-1}$ und unendlich viele n die Ungleichung $\|A^n f\| > \varepsilon^n \|f\|$ gilt. Satz 6. Die zu im Fredholmkreis liegenden Eigenwerten gehörigen Eigenelemente und angeschlossenen Elemente des konjugierten Operators A^* bilden genau dann ein vollständiges System, wenn es zu jedem f ein $\varepsilon > r^{-1}$ und unendlich viele n gibt, für die $\|A^n f\| > \varepsilon^n \|f\|$ gilt. — In den übrigen Sätzen wird gezeigt, daß sich die in Satz 1 und 6 genannten Eigenschaften (Existenz eines Eigenwerts, Vollständigkeit des Systems) von einem Operator C auf A übertragen, wenn A und C in gewissen Beziehungen stehen. *K. Zeller.*

Browder, Felix E.: The eigenfunction expansion theorem for the general self-adjoint singular elliptic partial differential operator. I. The analytical foundation. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **40,** 454—459 (1954).

Browder, Felix E.: Eigenfunction expansions for singular elliptic operators. II. The Hilbert space argument; parabolic equations on open manifolds. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **40,** 459—463 (1954).

Although not referred to, von Neumann's theory of continuous sums (this Zbl. **34,** 61) is the natural background to these two notes. In the simplest terms, a continuous sum $S = S(\mu, r)$ is a Hilbert space characterized by a measure μ on the real axis λ and a measurable dimension function r taking the values 1, 2, ... and ∞ . The elements F of S are all (equivalence classes of) vector-valued functions $F(\lambda) = (F_1(\lambda), \dots)$ with $r(\lambda)$ measurable complex components, the scalar product being $(F, G) = \int_A \sum F_k(\lambda) \bar{G}_k(\lambda) d\mu(\lambda)$. The spectral theorem of von Neumann can

be stated as follows. Given a selfadjoint operator A on a separable Hilbert space H , there exists a continuous sum $S = S(\mu, r)$ and a unitary mapping V from H to S which diagonalizes A in the sense that $(V A V^{-1} F)(\lambda) = \lambda F(\lambda)$. By this property, μ and r are determined up to equivalence. In the elementary case when H is finite-dimensional, then μ is concentrated to the eigenvalues of A and the components F_k of $F = V f$ can be computed by means of the formula $F_k(\lambda) = (f, s_k)$ where $s_k = s_k(\lambda)$ is a suitable eigenvector of A belonging to the eigenvalue λ . The inverse formula (the Fourier expansion) reads $f = \int \sum s_k(\lambda) F_k(\lambda) d\mu(\lambda)$. The main result of the two notes is that in a certain sense, these formulas are still true when H is the space of all square integrable functions on an open subset D of real n -dimensional space with values in a finite-dimensional Hilbert space and A is an extension of an elliptic differential operator L with sufficiently smooth coefficients. In that case $F_k(\lambda) = \int_A (f(x), s_k(\lambda, x)) dx$ when f vanishes outside a compact set.

The function $s_k(\lambda, x)$ is measurable $d\mu = dx$ and for a. a. λ it is a smooth eigenfunction of L , $L s_k(\lambda, x) = \lambda s_k(\lambda, x)$, but not necessarily square integrable. Similarly, if F vanishes outside a compact set and $f = V^{-1} F$, then $f(x) = \int \sum s_k(\lambda, x) F_k(\lambda) d\mu(\lambda)$ holds a. e. The proof which uses an idea of Mautner (this Zbl. **50,** 119) is based on the fact that if k is large enough, $(\lambda - i)^{-k}$ is given by a Carleman kernel. [Essentially the same theorem was first proved by the reviewer [12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 44–55 (1954)]. I also gave a different proof in „Applications of the theory of continuous sums to some integral and differential operators“ (Public lecture 1954 at the Inst. f. Fluid Dynamics and Appl. Math., Univ. of Maryland). The set of eigenfunctions s_k determines the self-adjoint extension A . If A is bounded from below, the parabolic equation $du/dt + A u = 0$, $u \in H$, $u(0) = g$, has the solution $u = V^{-1} e^{-At} V g$. It is shown that u is a smooth function. *L. Garding.*

Schroeder, J.: Zu F. W. Schäfke „Verbesserte Konvergenz- und Fehlerabschätzungen für die Störungsrechnung“. *Z. angew. Math. Mech.* **33** (1953), S. 255—259. *Z. angew. Math. Mech.* **34,** 280 (1954).

Richtigstellung und Ergänzung eines am Schlusse der genannten Arbeit von Schäfer (s. dies. Zbl. 50, 345) vorgenommenen Vergleichs zwischen verschiedenen unteren Schranken für den Konvergenzradius von Potenzreihen in der Störungsrechnung.
L. Collatz.

Berman, D. L.: Über gewisse lineare Operationen, die periodische Funktionen in trigonometrische überführen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 213—216 (1954) [Russisch].

On considère des opérations polynomiales $U_{n,m}(f)$ ayant les propriétés des opérations $U_n(f)$ (voir ce Zbl. 48, 95) à l'exception du grade des polynômes images qui est $\leq n + m$, et l'on démontre un théorème d'interpolation par les sommes $\sigma_{n,m}(f) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{n+m} s_k(f)$ où s_k sont les sommes partielles de la série Fourier. On trouve aussi des inégalités concernant les normes de ces opérations.

G. Marinescu.

Ladyženskij, L. A.: Allgemeine Bedingungen für die Vollstetigkeit eines Urysonschen Operators, der im Raum der stetigen Funktionen wirkt. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 1105—1108 (1954) [Russisch].

On considère l'opérateur $A\varphi(x) = \int_G K(x, y, \varphi(y)) dy$ et l'on démontre que les conditions suivantes sont suffisantes pour qu'il soit défini et complètement continu sur l'espace C des fonctions continues sur G (ensemble borné et fermé dans R^n):
1. $K(x, y, u)$ est continue dans u pour tout $x \in G$ et presque pour tout $y \in G$ et mesurable dans y pour tout $x \in G$, $-\infty < u < +\infty$;

2. $\int_G \sup_{|u| \leq a} |K(x, y, u)| dy < +\infty$, $\lim_{\substack{\|h\| \rightarrow 0 \\ x+h \in G}} \int_G \sup |K(x+h, y, u) - K(x, y, u)| dy = 0$

pour tout $a > 0$ et $x \in G$. On en déduit des critères pour le cas $K(x, y, u) = H(x, y)f(y, u)$.

G. Marinescu.

Krasnosel'skij, M. A. und Ja. B. Rutickij: Zur Theorie der Orlicz'schen Räume. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3 (61), 230 (1954) [Russisch].

Altman, M.: On the characteristic elements of linear transformations in Banach spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 105—107 (1954).

Let U be a continuous linear operator in a Banach space X . Let M and N be the range and null manifold of $I - U$, and N^* the null manifold of the adjoint of $I - U$. Suppose that $\frac{U^n(x)}{n} \rightarrow 0$ weakly for every $x \in X$, and that $\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U^k \right\|$ is bounded. The author uses the fact that a convex closed set is weakly closed to prove that (i) $N \cap \bar{M} = (0)$, (ii) $\dim N \leq \dim N^*$, and that if the sequence $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U^k(x) \right\}$ has, for every x , a weakly convergent sub-sequence (e. g. if X is reflexive) then (iii) $N = N \oplus \bar{M}$, (iv) $\dim N = \dim N^*$. (ii) and (iv) generalize results obtained by S. Mazur for the case $U = 1$ [Studia math. 2, 11—20 (1930)].

J. D. Weston.

Kračkovskij, S. N.: Über die Erweiterung des Singularitätsgebietes des Operators $T_\lambda = E - \lambda A$. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 1101—1104 (1954) [Russisch].

Continuing earlier work [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 201—204; 91, 1011—1013 (1953)] the author studies the resolvent $T = \lambda - A$ of a bounded linear operator A on a Banach space R . The operator is called normally solvable at λ if the equation $Tx = y$ has a solution if and only if y is orthogonal to the null-space N_λ^* of T_λ^* . Let Φ_A be the set of points λ where A is normally solvable and at least one of the null-spaces N_λ and N_λ^* has a finite dimension. Generalizing an

earlier result (l. c. 2 above) the author shows that if $\lambda \in \Phi_A$, then the linearly independent finite Jordan chains of T_λ and T_λ^* coincide with respect to the number of chains and their lengths. Some results on the dependence of the Jordan chains on the behaviour of the resolvent AT_λ^{-1} at the points of Φ_A where $\dim N_\lambda = 0$ are also given.

L. Gårding.

Fenyő, I.: Über die Lösung der im Banachschen Raume definierten nichtlinearen Gleichungen. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 5, 85–92 und russische Zusammenfassung, 93 (1954).

Let $f(x)$ be an operator from a Banach space X into another Banach space Y . The author proves some sharpenings of theorems of Kantorovič and his collaborators concerning the solution of the equation $f(x) = 0$. There is considered the method of successive approximations of Newton based on the algorithm $x_n = x_{n-1} - \delta^{-1} f(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, and its modification $x_n = x_{n-1} - \delta^{-1} (f(x_0, f(x_{n-1})) - \delta f(x_0, \cdot))$ ($\delta f(x, h)$ denotes the differential of f , and $\delta^{-1} f(x, h)$ its inverse with respect to h). For the equation $f(x) = y$ the algorithms read

$$(1) \quad x_n = x_{n-1} - \delta^{-1} F(x_{n-1}, F(x_{n-1})), \quad (2) \quad x_n = x_{n-1} - \delta^{-1} F(x_0, F(x_{n-1}))$$

where $F(x) = f(x) - y$. The author proves that the sequence (1) converges to a solution of the equation $f(x) = y$ if $f(x)$ is differentiable in the sense of Fréchet at x_0 , $\delta^{-1} f(x_0, h)$ exists, $\|\delta^{-1} f(x_0, \cdot)\| \leq B$, and $\|\delta f(x, \cdot) - \delta f(x_0, \cdot)\| \leq C \|x - x_0\|$ for $\|x - x_0\| \leq r = 1/3BC$; y is subject to the condition $\|y - f(x_0)\| \leq [2 - 3BCr]r \leq 11B$; the solution is unique in the solid sphere $\|x - x_0\| \leq r$. The sequence (2) converges to a solution under the following hypotheses: $\delta f(x, h)$ is continuous in a neighbourhood of x_0 , $\delta^{-1} f(x_0, h)$ exists, q and r are such that $\|\delta^{-1} f(x_0, \delta f(x, \cdot) - \delta f(x_0, \cdot))\| \leq q < 1$ for $\|x - x_0\| \leq r$ and $\|\delta^{-1} f(x_0, y - f(x_0))\| \leq r(1 - q)$; the solution is unique in the solid sphere $\|x - x_0\| \leq r$. No hypotheses on existence of higher derivatives are admitted.

A. Alexiewicz.

Michal, A. D. and D. H. Hyers: Solutions of differential equations as analytic functionals of the coefficient functions. Acta math. 91, 75–86 (1954).

Es seien E_1, E_2, E_3 komplexe Banachräume, und es sei die Abbildung $f(x, y)$ von $E_1 \times E_2$ in E_3 analytisch in $R_1 \times R_2$, $R_1 \subset E_1$, $R_2 \subset E_2$. Es wird bewiesen: Hat die Gleichung (1) $f(x, y) = 0$ für $x = x_0$, $y = y_0$, $(x_0, y_0) \in R_1 \times R_2$, eine Lösung y und ist das Differential $d_y f(x_0, y_0; \delta y)$ eine auflösbare Linearfunktion von δy , so gibt es eine Kugel $S \subset E_1$ um x_0 und eine analytische Funktion $\varphi(x)$ auf S mit Werten in E_2 , so daß $y = \varphi(x)$ die einzige Lösung von (1) auf S ist mit $y_0 = \varphi(x_0)$. Es wird ein rekursives Berechnungsverfahren für $\varphi(x)$ angegeben. Dieser Satz über implizite Funktionen wird benützt zum Beweise des folgenden Satzes über Differentialgleichungen (2) $dy/d\tau = x(\tau, y)$, τ reell, y und $x(\tau, y)$ Elemente eines komplexen Banachraumes B . Es sei I das Intervall $|\tau - \tau_0| \leq \chi$, S die Kugel $\|y - y_0\| \leq \beta$ in B , X der Banachraum aller $x(\tau, z)$, die auf $I \times S$ definiert sind und Werte in B haben, stetig auf $I \times S$ sind, beschränkt in B sind und analytisch in z für jedes τ ; die Norm ist $\|x\| = \sup_{I \times S} \|x(\tau, z)\|_B$. Es sei ferner Y der Banachraum aller auf I stetigen Funktionen mit Werten in B und der Norm $\|y\| = \sup_I \|y(\tau)\|$. Es wird bewiesen, daß die Lösung $y(\tau)$ von (2) mit $y(\tau_0) = y_0$ als Funktion der rechten Seite $x(\tau, z) \in X$ mit Werten in Y eine in x analytische Funktion ist in der Nachbarschaft eines $\bar{x} = f(\tau, y)$.

G. Köthe.

Hille, Einar: Une généralisation du problème de Cauchy. Ann. Inst. Fourier 4, 31–48 (1954).

Die Abhandlung bildet eine Weiterführung der Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 49, 90) über die Behandlung des Cauchy-Problems mit Hilfe von Halbgruppen in Banach-Räumen. Definitionen: U ein linearer Operator im komplexen Banach-Raum Y mit der Norm $\|\cdot\|$; $D(U)$, resp. $W(U)$ der Definitionsbereich, resp. Wertevorrat von U ; $g(t) = U(t)$ heißt vom Normaltypus ω , wenn $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|g(t)\| = \omega < \infty$; $y^{(*)}(t) = \frac{d^* y}{dt^*}$ bedeutet die starke Ableitung k -ter Ordnung von y . — Es werden mit Hilfe der Theorie der Halbgruppen des Verf. die folgenden Eindeutigkeits- und Existenzsätze bewiesen: 1. Voraussetzung: U linear, U^n abgeschlossen, die Eigenwerte von U sind nicht dicht in keiner Halbebene $\Re(z) \geq \lambda_0$, $y_0, \dots, y_{n-1} \in Y$. Behauptung: Es existiert höchstens eine Lösung des Anfangswertproblems: (1) $y^{(n)}(t) = U^n[y(t)]$

$t > 0$, (2) $\lim_{t \rightarrow 0} \|y^{(k)}(t) - y_k\| = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, so daß $y^{(n-1)}(t)$ vom Normaltypus ist. — 2. Voraussetzung: Das Problem (1), (2) für $n = 1$ besitzt eine einzige Lösung $y(t) = y(t; y_0)$, wobei $\|y(t; y_0)\| \leq M e^{\omega t} \|y_0\|$, $t > 0$. Behauptung: Es existiert eine Resolvente $R(\lambda; U)$ für $\Re(\lambda) > 0$; U ist eine infinitesimale Erzeugende einer Halbgruppe $T(t)$, wobei $y(t; y_0) = T(t)y_0$. — 3. Voraussetzung: U erzeugt eine im Nullpunkt stetige Gruppe $\{T(t|U), -\infty < t < \infty\}$, wobei $T(0|U) = I$; $y_0 \in D(U^2)$, $y_1 \in D(U) \cap W(U)$.

Behauptung: Das Problem (1), (2) hat für $n = 2$ eine einzige Lösung $y(t)$, wobei $y(t)$ vom Normaltypus ist, und zwar:

$$y(t) = \frac{1}{2} [T(t|U)(y_0 + z_1) + T(-t|U)(y_0 - z_1)], \quad U z_1 = y_1.$$

Es wird gezeigt, daß im Falle $n > 2$ über die Anfangswerte für die Ableitungen $y^{(m)}$ ($m \leq n$) im allgemeinen nicht beliebig verfügt werden darf (Defekt: $d = n - m$). Es wird durch einen Satz die Abschätzung des Defekts d ermöglicht. Diese Theorie wird erläutert an einer Reihe leider nicht allzu interessanter Beispiele aus dem Gebiete der partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

K. Maurin.

Guy, Roland: Sur l'existence des solutions de systèmes finis d'équations fonctionnelles non linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 229–231 (1954).

Es sei \mathfrak{A} ein unitärer voller A -Modul, in welchem eine Abstandsfunktion d definiert ist. F_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) seien nichtlineare Transformationen in \mathfrak{A} . Es wird die nichtlineare Funktionalgleichung (*) $U_i = U_i^0 + \lambda \sum_{j=1}^n F_{ij}(U_j)$ betrachtet (U_i und U_i^0 sind Elemente aus \mathfrak{A}). Verf. wendet die Methode der sukzessiven Approximation zur Lösung von (*) an: $U_i^{(0)} = U_i^0$; $U_i^{(k)} = U_i^0 + \lambda \sum_{j=1}^n F_{ij}(U_j^{(k-1)})$. Ist der Bereich der Transformierten der Elemente U durch F_{ij} eine Teilmenge des Bereiches der U , ist ferner die Lipschitz-Bedingung $d[F_{ij}(U') - F_{ij}(U'')] \leq |f_{ij}| \cdot d[U' - U'']$ erfüllt, so ist nach dem vom Verf. bewiesenen Satze die Reihe $U_i = U_i^{(0)} + \sum (U_i^{(k)} - U_i^{(k-1)})$ konvergent bezüglich der Metrik d und liefert die einzige Lösung von (*), falls der absolute Betrag des Parameterwertes λ genügend klein ist.

St. Fenyő.

Sikkema, P. C.: Function-theoretic researches on differential operators of infinite order. III, IV. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 280–291, 292–305 (1954).

Die in zwei vorangehenden Teilen (dies. Zbl. 52, 127; 55, 109) begonnenen Untersuchungen über Ordnung und Typ der Funktion $h(x) = F(D) \rightarrow y(x)$ werden fortgesetzt und abgeschlossen. $F(D)$ bedeutete dabei einen Differentialoperator unendlicher Ordnung mit konstanten Koeffizienten, dessen erzeugende Funktion $F(z)$ nur endlich viele Nullstellen besitzt, und $y(x)$ eine gegebene ganze Funktion der endlichen Ordnung $\sigma \geq 1$ bzw. vom Maximumtyp der Ordnung 1. Die Ergebnisse sind in vier Sätzen zusammengefaßt, von denen die ersten beiden sich mit dem Fall befassen, daß $y(x)$ vom Normaltyp τ einer Ordnung $\sigma \geq 1$ ist, während die beiden letzten Sätze den Minimumtyp einer Ordnung $\sigma \geq 1$ und den Maximumtyp einer Ordnung $\sigma \geq 1$ behandeln. Eine Schlußbemerkung bezieht sich auf den Fall, daß die erzeugende Funktion $F(z)$ des Differentialoperators unendlich viele Nullstellen besitzt.

H.-J. Kowalsky.

• **Paasche, Ivan:** Über das Verhalten der Integrale homogener und inhomogener Summengleichungen im Unendlichen. München-Düsseldorf: Verlag R. Oldenbourg 1954, 59 S.

Die Ausführungen des Verf. haben zum Ziele, einen möglichst genauen Einblick in die Lösungsmannigfaltigkeit der sog. Summengleichungen (Bezeichnung von Horn)

$$(1) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\nu\mu} x_{\nu+\mu} = c_{\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

zu geben, die unter anderem bei der Lösung von Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung auftreten. Dies wird zunächst (1) bei den Gleichungen mit konstanten Koeffizienten studiert

($a_{\nu\mu} = a_{\mu}$) mittels Koeffizientenvergleichs bei Potenzreihen. An zweiter Stelle wird der von Perron bearbeitete Fall betrachtet (II): $a_{\nu\mu} = a_{\mu} + b_{\nu\mu}$, $a_{\nu 0} \neq 0$, $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\mu}{\nu} a_{\mu} = q^{-1}$, $b_{\nu\mu} \leq b_{\nu} Q^{-\mu}$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} b_{\nu} = 0$, $0 < q < Q$, q, Q passende Konstanten. Die von Horn betrachteten Gleichungen sind Spezialfälle hiervon. Verf. nennt diese Gleichungen „schwach variierend“ mit Bezug auf die Größe der $b_{\nu\mu}$. Drittens betrachtet Verf. den Fall (III), daß die Perronsche Bedingung $\lim_{\nu \rightarrow \infty} b_{\nu}$ durch die schwächere $\lim_{\nu \rightarrow \infty} b_{\nu} \leq B$ mit geeignetem B ersetzt wird („stark variierende Gleichungen“). In II und III wird wie bei Perron sukzessive Approximation benutzt. Ein wichtiges Merkmal für die Einordnung des Lösungen ist die Größenordnung von $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt[\nu]{|x_{\nu}|} = x$ für eine Lösung (x_0, x_1, \dots) . Die Bedingung $a_{\nu 0} \neq 0$ hat zur Folge, daß x nur diskrete Werte annehmen kann. Verf. zeigt insbesondere, daß stets $x \leq c \left(c = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt[\nu]{|c_{\nu}|} \right)$.

Perron bewies: Wenn die charakteristische Gleichung $\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu} z^{\mu} = F(z) = 0$ für $z \leq q$ n Nullstellen besitzt, so ist die allgemeine Lösung unter der Nebenbedingung $x \leq q$ genau n -parametrig. Verf. beweist darüber hinaus ($q = \tilde{q}$ bedeute jetzt den Konvergenzradius von $F(z)$): q_1, \dots, q_t mit den Vielfachheiten e_1, \dots, e_t seien die (verschiedenen) Beträge der Wurzeln von $F(z) = 0$, und es sei $q_i \geq c \geq q_{i+1}$. Dann besitzt (1) unter der Bedingung $x \leq \tilde{q}$ genau eine $(e_1 + \dots + e_t)$ -parametrische Lösung mit $x = c$, und je eine $(e_1 + \dots + e_t)$ -parametrische mit $x = q_{\tau}$ ($\tau = 1, \dots, t$). Bei stark variierenden Gleichungen streuen die Beträge x um die q_{τ} . Bezüglich genauerer Angaben muß auf den Text verwiesen werden. Für kleine B liegen die x nahe bei den q_{τ} . Das Verhalten nähert sich dem geschilderten Verhalten für $B = 0$. G. Tautz.

Hosszú, M.: On the functional equation of autodistributivity. Publ. math., Debrecen 3, 83–86 (1954).

C. Ryll-Nardzewski (dies. Zbl. 38, 210) und B. Knaster (dies. Zbl. 38, 42) fanden die allgemeine streng monotone, stetige, symmetrische Lösung der Funktionalgleichung (1) $M[M(x, y), z] = M[M(x, z), M(y, z)]$. — Ref. löste diese Gleichung ohne Symmetrievoraussetzung für streng monotone und zweimal derivierbare Funktionen [Acta univ. debreceniensis, 1, 117–135 (1954)]. Verf. zeigt, daß aus (1) und der dualen Gleichung $M[z, M(x, y)] = M[M(z, x), M(z, y)]$ unter der Voraussetzung, daß $M(x, y)$ einmal derivierbar ist, die Existenz einer streng monotonen und stetigen Funktion $f(x)$ und einer Konstanten $0 < p < 1$ derart folgt, daß $M(x, y) = f^{-1}[p f(x) + (1-p) f(y)]$. — Der Beweis stützt sich auf die Untersuchung der Abhängigkeit der (als Funktionen von vier Veränderlichen aufgefaßten) Funktionen $M(x, u)$, $M(x, v)$, $M(y, u)$, $M(y, v)$. J. Aczél.

Praktische Analysis:

Rutishauser, Heinz: Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus. Z. angew. Math. Phys. 5, 233–251 (1954).

In dieser Arbeit erörtert und begründet der Verf. ausführlicher den von ihm und E. Stiefel entwickelten Quotienten-Differenzenalgorithmus (abgek.: QD-Algorithmus), und stellt die Beziehungen zur Kettenbruchtheorie und zwei andere Algorithmen her, nämlich dem Biorthogonalisierungsprozeß von Lanczos (abgek.: BO-Algorithmus) und dem Verfahren der konjugierten Gradienten von Stiefel und Hestenes (abgek.: cg-Algorithmus). Einen vorläufigen Bericht über den QD-Algorithmus gab schon E. Stiefel (dies. Zbl. 51, 96), doch sind die Bezeichnungen in der hier vorliegenden Arbeit etwas anders: ausgehend von einer ersten Spalte von s_{ν} -Zahlen ($\nu = 0, 1, 2, \dots$), setzt man $s_1^{(1)} = s_1$, und füllt drei weitere Spalten mit den Zahlen aus: $q_1^{(1)} = s_1^{(1)} \cdot s_1^{(1)}$, $d_1^{(1)} = q_1^{(1)} - q_1^{(1)}$, $s_0^{(1)} = s_1^{(1)}$, $d_1^{(1)}$; analog werden in den folgenden Abschnitten aus den $s_2^{(1)}$ die $s_3^{(1)}$, aus den $s_3^{(1)}$ die $s_4^{(1)}$... gewonnen, jedoch mit der folgenden Abänderung: man berechnet nach den $d_2^{(1)}$ die sogen. modifizierten Differenzen $e_2^{(1)} = d_2^{(1)} \cdot d_1^{(1)+1}$ (wobei $e^{(1)} = d_1^{(1)}$ ist) und dann erst die $s_4^{(1)}$ gemäß $s_4^{(1)} = s_3^{(1)+1} \cdot e^{(1)}$, und so fort. Diesem Algorithmus wird weiter ein Schema von Polynomen $p_{\sigma}^{(v)}(z)$ vom Grad σ (abgek.: P-Schema) wie folgt zugeordnet: $p_0^{(v)} = 1$, $p_{\sigma}^{(v)}(z) = z \cdot p_{\sigma-1}^{(v+1)}(z) - q_{\sigma}^{(v)} \cdot p_{\sigma-1}^{(v)}(z)$ ($v = 0, 1, \dots$; $\sigma = 1, 2, \dots$), wobei die $p_{\sigma}^{(v)}(z)$ bei festem σ eine Spalte bilden. Unter der Voraussetzung, daß alle $s_{\nu}^{(v)} \neq 0$

sind, daß also das QD-Schema existiert, werden die Sätze bewiesen: (1) Sind die s_x durch die Entwicklung $f(z) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s_x}{z^{x+1}}$ gegeben, wo $f(z)$ rational ist und einen Nenner $N(z)$ vom Grad n hat, so verschwinden die n -ten modifizierten Differenzen $e_n^{(r)}$ für alle r , und es sind im zugehörigen P-Schema die Polynome $p_n^{(v)}(z)$ gleich dem Nenner $N(z)$; (2) Umgekehrt: ist $e_n^{(v)} = 0$ ($v = 0, 1, \dots$) für die s -Spalte s_0, s_1, \dots , so ist $f(z) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s_x}{z^{x+1}}$ rational und hat einen Nenner

vom Grad $\leq n$; (3) Ist $f(z) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s_x}{z^{x+1}}$ rational und haben die zugehörigen Pole $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ verschiedene Beträge $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots$, so gilt: $\lim q_\sigma^{(v)} = \lambda_\sigma$, $\lim e_\sigma^{(v)} = 0$ für $v \rightarrow \infty$;

(4) Setzt man $f_v(z) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s_{x+v}}{z^{x+1}}$ ($f_0(z) = f(z)$), so sind die Polynome $p_\sigma^{(v)}(z)$ bei festem v gerade die Näherungsnenner des J -Kettenbruchs:

$$f_v(z) = \cfrac{s_v}{z - q_1^{(v)}} - \cfrac{e_1^{(v)} q_1^{(v)}}{z - q_2^{(v)} - e_1^{(v)}} - \cfrac{e_2^{(v)} q_2^{(v)}}{z - q_3^{(v)} - e_2^{(v)}} - \dots,$$

der seinerseits der „gerade“ Teil des s -Kettenbruchs ist:

$$f_v(z) = \cfrac{s_v}{z} - \cfrac{q_1^{(v)}}{1} - \cfrac{e_1^{(v)}}{z} - \cfrac{q_2^{(v)}}{1} - \cfrac{e_2^{(v)}}{z} - \dots,$$

Für $\sigma = 1$ liefert (3) speziell $\lim q_1^{(v)} = \lambda_1$, d. h. die bekannte Bernoullische Vorschrift zur Gewinnung der absolut größten Wurzel eines Polynoms, und (3) dehnt also diese Methode auf die weiteren Wurzeln aus, wobei für $\sigma > 1$ die Vorschrift $\lim q_\sigma^{(v)} = \lambda_\sigma$ einfach die schon von Aitken herrührende, nur umgeschrieben auf den QD-Algorithmus, ist. (4) liefert für $v = 0$

speziell eine Kettenbruchentwicklung der Ausgangsfunktion $f(z) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s_x}{z^{x+1}}$. Sind die s_x insbesondere die sogen. Schwarzschen Konstanten einer Matrix A in bezug auf zwei Anfangsvektoren

x_0, y_0 in „beliebiger Lage“, so ist die Funktion $f(z) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s_x}{z^{x+1}}$ rational, und ihre Pole sind gleich den Eigenwerten von A , mithin ist Satz (3) anwendbar; daraus erhellt auch, wie sich diese Aufgabe der umfassenderen und schon von Hadamard auf anderem Wege gelösten unter-

ordnet: von einer durch $f(z) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s_x}{z^{x+1}}$ gegebenen Funktion die Pole und eventuell auch die

Residuen zu bestimmen, und tatsächlich gelten manche der oben formulierten Sätze auch dann noch, wenn $f(z)$ für $z \neq 0$ meromorph ist. — Ist nicht mehr stets $s_x^{(v)} = 0$, so stößt man beim

Auffüllen des QD-Schemas zum ersten Male auf ein $s_x^{(v)}$, das $\neq 0$ ist, und es sind zwei Fälle zu unterscheiden: a) $s_x^{(v+1)} \neq 0$, b) $s_x^{(v+1)} = 0$. Im Falle a) wird das QD-Schema vom Element $s_\sigma^{(v)}$ an illusorisch, und es existiert dann auch nicht der in (4) erwähnte J -Kettenbruch für $f_v(z)$. Im Falle b) dagegen kann das QD-Schema dadurch sinnvoll weiter aufgefüllt werden, daß man für die in der unbestimmten Form $0/0$ erscheinenden Quotienten überall 0 einträgt. — Der QD-Algorithmus hängt eng zusammen sowohl mit dem BO- wie mit dem eg-Algorithmus. — Am Schluß zeigt Verf., wie man mit dem QD-Algorithmus auch die Residuen an den Polstellen

$\lambda_1, \lambda_2, \dots$ von $f(z) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s_x}{z^{x+1}}$ bestimmen kann. Über zahlreiche Anwendungen seines ebenso interessanten wie wichtigen Algorithmus will Verf. in kommenden Arbeiten berichten.

E. Mohr.

Rutishauser, Heinz: Ein infinitesimales Analogon zum Quotienten-Differenzen-Algorithmus. Arch. der Math. 5, 132—137 (1954).

Für die Bezeichnungen vgl. man das vorherige Referat. Entsprechend der Analogie zwischen Polynomen und gewöhnlichem Differenzschema einerseits und den Exponentialsummen

$F(t) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v \lambda_v^t$ und dem QD-Schema andererseits gewinnt Verf. durch einen geeigneten Grenzübergang aus dem QD-Schema ein neues Schema als Gegenstück zum Schema der Diffe-

rentialquotienten bei Polynomen. Ausgehend von $s_\sigma = F(xh)$, wo h die feste Schrittweite ist, bildet Verf. das QD-Schema der Zahlen $q_\sigma^{(v)}, d_\sigma^{(v)}, e_\sigma^{(v)}, s_{\sigma+1}^{(v)}$, und aus diesen ein neues Schema der entsprechenden Zahlen: $s_1^{(v+1)} = s_1^{(v)}, Q_\sigma^{(v+1)} = (S_{\sigma-1}^{(v+1)} - S_\sigma^{(v)})/h, S_\sigma^{(v+1)} = (q_\sigma^{(v)} - 1)/h, D_\sigma^{(v+1)} = (Q_\sigma^{(v+1)} - Q_\sigma^{(v)})/h - d_\sigma^{(v)}, h^2, E_\sigma^{(v+1)} = E_\sigma^{(v)} + D_\sigma^{(v)} - e_\sigma^{(v)}/h^2, S_{\sigma+1}^{(v+1)} = E_\sigma^{(v+1)} \cdot S_{\sigma+1}^{(v+1)} = s_{\sigma+1}^{(v+1)} h^{2\sigma}$, und kann hierin anschließend zur Grenze $h \rightarrow 0$ übergehen, wodurch sich das folgende interessante infinitesimale Analogon zum QD-Algorithmus ergibt: Ausgehend von $S_1(t) = F(t)$ berechne man für $\sigma = 1, 2, 3, \dots$ der Reihe nach ($E_0(t) = 0$): $Q_\sigma(t) = S_\sigma'(t)/S_\sigma(t), D_\sigma(t) = Q_\sigma'(t), E_\sigma(t) = D_\sigma(t) - E_{\sigma-1}(t), S_{\sigma+1}(t) = E_\sigma(t) \cdot S_\sigma(t)$. Es erhellt, daß dieser neue Algorithmus nicht auf spezielle Funktionen von der Form $\sum_{v=1}^n c_v \lambda_v^t$ beschränkt ist, und es gelten die Sätze: (1) Genügt die Funktion $F(t)$ einer linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, so ist $E_n(t) = 0$; (2) Ist $F(t) = \sum_{k=1}^\infty c_k e^{\lambda_k t}$ mit $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots \rightarrow -\infty$, so gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} Q_\sigma(t) = \lambda_\sigma$ für $t \rightarrow \infty$. — Ist $s_v = F(a + v h)$, so liefert der Limes $h \rightarrow 0$ für den J -Kettenbruch nach einer Äquivalenztransformation

$$\int_0^\infty F(a+t) e^{-\zeta t} dt = \frac{F(a)}{\zeta - Q_1(a)} - \frac{E_1(a)}{\zeta - Q_2(a)} - \frac{E_2(a)}{\zeta - Q_3(a)} - \dots$$

Ist umgekehrt die Laplacetransformierte $f(\zeta)$ einer Funktion $F(t)$ als J -Kettenbruch gegeben, so kann man über ein unendliches Differentialgleichungssystem auf die Originalfunktion $F(t)$ zurückschließen. Ohne Beweis gibt Verf. noch an, wie man dieses System durch ein numerisch handlicheres, nämlich ein „codiagonales“ ersetzen kann. E. Mohr.

Ludwig, Rudolf: Über Iterationsverfahren für Gleichungen und Gleichungssysteme. I. Z. angew. Math. Mech. 34, 210—225 (1954).

Verf. beschreibt verschiedene Methoden zur Konstruktion von Iterationsverfahren k ter Ordnung (IV_k) für die Lösung einer (i. a. reellen) Gleichung $\Phi(x) = 0$ unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über $\Phi(x)$. Zunächst werden Verfahren der Form $x_{n+1} = f(x_n)$ betrachtet, wo $f(x) = A \Phi(x)$ ein rational aus Φ, Φ', \dots und willkürlichen Funktionen zusammengesetztes Funktional ist; anschließend wird die Verbesserung einer Iterationsfolge (ohne Neuberechnung von Funktionswerten Φ, Φ', \dots) besprochen. In einem Abschnitt über die Verwendung der p -fach iterierten Funktion $f^p(x)$ von $f(x)$ wird bewiesen, daß $x_{n+1} = f^p(x_n)$ die Ordnung k^p hat, falls $x_{n+1} = f(x_n)$ ein IV_k ist. Schließlich wird gezeigt, daß man aus p IV_k : $x_{n+1} = f_i(x_n)$ ($i = 1, \dots, p$) durch eine Linearkombination $F(x) = \sum_{i=1}^p A_i(x) f_i(x)$ stets ein $IV_{p \cdot k-1}$: $x_{n+1} = F(x_n)$ gewinnen kann, falls die $f_i(x)$ linear unabhängig sind. Die meisten Verfahren und ihre Konvergenzgüte werden an Zahlenbeispielen der Form $\Phi(x) = x^n - a = 0$ erläutert. Zum Schluß sind die 27 hergeleiteten Iterationsformeln in einer Tabelle zusammengestellt, unter Angabe ihrer Ordnung und der für einen Iterationsschritt benötigten Multiplikationen. J. Weissinger.

• **Allen, D. N. de G.:** Relaxation methods. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1954. VII, 257 p. 53/6 s.

Das Hauptziel des Buches ist, dem Leser die Praxis und Technik des „Relaxierens“ zu zeigen. Der Leser soll Meister in der Methode, aber nicht Sklave der Methode, soll keine Rechenmaschine in Menschengestalt werden. Verf. beschränkt sich, um dies möglichst gut vor Augen zu führen, bewußt auf die einfacheren Fälle und läßt insbesondere auch nichtlineare Aufgaben fort. An Hand linearer Gleichungssysteme werden die Begriffe des Residuums, der Operations- und Relaxationstafel, Block- und Gruppenrelaxation gebracht und dann die Relaxationsmethoden bei mechanischen Netzwerken, bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, bei partiellen Differentialgleichungen $\Delta u + r(x, y) = 0$, $(\gamma \Phi_x)_x + (\gamma \Phi_y)_y + \Phi = 0$, $\Delta \Delta u = 0$ und anderen Gleichungen ausführlich mit Netzverfeinerung, krummlinigen Rändern, Normalableitungen am Rande, Benutzung von Dreiecksnetzen, zweifach zusammenhängenden Bereichen und freien Oberflächen besprochen. Es folgen Eigenwertaufgaben bei algebraischen Gleichungen und Differentialgleichungen. Eine Anfangswertaufgabe bei der Wärmeleitungsgleichung wird auf eine Randwertaufgabe be-

der Stabschwingungsgleichung zurückgeführt und damit der Relaxation zugänglich. Das Buch enthält viele instruktive Zahlenbeispiele (darunter eine räumliche Aufgabe).
L. Collatz.

Agmon, Shmuel: The relaxation method for linear inequalities. Canadian J. Math. **6**, 382—392 (1954).

Sei $l_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i$ ($i = 1, \dots, m$), und sei π_i die Hyperebene $l_i(x) = 0$.

Zwecks Lösung der (verträglichen) Ungleichungen (1) $l_i(x) \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) werde mit beliebigem $x^{(0)}$ gesetzt $x^{(v+1)} = x^{(v)}$, wenn $x^{(v)}$ ein Lösungspunkt von (1) ist, während andernfalls $x^{(v+1)}$ die orthogonale Projektion $\xi^{(v)}$ von $x^{(v)}$ auf die entfernteste Hyperebene π , mit $l_i(x^{(v)}) < 0$ sei. Verf. zeigt die Konvergenz von $x^{(v)}$ gegen eine Lösung y der Ungleichungen mit der Fehlerabschätzung $x^{(v)} - y \leq 2R\theta^v$, wo R der Abstand zwischen $x^{(0)}$ und der nächstgelegenen Lösung ist und $0 < \theta < 1$ nur von (a_{ij}) abhängt. Ferner wird der Zusammenhang dieser „Methode der orthogonalen Projektion“ mit anderen, durch Übertragung aus der Relaxationstheorie linearer Gleichungen sich ergebenden Varianten aufgezeigt, z. B. wird auf die Konvergenz der Folge (2) $x^{(v+1)} = x^{(v)}$ bzw. $x^{(v+1)} = x^{(v)} + \lambda(\xi^{(v)} - x^{(v)})$ gegen eine Lösung für $1 < \lambda < 2$ (Überrelaxation) und für $0 < \lambda < 1$ (Unterrelaxation) hingewiesen.
J. Weissinger.

Motzkin, T. S. and I. J. Schoenberg: The relaxation method for linear inequalities. Canadian J. Math. **6**, 393—404 (1954).

Ebenso wie in der vorstehend referierten Arbeit wird die Konvergenz der Folge (2) gegen eine Lösung von (1) untersucht, aber unter Einschluß des Falles $\lambda = 2$ (Reflexionsmethode), wo also $x^{(v+1)}$ aus einer Nicht-Lösung $x^{(v)}$ durch Spiegelung an der entferntesten Hyperebene π_i hervorgeht. Ist die Dimension r des von der Lösungsmenge aufgespannten linearen Raumes L , gleich n , so bricht die Folge $x^{(v)}$ im Fall $\lambda = 2$ stets (mit einer Lösung $x^k = x^{(k+1)} = \dots$) ab, während sie für $0 < \lambda < 2$ entweder abbricht oder gegen einen Lösungsrandpunkt konvergiert. Im Fall $r < n$ hat man für $0 < \lambda < 2$ wieder Abbrechen oder Konvergenz gegen eine Lösung, während für $\lambda = 2$ die Folge entweder abbricht oder von einem Index ab auf einer festen $(n - r - 1)$ -dimensionalen Kugelfläche liegt, für die L eine Art Achse bildet. Zum Schluß werden entsprechende Ergebnisse für ein unendliches Ungleichungssystem in n Unbekannten hergeleitet, dessen Hyperebenen als Stützflächen einer geschlossenen, beschränkten, konvexen Punktmenge aufgefaßt werden können. Hauptbeweismittel ist der Begriff der Fejer-Monotonie einer Punktfolge p_r bezüglich einer Menge A , welcher $p_r - a \geq p_{r+1} - a$, $r = 0, 1, \dots$ für alle $a \in A$ verlangt.
J. Weissinger.

Abramov, A. A.: Über den Abrundungsfehler bei der Lösung von Systemen linearer Gleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 189—191 (1954) [Russisch].

Betrachtungen über die Abrundungsfehler beim Gaußschen Eliminationsverfahren unter besonderer Berücksichtigung des Falles, daß viele Koeffizienten im Gleichungssystem gleich Null sind.
W. Schulz.

Branstetter, R. Deane: A round-off theory for scalar products. (Abstract of a thesis.) Iowa State College, J. Sci. **28**, 283—284 (1954).

● **Givens, Wallace: Numerical computation of the characteristic values of a real symmetric matrix.** (Mathematics Panel.) Oak Ridge, Tennessee: Oak Ridge National Laboratory 1954. VI, 107 p.

Bei einer gegebenen reellen symmetrischen n -reihigen Matrix A , bzw. quadratischen Form

$\sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_j x_k$ kann man durch eine orthogonale Transformation, und zwar eine Drehung in der (x_j, x_k) -Ebene ($j \neq k$) erreichen, daß der neue Koeffizient a_{jk}^* verschwindet. Bereits Jacobi schlug vor, durch eine geeignete unendliche Folge solcher Transformationen die transformierten Matrizen einer Diagonalmatrix (mit den charakteristischen Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ als Hauptdiagonalelementen) anzunähern, wobei eine an einer Stelle erzeugte 0 durch eine spätere Transformation wieder beseitigt werden kann. Verf. verwendet nun $(n-1)(n-2)/2$ Drehungen der betrachteten Art, mit denen er nacheinander an den Stellen $(1, 3), (1, 4), \dots, (1, n), (2, 4), \dots, (2, n), (3, 5), \dots, (n-2, n)$ Nullen erzeugt, die nicht wieder beseitigt werden. Dafür ergibt sich aber

keine Diagonalgestalt, sondern die Jacobische Form einer transformierten Matrix S mit $s_{ii} = a_i$, $s_{j,j+1} = s_{j+1,j} = b_j$ ($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n-1$), $s_{ij} = 0$ für $|i-j| > 1$. Für diese wird ein rekursiver Aufbau von Funktionen $f_0 = 1$, $f_1 = a_1$, $f_2 = a_1^2 - b_1^2, \dots, f_n(\lambda)$ vorgenommen [$f_n(\lambda)$ ist nicht stets $-\det(S - \lambda E)$]; dann ist die Anzahl $P(\lambda)$ der charakteristischen Zahlen, die $\geq \lambda$ sind, zugleich die Anzahl der Vorzeichenübereinstimmungen bei zwei aufeinanderfolgenden Zahlen der Folge $f_i(\lambda)$, wobei 0 als positiv betrachtet wird. Es wird mit ausführlichen Tabellen, Rechenschemata und Plänen beschrieben, wie man mit Hilfe dieser Sätze bei den modernen Rechenautomaten hoher Geschwindigkeit, insbesondere beim ORACLE (Oak Ridge Automatic Computer and Logical Engine), die Werte λ berechnen kann. Fußend auf der Fehlertheorie von v. Neumann und Goldstine (dies. Zbl. 31, 314) wird der Einfluß der Abrundungsfehler verfolgt und mit Hilfe eines Satzes von Lidskii [NBS Report Nr. 2248 (1953)] über die charakteristischen Zahlen einer Summe von Matrizen eine Fehlerschranke für die charakteristischen Zahlen von S aufgestellt. Die beste der Abschätzungen gibt für die ORACLE bei $n = 100$ für eine Genauigkeit von $\pm 1,004 \cdot 2^{-22}$. Beim Rechnen mit s -stelligen Zahlen und einem Zahlensystem der Basis β (gewöhnlich $\beta = 2$ oder 10) ist für $n > 10$ der Fehler von λ höchstens $3n^{5/2} \beta^{-s}$. Es werden Schätzungen für die benötigte Rechenzeit angegeben. L. Collatz.

Falk, Sigurd: Neue Verfahren zur direkten Lösung des allgemeinen Matrizen-eigenwertproblems. Z. angew. Math. Mech. 34, 289–291 (1954).

Wagner, Harvey M.: A partitioning method of inverting symmetric definite matrices on a card-programmed calculator. Math. Tables Aids Comput. 8, 139–143 (1954).

Die vom Verf. vorgeschlagene Methode zur Inversion einer Matrix A ist als „enlargement method“ bereits bei Dwyer (dies. Zbl. 44, 128) zu finden. Sie besteht darin, daß mit Hilfe der Schurschen Relation nacheinander alle Hauptuntermatrizen von A invertiert werden. — Verf. zeigt sodann, wie man das Verfahren mit Lochkartenmaschinen (speziell IBM-CPC) durchführt. H. Rutishauser.

Dantzig, George B. and Wm. Orchard-Hays: The product form for the inverse in the simplex method. Math. Tables Aids Comput. 8, 64–67 (1954).

In der Simplexmethode zur Auflösung gewisser linearer Ungleichungen (vgl. z. B. van Dantzig, dies. Zbl. 45, 98) tritt die Aufgabe auf, die Inversen $(B_K)^{-1}$ einer Folge quadratischer Matrizen $B_0 B_1 B_2 \dots$ zu berechnen, wobei jeweils B_K aus B_{K-1} durch Abänderung einer einzigen Spalte hervorgeht. Es ist in diesem Fall nicht zweckmäßig, die Inversen $(B_0)^{-1} (B_1)^{-1} (B_2)^{-1}$ usw. unabhängig voneinander zu bilden, sondern man kann $(B_K)^{-1}$ relativ leicht aus $(B_{K-1})^{-1}$ berechnen. — Das vom Verfasser hierzu angegebene Verfahren ist jedoch identisch mit einem Verfahren von Sherman [Nat. Bur. Standards, Appl. Math. Ser. 29, 123–124 (1953)]. H. Rutishauser.

Jenne, Werner: Die Punktdarstellung einer Matrix nach Konrad Friedrich und sein Gitterdeterminanten-Verfahren; Anwendungen und Methodisches. Z. angew. Math. Mech. 34, 294–296 (1954).

Bachmann, K.-H.: Der Konvergenzgrad bei iterativer Lösung von Gleichungen durch inverse Interpolation. Z. angew. Math. Mech. 34, 282–283 (1954).

Lavrent'ev, M. M.: Über eine Abschätzung für die Genauigkeit der Lösung von linearen Gleichungssystemen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 447–448 (1954) [Russisch].

Es sei $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \varepsilon_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), wobei $\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$) oder $\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) gelte. Bedeutet A die Determinante aus den Koeffizienten a_{ij} , so besteht die Ungleichung $\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \leq \left(e \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2\right)^{1/2} / |A|$. Sind in einem inhomogenen System linearer Gleichungen die rechten Seiten bis auf Fehler ε_i bekannt, so sind bei den obigen Normierungen die Lösungen bis auf Fehler $(e \sum \varepsilon_i^2)^{1/2} / |A|$ bestimmt. W. Schulz.

Lavrent'ev, M. M.: Über die Genauigkeit der Lösung von Systemen linearer Gleichungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 34 (76), 259–268 (1954) [Russisch].

Es sei $\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$) oder $\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) und D die Determinante aus den a_{ij} . Betrachtet werden die Gleichungssysteme

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i + \varepsilon_i \quad \text{mit} \quad \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon',$$

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} + \varepsilon_{ij}) x_j = b_i \quad \text{mit} \quad \left(\sum_{i,j} \varepsilon_{ij}^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon''$$

($i = 1, 2, \dots, n$). Die Lösungen seien die n -dimensionalen Vektoren \mathbf{x} , $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}'$ bzw. $\mathbf{x}'' = \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}''$. Verf. beweist:

$$|\Delta \mathbf{x}'| < \sqrt{\varepsilon'}/|D|, \quad |\Delta \mathbf{x}''| < e \left(\sum_{i,j} \varepsilon_{ij}^2 \right)^{1/2} \varepsilon'' \cdot |D| (|D| - \sqrt{\varepsilon'}/\varepsilon'')$$

und zieht hieraus Folgerungen für die Fehler der Lösungen linearer Gleichungen, wenn die Koeffizienten b_i bzw. a_{ij} nur näherungsweise bekannt sind, derart, daß die Summe der Fehlerquadrate unterhalb bestimmter Schranken bleibt.

W. Schulz.

Evans, W. Duane: The effect of structural matrix errors on interindustry relations estimates. *Econometrica* 22, 461—480 (1954).

Auf dem Gebiet der interindustry analysis wird die Fortpflanzung von Fehlern beim Rechnen mit umfangreichen Strukturmatrizen untersucht. Aus der besonderen Eigenschaft der Strukturmatrix A ($I - A$ ist eine sog. Leontief-Matrix, deren Kehrmatrix nur nichtnegative Elemente besitzt) ergibt sich, daß Fehler in den Elementen der Matrix oder in den gegebenen Daten nicht zur Aufhäufung neigen, sondern sich kompensieren. Dabei werden verschiedene Möglichkeiten des Auftretens von Fehlern erörtert. Aus den Ergebnissen werden praktische Folgerungen gezogen.

R. Zurmühl.

Rahman, A.: Numerical evaluation of determinants. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci. V. Sér.* 40, 798—801 (1954).

● **Sinden, Frank W.:** An oscillation theorem for algebraic eigenvalue problems and its applications. *Mitt. Inst. angew. Math. techn. Hochschule Zürich* Nr. 4, 57 p. (1954).

Es sei $V(X)$ die Zahl der Zeichenwechsel in der reellen Folge $X = (x_1, \dots, x_n)$, wobei etwaige Nullen unter den x_p außer acht zu lassen sind. $A X = Y$ sei eine lineare Transformation; dabei heißt die Matrix $A = (a_{jk})$ variationsvermindernd (bzw. -vermehrend), wenn für jedes X gilt $V(Y) \leq V(X)$, (bzw. $V(Y) \geq V(X)$). Z. B. ist der Übergang von der Folge x_1, \dots, x_n zu $x_1, (x_1 + x_2)/2, (x_2 + x_3)/2, \dots, (x_{n-1} + x_n)/2, x_n$ variationsvermindernd. Beim Übergang zur Differenzenreihe $D = (x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$ gilt $V(D) \geq V(X) - 1$, ferner im Falle $x_1 = x_n = 0$, $X \not\equiv 0$ sogar $V(D) \geq V(X) + 1$, und schließlich $V(D) \geq V(X)$, falls x_i oder x_n gleich null ist. In der Eigenwertaufgabe $A X = \lambda X$ sei A eine n -reihige symmetrische positiv definit variationsvermindernde (bzw. -vermehrende) Matrix mit $a_{j,j+1} \neq 0$, $a_{j+1,j} \neq 0$ (für $j = 1, \dots, n-1$) und D eine Diagonalmatrix mit positiven Elementen. Dann gelten die klassischen Sturm-Liouvilleschen Sätzen analogen Aussagen: Alle Eigenwerte λ_j sind positiv und einfach, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$. Ein zu λ_k gehöriger Eigenvektor hat genau $k-1$ (bzw. $n-k$ bei variationsvermehrender Matrix) Zeichenwechsel. Für einen Eigenvektor $U = (u_1, \dots, u_n)$ ist $u_1 \neq 0$, $u_n \neq 0$, $u_p = 0$ nur dann, wenn $u_{p-1} u_{p+1} < 0$ ist. Verf. wendet diese Sätze an auf den transversal schwingenden, inhomogenen Stab bei verschiedenen Arten der Lagerung, insbesondere auch auf den mehrfach gestützten und den mehrfach gelenkig gegliederten Stab. Allgemein führt für einen Differentialoperator gerader Ordnung

$$(d/dx) \{ p_{\mu-1} (d/dx) \{ \dots \{ p_1 d/dx \} \dots \} \} \quad \text{mit} \quad p_k(x) = p_{\mu-k}(x)$$

bei gewissen weiteren Voraussetzungen (über die hinzukommenden Randbedingungen usw.) der zugehörige Differenzenoperator zu einer variationsvermehrenden Matrix. Bei Benutzung eines Einschließungssatzes kann man durch Abzählung der Zeichenwechsel jeweils die Nummer der Differenzeigenwerte festlegen.

L. Collatz.

Lozinskij, S. M.: Über das Existenzintervall der Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 94, 17—19 (1954) [Russisch].

Für die Lösung eines Systems von Differentialgleichungen $dy_v/dt = f_v(t, y_1, \dots, y_n)$, $v = 1, 2, \dots, n$ [kurz: $dy/dt = f(t, y)$], wo die Funktionen f_v reelle Werte annehmen und zusammen mit ihren ersten partiellen Ableitungen

$f_{\nu\mu} = \partial f_{\nu} / \partial y_{\mu}$ in einem Gebiet G des R_{n+1} der Veränderlichen t, y_1, \dots, y_n stetig sind, werden Sätze mitgeteilt, die in derselben Richtung liegen wie die einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 51, 349). Z. B. gilt mit denselben Bezeichnungen wie dort: $A(t)$ sei eine reelle, für $t_0 \leq t \leq T$ stetige Matrix und genüge den Bedingungen $R: \{Q(t, v)\}_{r\mu} = \{A(t)\}_{r\mu}$ ($r = 1, 2, \dots, n$), $\{Q(t, v)\}_{r\mu} = \{A(t)\}_{r\mu}$, $r \neq \mu$ ($v, \mu = 1, 2, \dots, n$) für $t_0 \leq t \leq T$, $(t, v) \in G^* \subset G$, wobei G^* den Punkt (t_0, v^0) und die Kurve $v = \vartheta(t)$, $t_0 \leq t \leq T$ enthalte. Es sei $d\varepsilon/dt = A(t)\varepsilon + \zeta(t)$, so daß $\|\varepsilon\| = \varepsilon(t_0)$. Wenn für alle t, v , die den Bedingungen $t_0 \leq t \leq T$, $|v - \vartheta(t)| \leq |\zeta(t)|/\varepsilon(t)$ genügen, $(t, v) \in G^*$ gilt, dann existiert die Lösung $v(t)$ von $dv/dt = f(t, v)$, die der Anfangsbedingung $v(t_0) = v^0$ genügt, für $t_0 \leq t \leq T$, und es ist dort $|v(t) - \vartheta(t)| \leq |\zeta(t)|/\varepsilon(t)$. Insbesondere liegt $v = v(t)$ in G^* . W. Schulz.

Loziński, S. M.: Über eine Näherungslösung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 29–32 (1954) [Russisch].

Die Arbeit schließt sich an zwei frühere (dies. Zbl. 51, 349 und vorstehendes Ref.) an und enthält zwei Abschätzungen, die für die Anwendung einfacher sind als die früheren.

W. Schulz.

Fox, L.: A note on the numerical integration of first-order differential equations. Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 367–378 (1954).

Nach Diskussion der bei den Differenzenschemaverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung $y' = f(x, y) = 0$ oft auftretenden Aufspaltung in zwei Folgen von Näherungswerten y_{2r} und y_{2r+1} (deren jede für sich ein ruhiges Differenzenschema zeigt), empfiehlt Verf. nach dem Vorschlage von Allen-Severn (Rückführung auf eine Randwertaufgabe, dies. Zbl. 42, 334), die durch Differentiation aufgestellte Gleichung $y'' - f y - f_x = 0$ nach der bekannten, drei Stellen $r-1, r, r+1$ benutzenden Mehrstellenformel zu behandeln. Dabei muß man entweder am Anfang oder am Ende des Gesamtintervalls (am Ende, falls man eine Technik nach Art der Relaxation verwenden will), eine andersartige Mehrpunktformel verwenden. Ausführliches Zahlenbeispiel $y' = y$, $y(0) = 1$.

L. Collatz.

Popov, E. P.: Zur angenäherten Untersuchung der Eigenschwingungen und erzwungener Schwingungen nicht-linearer Systeme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 943–946 (1954) [Russisch].

Die vorliegende Mitteilung bezweckt offenbar mehr die Verbreitung eines schon bewährten heuristischen Verfahrens, als daß sie mathematisch gesicherte Ergebnisse bringt; betreffs einiger Anläufe zu strengen Untersuchungen wird auf Literatur verwiesen, darunter auf Moskauer Diss. von A. M. Letov (1945), und L. S. Goldfarb (1947). — Verf. betrachtet Systeme mit zwei Veränderlichen $x_1(t), x_2(t)$, deren Anzahl habe sich erweitert, zwischen denen einerseits eine lineare Differentialbeziehung $(1) Q(p)x_1 = R(p)x_2$ besteht, mit $p = d/dt$ und $Q(u), R(u)$ als Polynomen in u mit festen Beiwerten; andererseits sollen sie durch eine nichtlineare Beziehung $(2) F(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \dots, x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2, \dots) = 0$ verknüpft sein. Es soll nun möglich sein, (2) näherungsweise durch eine lineare Beziehung $(3) G_1(p)x_1 = G_2(p)x_2 = 0$ zu ersetzen, wobei $G_1(u), G_2(u)$ Polynome in u sind, deren Beiwerte jedoch von der Amplitude a und der Frequenz ω einer für x_1 oder x_2 anzusetzen einfachen Sinusschwingung abhängen dürfen. Für die andere der beiden Veränderlichen ergibt sich der Amplitudenfaktor und die Phasendifferenz gleichzeitig mit der Aufstellung der Funktionen G_1, G_2 . Verf. unterscheidet mehrere Klassen nichtlinearer Beziehungen (2) und gibt für einige Beispiele an, wie diese „harmonische Linearisierung“ durchzuführen sei. Es handelt sich um die bei der näherungsweisen Behandlung solcher Systeme übliche Ersetzung nichtlinearer Ausdrücke durch die Grundschrwingungskomponente bei irgendwie angenommener Amplitude und Frequenz. (Vgl. z. B. A. Blaquiére, dies. Zbl. 49, 69.) Zur ersten Klasse gehören etwa Ausdrücke wie $x_2 = F(x_1, \dot{x}_1)$, welche durch $x_2 = q_0(a, \omega)x_1 + q_1(a, \omega)\omega^{-1}\dot{x}_1$ ersetzt werden. Auch hysteresisartige (zweiwertige) nichtlineare Beziehungen und solche mit verschobenem Zeitargument lassen sich durch Hinzunahme einer Ableitung in dieser Weise behandeln. Zusammenfassung der linearen Gleichungen (1), (3) führt dann auf eine charakteristische Gleichung $L(a, \omega, p) = 0$, die sich nach Einführung von $p = i\bar{\omega}$ in Real- und Imaginärteil spaltet: $X(a, \omega, \bar{\omega}) = 0$, $Y(a, \omega, \bar{\omega}) = 0$. Für $\omega = \bar{\omega}$ ergeben sich zwei Kurven $X = 0$, $Y = 0$, deren Schnittpunkt näherungsweise die Dauerschwingung (a_0, ω_0) bestimmt. — Auch das entsprechende Verfahren für erzwungene Schwingungen wird kurz dargestellt. Zur Stabilitätsuntersuchung wird auf das von B. V. Bulgakov benutzte „Verfahren

der periodischen Koeffizienten“ verwiesen [Priklad: Mat. Mech. 6, 263—280 (1942)] oder auf das Kriterium $\partial(X, Y)/\partial(a, \bar{\omega}) > 0$.
U. T. Bödewadt.

Bogdanoff, J. L., J. E. Goldberg and Hsu Lo: Application of Volterra linear integral equations to the numerical solution of vibration problems. II. J. aeronaut. Sci. 21, 383—388, 403 (1954).

Es wird in bekannter Weise einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung eine Volterrasche Integralgleichung für die höchste vorkommende Ableitung $y^{(n)}$ als unbekannte Funktion $Y(x)$ zugeordnet und diese schrittweise angenähert integriert, indem $Y(x)$ im Integral durch eine intervallweise lineare Funktion ersetzt wird. (Vgl. die frühere Arbeit der Verf., Proc. 1. Midwest. Conference Solid Mechanics, April 1953 mit Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.) Es folgen 3 numerische Beispiele von Trägerschwingungen (2 Beispiele mit Torsionsschwingungen, 1 mit Biegeschwingungen).
L. Collatz.

Müller, R.: Lösung spezieller gewöhnlicher Differentialgleichungen durch unendliche Operatoren. Anwendung auf das ballistische Problem. Z. angew. Math. Mech. 34, 273—274 (1954).

Das Verfahren der sukzessiven Approximationen zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen kann bei einfach gebauten Gleichungen manchmal durch eine independente Darstellung der Lösung ersetzt werden, die Verf. als Lösung durch unendliche Operatoren bezeichnet. Z. B. hat $y' = \psi(x) \int y + f(x)$, $y(0) = 0$ für $y \geq 0$ die Lösung

$$y = F + \int_0^x \psi \sqrt{F + \int_0^x \psi \sqrt{F + \dots} dx} dx \text{ mit } F(x) = \int_0^x f(x) dx.$$

Die Hauptgleichungen der äußeren Ballistik $\dot{r} = -c f(r) - g \sin \theta$, $r \dot{\theta} = -g \cos \theta$ kann man so umformen, daß man auf das angeführte Beispiel kommt.

W. Schulz.

Rapoport, I. M.: Über eine Näherungsmethode bei einer eindimensionalen Randwertaufgabe. Ukrain. mat. Žurn. 6, 202—217 (1954) [Russisch].

Verf. zieht zur näherungsweisen Berechnung von Eigenwerten und zugehörigen Eigenfunktionen eines Systems linearer homogener Differentialgleichungen $v'(x) = \mathfrak{A}(x, \lambda) v(x)$ ($0 < x < l$) mit den Randbedingungen $\mathfrak{B}(\lambda) v(0) + \mathfrak{C}(\lambda) v(l) = 0$ die Folge von Näherungsformeln ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-1)!(2n-r-1)!(b-a)^{r+1}}{(2n-1)!(r+1)!(n-r-1)!} [f^{(r)}(a) + (-1)^r f^{(r)}(b)]$$

heran, wobei Existenz und Stetigkeit genügend hoher Ableitungen der auftretenden Funktionen vorausgesetzt wird.

W. Schulz.

Zadiraka, K. V.: Ein Verfahren zur Berechnung oberer und unterer Näherungen für die Eigenwerte einer Randwertaufgabe zweiter Ordnung. Ukrain. mat. Žurn. 6, 190—201 (1954) [Russisch].

Die Randwertaufgabe $(d/dx)[p(x) dz/dx] + [\lambda g(x) - l(x)] z = 0$, $z'(a) - h_1 z(a) = 0$, $z'(b) - h_2 z(b) = 0$, h_1, h_2 Konstanten > 0 , p, g, l Funktionen von x in $a \leq x \leq b$, $p(x) > 0$, $l(x) \geq 0$ kann auf verschiedene Weise übergeführt werden in eine Randwertaufgabe erster Ordnung und eine Quadratur, z. B.:

$$\vartheta' = \sqrt{(\lambda g - l)/p} + \frac{1}{4} (d/dx) \ln p (\lambda g - l) \sin 2\vartheta,$$

$\vartheta(a) = \vartheta_a$, $\vartheta(b) = \vartheta_b + k\pi$ ($0 \leq \vartheta_a \leq \pi$, $0 < \vartheta_b \leq \pi$), $z' = z \sqrt{(\lambda g - l)/p} \operatorname{ctg} \vartheta$ oder:
 $\vartheta' = p^{-1} \cos^2 \vartheta + (\lambda g - l) \sin^2 \vartheta$, $\vartheta(a) = \vartheta_a$, $\vartheta(b) = \vartheta_b + k\pi$, $z' = z (1/p + l - \lambda g) \sin \vartheta \cos \vartheta$,
oder: $\vartheta' = (\lambda g - l)/p - (p'/p) \vartheta + \vartheta^2$, $\vartheta(a) = -h_1$, $\vartheta(b) = h_2$, $z' = -z \vartheta$.

Durch Abschätzungen der Eigenwerte dieser Aufgaben gelangt man zu Abschätzungen der Eigenwerte für die Gleichung zweiter Ordnung. Das Verfahren ist zwar mühsamer als andere, erweist sich aber als brauchbar, wenn man Schranken für die höheren Eigenwerte sucht.

W. Schulz.

Schröder, J.: Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung für lineare Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. *Z. angew. Math. Mech.* **34**, 140–149 (1954).

Mit der vorliegenden Note ergänzt Verf. seine Arbeit, dies. Zbl. **51**, 92, zum Thema der Fehlerabschätzungen für die Störungsrechnung nach der Seite der praktischen Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter und vierter Ordnung. Vor allem gibt Verf. für die wichtigsten Typen derartiger Eigenwertaufgaben Funktionen $Q(\xi, \eta)$ an, die mit $\|A_1 u\| \leq Q(u, A_0 u)$ (A_0 ungestörter Operator, $A_0 + \varepsilon A_1$ gestörter Operator) den Ausgangspunkt der Abschätzungen bilden. Mit Hilfe der Greenschen Funktionen erhält Verf. weiter aus den Schranken für die Approximation der Eigenlösungen im quadratischen Mittel solche bezüglich gleichmäßiger Approximation. Der Rechnungsgang wird an Hand charakteristischer Beispiele erläutert. *F. W. Schürke.*

Todd, John: The condition of certain matrices. II. *Arch. der Math.* **5**, 249–257 (1954).

(Teil I, dies. Zbl. **34**, 376.) Verf. gibt Abschätzungen für die „Bedingungszahl“ $P(A)$ einer symmetrischen positiv definiten Matrix A [Matrizen A mit kleinem $P(A)$ sollen, kurz ausgedrückt, bei numerischer Rechnung bequem umkehrbar sein] bei den aus einer Randwertaufgabe $y^{IV} = k y$ mit gegebenen Randwerten von y, y'' oder y, y' entstehenden gewöhnlichen Differenzengleichungen. Arbeitet man mit dem Maß $P(A) = \lambda(A) \mu(A)$ (Quotient aus der größten und kleinsten charakteristischen Zahl von A), so wird bei Einteilung des Grundintervalls in n Teile $P(A) = O(n^4)$, also wesentlich ungünstiger als bei Differentialgleichungen 2. Ordnung. Die gleiche Erscheinung zeigt sich bei partiellen Differentialgleichungen.

L. Collatz.

Dettmar, H.-K.: Symmetrisierbare Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. *Z. angew. Math. Mech.* **34**, 284–287 (1954).

Geschino, Francis: Critère d'utilisation du procédé de Runge-Kutta. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 1553–1555 (1954).

Verf. dehnt seine Betrachtungen (vgl. dies. Zbl. **55**, 113) auf Systeme von Differentialgleichungen aus. *W. Schulz.*

Dyer, Walter G.: Approximate solution of boundary value problems. I: by minimization of the least square error. II: by use of finite differences. (Abstract of a thesis.) *Iowa State College, J. Sci.* **28**, 304–305 (1954).

Grunsky, Helmut: Eine Methode zur Lösung von Anfangswertproblemen bei gewöhnlichen und partiellen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *Z. angew. Math. Mech.* **34**, 291–292 (1954).

Forsythe, George E.: Asymptotic lower bounds for the frequencies of certain polygonal membranes. *Pacific J. Math.* **4**, 467–480 (1954).

In einem quadratischen Gitter sei R ein einfach zusammenhängender Bereich, der aus einer endlichen Anzahl von Gitterquadraten und „Halbquadraten“ (rechtwinkeliges Dreieck mit 3 Ecken eines Gitterquadrates als Eckpunkten) besteht. Es sei λ der kleinste Eigenwert von $\Delta u + \lambda u = 0$ bei der Randbedingung $u = 0$ auf dem Rande von R mit der Eigenfunktion $u(x, y)$ und λ_h der kleinste Eigenwert bei der zugehörigen Differenzenaufgabe bei einem Gitter der Seitenlänge h . Ist R ein konvexes Polygon, treten also nur Innenwinkel $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ auf, so gilt für $h \rightarrow 0$ die asymptotische Formel

$$\frac{\lambda_h}{\lambda} \leq 1 - \frac{h^2 a}{12} + o(h^2) \quad \text{mit} \quad a = \frac{\iint_R (u_x^2 + u_y^2) dx dy}{\iint_R (u_x^2 + u_y^2) dx dy}.$$

Für genügend kleine h ist also λ_h eine untere Schranke für λ . Das Verhalten von u und seinen Ableitungen in der Nahe der Ecken wird genauer untersucht. An den 45° - und 90° -Ecken ist u analytisch, an den 135° -Ecken hat Δu den Grenzwert 0. Ein numerisches Beispiel eines nicht konvexen Bereiches (Sechseck mit 5 Winkeln von 90° und einen Winkel von 270°) bestärkt den Verf. in seiner Vermutung, daß $\lambda_h > \lambda$ bei nicht konvexem R und genügend kleinem h gilt. *L. Collatz.*

Mikeladze, Š. E.: Über eine Näherungslösung des Cauchy'schen Problems. Priklad. Mat. Mech. 18, 245—249 (1954) [Russisch].

Angenäherte Lösung der Gleichung $\partial^n u / \partial t^n = F(t, x_1, \dots, x_p, u, \dots, \partial^m u / \partial t^m, \partial x_1^{x_1}, \dots, \partial x_p^{x_p})$ ($\alpha_0 < n$; $m \leq n$) mit den Anfangsbedingungen $\partial^k u(0, x_1, \dots, x_p) / \partial t^k = \varphi_k(x_1, \dots, x_p)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) unter Benutzung von Darstellungen der Ableitungen in der Form

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(r h, x_1, \dots, x_p) = \sum_{\lambda=0}^{n-k-1} \frac{(r h)^\lambda}{\lambda!} q_{k-\lambda}(x_1, \dots, x_p) + \frac{h^{n-k}}{(n-k-1)!} \int_0^r (r-t)^{n-k-1} F\left(t h, x_1, \dots, x_p, u, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{x_1} \dots \partial x_p^{x_p}}(t h, x_1, \dots, x_p)\right) dt$$

und von Quadraturformeln (Cotes oder Simpson). Betrachtung der p -dimensionalen Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ mit den Anfangsbedingungen

$$u|_{t=0} = f(x_1, \dots, x_p), \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = g(x_1, \dots, x_p). \quad W. Schulz.$$

Sauljev, V. K.: Über das Aufsuchen von Eigenwerten nach der Netzmethode. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 1003—1006 (1954) [Russisch].

Verf. will die Eigenwerte von $\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - (a - \lambda) u = 0$ in Q , $u = 0$ auf I (Q ein m -dimensionales Gebiet, I eine $(m-1)$ -dimensionale Begrenzung, a_i und a positive, genügend oft stetig differenzierbare Funktionen der x_i) abschätzen und betrachtet dazu das algebraische Analogon der Aufgabe in einem Parallelepipednetz. Durch lineare Interpolation bei der Übertragung der Randwerte auf den Netzrand wird die Abschätzung von zweiter Ordnung bezüglich der Schrittweite.

W. Schulz.

Fehlberg, Erwin: Bemerkungen zur numerischen Behandlung des Dirichletschen Problems für allgemeine Ränder. Acta math. 91, 51—74 (1954).

Das vom Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 46, 138) angegebene Verfahren zur Lösung des Dirichletschen Problems für Rechteck- und Ellipsenrand wird hier auf den Fall beliebiger doppelpunktfreier Randkurve erweitert. Der Randkurve wird eine Ellipse umschrieben, die zum Einheitskreis verzerrt wird. Die Lösung erfolgt dann durch Überlagern einer Näherung, die auf dem Kreisrand die radial verschobenen Werte der Randkurve annimmt, und einer Zusatzlösung der homogenen Gleichung, die den Fehler der Näherung auf dem ursprünglichen Rande in einem System diskreter Punkte nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgleicht. Wie in der ersten Arbeit wird die Lösung in Form einer nach Legendreschen Polynomen fortschreitenden Doppelreihe entwickelt, deren Koeffizienten sich aus linearen Gleichungssystemen berechnen lassen. Im Falle symmetrischer Randkurven erfährt die Rechnung wesentliche Vereinfachungen. Ein Zahlenbeispiel läßt die Güte der Näherung erkennen.

R. Zurmühl.

Riley, James D.: Iteration procedures for the Dirichlet difference problem. Math. Tables Aids Comput. 8, 125—131 (1954).

Zur Lösung der Differenzengleichungen, die $4u = 0$ in einem quadratischen Gitter $x = j h$, $y = k h$ ($j, k = 0, \pm 1, \dots$) mit der Maschenweite h entsprechen, schlägt Verf. das Iterationsverfahren vor

$$\Phi_{j,k}^{(n+1)} = \alpha [\Phi_{j-1,k}^{(n)} + \Phi_{j+1,k}^{(n)} + \Phi_{j,k-1}^{(n)} + \Phi_{j,k+1}^{(n)}] + (1 - 4\alpha) \Phi_{j,k}^{(n-1)},$$

wobei $\Phi_{j,k}^{(n)}$ die n -te Näherung im Gitterpunkt j, k bedeutet ($n = 1, 2, \dots$); für $\alpha = 1/4$ erhält man das gewöhnliche Liebmannsche Mittelungsverfahren. Es ist aber für die Konvergenz günstiger, nicht $\alpha = 1/4$ zu verwenden, sondern α aus

$(\alpha t_{\max})^2 - 4\alpha + 1 = 0$ zu ermitteln, wobei t_{\max} der größte Differenzeigenwert für den betreffenden Bereich ist. t_{\max} kann mit Hilfe des Rayleighschen Quotienten für eine geschätzte Differenzeigenfunktion angenähert werden, soll aber eher zu groß als zu klein abgeschätzt werden: man kann sich bei jedem Iterationsschritt auf die Hälfte der Gitterpunkte, z. B. auf gerade Werte von $n = j = k$, beschränken.

L. Collatz.

Volkov, E. A.: Über ein Verfahren zur Erhöhung der Genauigkeit der Netz-methode. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **96**, 685—688 (1954) [Russisch].

Arbeiten von L. Fox (dies. Zbl. **34**, 221) und L. C. Woods (dies. Zbl. **41**, 78) enthalten ein Iterationsverfahren zur Verbesserung einer nach der Differenzenmethode gefundenen Näherungslösung der Dirichletschen Aufgabe für die Poissonsche Gleichung. Verf. gibt Sätze über die Konvergenz und die Güte des Iterationsprozesses an.

W. Schulz.

Volkov, E. A.: Fehlerabschätzungen bei der Lösung des Dirichletschen Problems für die Laplacesche Gleichung mit der Netz-methode. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **96**, 897—899 (1954) [Russisch].

Verf. stellt Fehlerabschätzungen zusammen, wenn der Laplacesche Operator durch den Differenzenoperator $\Delta_h u_{i,j} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}$ ersetzt wird. Die erste von Gerschgorin stammende Abschätzung aus dem Jahre 1927 ergab als Größenordnung für den Fehler durch Verwendung der Differenzengleichung h^2 und durch die Änderung des Randes h . Collatz verbesserte den zweiten Fehler 1933 auf h^2 . Es wird bemerkt, daß Gitterpunkte in der Nähe des Randes weniger Einfluß auf das Anwachsen des Fehlers haben als weiter entfernt liegende. Dadurch lassen sich Fehlerabschätzungen unter schwächeren Voraussetzungen als bei Gerschgorin finden. Ferner werden Sätze genannt, die auf Fehler von der Größenordnung $h^2(\ln h + 1)$ führen.

W. Schulz.

Schröder, Johann: Zur Lösung von Potentialaufgaben mit Hilfe des Differenzenverfahrens. Z. angew. Math. Mech. **34**, 241—253 (1954).

Bei Gleichungssystemen der speziellen Form $(1) -\alpha u_i + \sum_{k=1}^n b_{ik} u_k + r_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$ mit $b_{ik} = 0$ für $i \leq l, k \leq l$ und $i > l, k > l$ kann man auf einfache Weise ein reduziertes Gleichungssystem für nur l Unbekannte aufstellen. Dieses läßt sich, falls (1) durch Iteration, etwa in Einzelschritten, lösbar ist, ebenfalls durch Iteration lösen, die für das reduzierte System etwa doppelt so schnell konvergiert. Auch im homogenen Falle ($r_i = 0, \lambda = z =$ Eigenwert) bewirkt die Reduktion eine große Rechenersparnis. Die Bedeutung derartiger Gleichungssysteme liegt darin, daß das gewöhnliche Differenzenverfahren bei Differentialgleichungen der Gestalt $\Delta U = c U = p = 0$ ($c =$ Konstante, evtl. = Eigenwert λ , p gegebene Funktion von x, y oder von x, y, z) bei Verwendung von Quadrat-, Sechsecks- oder Würfelnetzen auf solche Gleichungssysteme führt. Neben der 1. Randwertaufgabe werden auch die 3. Randwertaufgabe und krummlinige Ränder erfaßt. Für die Praxis ist wichtig, daß man in vielen Fällen die reduzierten Gleichungen nicht erst durch eine Matrizenmultiplikation errechnen muß, sondern unmittelbar hinschreiben kann; das wird durch eine Tabelle von Differenzensternen erleichtert. Zwei Beispiele (1. Randwertaufgabe mit zweimaliger Anwendung der Reduktion, und eine Eigenwertaufgabe) zeigen die Verringerung der Rechnung gegenüber der sonst üblichen Art.

L. Collatz.

Young, David: Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type. Trans. Amer. math. Soc. **76**, 92—111 (1954).

Behandelt im wesentlichen eine Übertragung der bei Dirichletschen Problemen wohlbekannten Liebmannschen Iterationsmethode auf allgemeinere lineare Gleichungssysteme, die noch dem Zeilensummenkriterium genügen. Insbesondere werden die Konvergenzverhältnisse dieses Verfahrens in Abhängigkeit vom Relaxationsfaktor genau untersucht. Die Ergebnisse sind völlig analog den Ergebnissen von Frankel [Math. Tables Aids Comput. **4**, 30 (1950)] für das spezielle Dirichletproblem. Beispielsweise wird auch im allgemeinen Fall bei geeigneter Überrelaxation (von Frankel als „extrapolated Liebmann method“ bezeichnet) eine wesentliche Konvergenzbeschleunigung erzielt.

H. Rutishauser.

Dahlquist, Germund: Convergence and stability for a hyperbolic difference equation with analytic initial-values. Math. Scandinav. 2, 91—102 (1954).

Es sei $w = F(x, t)$ die Lösung von $\partial^2 w / \partial t^2 = \partial^2 w / \partial x^2$, $w(x, 0) = f(x)$, $\partial w / \partial t = g(x)$ für $t = 0$ und $\Phi(x, t)$ die Lösung (Gitterfunktion) der zugehörigen Differenzengleichungen bei den Maschenweiten $\Delta x, \Delta t$ mit $\Delta x = u \Delta t$. Für $u \geq 1$ liegt für ein Intervall $a \leq x \leq b$ das Differenzen-Fortsetzungsgebiet G im Fortsetzungsgebiet H der Differentialgleichung und dann ist die Konvergenz der Differenzenzlösungen gegen $F(x, t)$ für $\Delta t \rightarrow 0$ bekannt. Für $0 < u < 1$ greift G über H hinaus und es kann nicht mehr bei beliebigem $f(x), g(x)$ Konvergenz stattfinden. Werden aber $f(z)$ und $g(z)$ mit $z = x + iy$ im Rechteck $a \leq x \leq b$, $y \leq (b-a)/3$ als analytisch vorausgesetzt, so besteht gleichmäßige Konvergenz der Φ gegen F im Quadrat $a + it \leq x \leq b - it$. Für $u > 5.9$ kann der Koeffizient 1.3 durch $2^{-1} u \operatorname{ArCos} u^{-1}$ ersetzt werden. Sind $f(z)$ und $g(z)$ meromorph, so wird jedem Pol ein „Schattengebiet“ zugeordnet und es besteht Konvergenz außerhalb dieser Schatten. Verf. untersucht die numerische Instabilität für $u < 1$ und zeigt in einem Zahlenschema im Falle $u = 1.2$ das rapide Anwachsen von (etwa durch Abrundung hervorgerufenen) Abweichungen. *L. Collatz.*

Sobolev, S. L.: Einige Bemerkungen über die numerische Lösung von Integralgleichungen. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3 (61), 234—235 (1954) [Russisch].

Young, Andrew: The application of approximate product-integration to the numerical solution of integral equations. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 224, 561—573 (1954).

The paper presents numerical methods of solving integral equations in which formulae for numerical integration are derived from the kernel functions of the equations by means of the technique of „approximate product-integration“. Provided certain product-moments of the kernel functions exist, the methods are applicable to singular equations. By adopting matrix methods, the problem of determining the necessary weights for the integration formulae is made to depend on the inversion of certain alternant matrices: tables of the necessary inverse matrices already exist. The methods prove to be essentially the same for the solution of both Volterra and Fredholm types. The initial solutions may be improved in certain cases, by using expressions for the errors arising from the use of the approximate numerical integration formulae. *E. J. Nyström.*

Mel'nik, S. L.: Oscillierende Funktionen und ihre Anwendung auf die angenäherte Lösung von Integralgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 705—708 (1954) [Russisch].

Die Funktion $f(p)$ sei im Gebiet ω definiert und einschließlich ihres Quadrates summierbar. Sie heiße „oscillierend“, wenn es eine Zerlegung von ω in Teilgebiete ω_i , $i = 1, \dots, n$, gibt, so daß für $i = 1, \dots, n$, gilt: $\int_{\omega_i} f(p) dp = 0$. Durch Verwendung derartiger Funktionen gelangt der Verf. zu vorteilhaften Fehlerabschätzungen bei der angenäherten Lösung von linearen Integralgleichungen. *W. Thimm.*

Page, E. S.: The Monte Carlo solution of some integral equations. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 414—425 (1954).

In der Theorie der Zufallswege zwischen absorbierenden Grenzen ergeben sich für gewisse Mittelwerte Fredholmsche Integralgleichungen 2. Art. Man kann daher durch Zufallsexperimente Näherungslösungen dieser Integralgleichungen erhalten. Die Bewegung eines Teilchens, das sich zu gewissen Zeitpunkten sprunghaft weiterbewegt, so daß seine Stellung nach dem n -ten Zeitintervall gleich Z_n ist, $Z_n = Z_{n-1} + u_n$, $Z_0 = Z$, wobei die Sprünge u_n der Teilchen unabhängige Zufallsgrößen aus einer Grundgesamtheit mit der Häufigkeitsfunktion $f(x)$ in $-h \leq x \leq h$ darstellen, genüge der folgenden Absorptionsbedingung: Die Bewegung kommt zum Stillstand, wenn $Z_n \leq 0$ oder $Z_n \geq h$ geworden ist ($h > 0$, $n \geq 1$). Dann genügt die durchschnittliche Anzahl der Sprünge des Teilchens, ausgehend von der Anfangslage $Z_0 = Z$ bis zur Absorption, der Integralgleichung

(1) $N(Z) = 1 + \int_0^h N(x) f(x-Z) dx$. Die Wahrscheinlichkeit $P(Z)$, daß das Teilchen an der Grenze $Z = 0$ absorbiert wird, genügt der Integralgleichung

(2) $P(Z) = \int_{-\infty}^{-Z} f(x) dx + \int_0^h P(x) f(x-Z) dx$. Verf. betrachtet weiter die allgemeinere Integralgleichung

(3) $M(Z) = g(Z) + \int_0^h K(Z, y) M(y) dy$, in der $g(Z) \geq 0$ und $K(Z, y)$ gegebene

stetige Funktionen sind, so daß die Neumannsche Reihe für die Lösungen von (3) konvergiert und 1 kein Eigenwert von $K(Z, y)$ ist. $s_r = \{Z_0, Z_1, \dots, Z_r\}$ sei der Weg, den das Teilchen nach r Sprüngen zurückgelegt hat, und n sei die Gesamtzahl der Sprünge bis zur erfolgten Absorption, also Z_n die Endlage des Teilchens ($Z_n \leq 0$, $Z_n \geq h$). Setzt man

$$V(s_r) = (K(Z_{r-1}; Z_r) / f(Z_r - Z_{r-1})) V(s_{r-1}) \quad \text{für } r \geq 1, \quad V(s_0) = 1,$$

so ist, wie gezeigt wird, die mathematische Erwartung von $S(Z) = \sum_{r=1}^n V(s_{r-1}) g(Z_{r-1})$ Lösung der Integralgleichung (3). Ist $p_r(x)$ die Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchen ausgehend vom Punkt x nach genau r Sprüngen absorbiert wird und $c_r(Z) = V(s_{n-r}) g(Z_{n-r}) p_r(Z_{n-r})$ für $n \geq r$, bzw. $= 0$ für $n < r$, so genügt die mathematische Erwartung $E(c_r(Z))$ ebenfalls der Integralgleichung (3). Verf. gibt noch drei weitere Schätzfunktionen an, deren Mittelwerte der Integralgleichung (3) genügen. Für die Anwendungen wird man von den angegebenen Funktionen diejenigen bevorzugen, die nur eine geringe Rechenarbeit verursachen und nicht ungenauer sind als die anderen. Die Momente der angegebenen Schätzfunktionen $S(Z)$, $c_r(Z)$ usw. genügen (falls sie existieren) ebenfalls gewissen Integralgleichungen 2. Art. Das wird am Beispiel der Momente 2. Ordnung gezeigt. Es wird ferner die Größe der Momente für die eingeführten Schätzfunktionen verglichen, sowie der Einfluß der Häufigkeitsfunktion auf die Größe der Momente untersucht und eine hinreichende Bedingung für die Existenz der k -ten Momente für die Schätzfunktion $S(Z)$ der Lösung von (3) angegeben. Man kann die Streuung kleiner machen durch geeignete lineare Kombinationen von Schätzfunktionen und durch zweckmäßige Wahl der Häufigkeitsfunktion. Das geht jedoch auf Kosten der Einfachheit des Verfahrens und des Rechenaufwandes. Schließlich lassen sich die angegebenen Methoden auf Integralgleichungen 2. Art in mehreren Veränderlichen ausdehnen. Verf. hat mit Hilfe der EDSAC nach dem angegebenen Verfahren für die Lösungen $N(Z)$ und $P_r(Z)$ der Integralgleichungen (1) und (2) mit $h = 1$ und $h = 10$ Näherungswerte an vorgegebenen Stellen \hat{Z} , nämlich $S(\hat{Z})$ und $c_1(\hat{Z})$ und ihre geschätzten Standardfehler berechnet. Hierbei wurde die Normalverteilung als Häufigkeitsfunktion zugrunde gelegt und für jeden der angegebenen Punkte $Z = 500$ Zufallswege, mit Hilfe eines zahlentheoretischen Verfahrens, nach welchem die Maschine eine Folge von Pseudozufalls-Dualstellen erzeugt, ausgeführt. Man erhält zum Teil Ergebnisse, die für $h = 1$ nur einen Fehler von 1% aufweisen. Das sind jedoch Fälle, in denen das Integral mit hinreichender Genauigkeit durch eine Quadraturformel mit wenigen Ordinaten berechnet werden kann, und Fälle, in denen die Neumannsche Reihe rasch konvergiert. Für große h ist jedoch die Monte-Carlo-Methode von Vorteil. So wird man hiernit, falls man etwa nur Schätzwerte mit einer Genauigkeit von ca 10% benötigt, beträchtlich Zeit sparen, und es ist nach Ansicht des Verf. zu erwarten, daß dieser Vorteil noch stärker in Erscheinung tritt bei Lösungen von Integralgleichungen in mehr als einer Dimension.

J. Heinhold.

Krylov, V. I.: Vergrößerung der Genauigkeit von mechanischen Quadraturen. Formeln vom Eulerschen Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 429–432 (1954) [Russisch].

Wenn der Fehler einer Quadraturformel $R(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ identisch verschwindet für $f(x) = x^v$ ($v = 1, 2, \dots, m-1$), aber nicht mehr für $f(x) = x^m$, dann heißt $m-1$ der Genauigkeitsgrad der Quadraturformel. $R(f)$ läßt sich, wenn f genügend oft stetig differenzierbar ist, in der Form $R(f) = \int_a^b f^{(m)}(x) K(x) dx$ darstellen. Verf. leitet hieraus Formeln $R(f) = C_0 [f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)] + \dots + C_s [f^{(m+s-1)}(b) - f^{(m+s-1)}(a)] + R_{s+1}(f)$ ab mit $C_0 = \int_a^b K(x) dx$ ($b-a$), $L_1(x) = \int_a^x [C_0 - K(\xi)] d\xi$, $C_1 = \int_a^b L_1(x) dx$ ($b-a$), $L_{i+1}(x) = \int_a^x [C_i - L_i(\xi)] d\xi$, $R_{i+1}(f) = \int_a^b f^{(m+i+1)}(x) L_{i+1}(x) dx$. Es gilt, wobei $B_i(x)$ die Bernoullischen Polynome bedeuten, $C_i = \frac{(b-a)^{i-1}}{i!} \int_a^b B_i\left(\frac{x-a}{b-a}\right) K(x) dx$.

Als Spezialfall wird für die Gewichtsfunktion $p(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ ($\alpha, \beta = -1$) die Formel vom Genauigkeitsgrad $2n-1$ betrachtet, bei der die x_k die Nullstellen des n -ten Jacobischen Polynomes $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ sind. W. Schulz.

Young, Andrew: Approximate product-integration. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. **224**, 552—561 (1954).

Methods of obtaining numerical integration formulae of the type $\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \sum_r \lambda_r f(x_r) + \text{correction terms}$ are derived. A main feature of the development is that the calculations of the weights λ_r and corrections are made to depend on the inversion of certain standard matrices. Tables of the inverse matrices required for certain generalized formulae of the Newton-Cotes type are given, together with tables of the coefficients required in the correction terms. If $f(x)$ is a polynomial of the degree n , and $n+1$ ordinates are used, then, whatever the form of $\varphi(x)$, formulae are exact, that is, they introduce no analytical error. When it is convenient to do so, ordinates outside the range of integration may be used, no change in the method of deriving the formulae being necessary. If the integrand is singular within or near the range of integration, conventional methods of numerical integration break down, but in the formulae derived here, the presence of singularities in $\varphi(x)$ does not affect the derivation if certain conditions are satisfied. The methods are not affected by discontinuities in $\varphi(x)$. E. J. Nyström.

Todd, John: Evaluation of the exponential integral for large complex arguments. J. Res. nat. Bur. Standards **52**, 313—317 (1954).

Zur Berechnung des Exponentialintegrals $E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$ mit $z = x + iy$

kann man für größere Werte von z die asymptotische Entwicklung heranziehen. Man kann aber auch die numerische Auswertung der beiden reellen Integrale in $e^z E_1(z) = I_1 - i I_2$ nach der Laguerreschen Methode vornehmen. An Restgliedabschätzungen wird gezeigt, daß der Vorgehensweise mit Laguerreschen Polynomen der Vorzug zu geben ist. Die Gegenüberstellung wird an Beispielen ($z = 10$, $z = 1 + 10i$, $z = -10 + 5i$) erläutert. Die zur Durchführung der numerischen Integration notwendigen Gewichtskoeffizienten und Nullstellen der Laguerreschen Polynome wurden von H. E. Salzer und R. Zucker (vgl. dies. Zbl. **34**, 191) angegeben. H. Unger.

Clunie, J.: On Bose-Einstein functions. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 632—636 (1954).

Für das in der Theorie des Bosegases vorkommende Integral $G_k(\eta) = \int_0^\infty \frac{x^k dx}{\exp(x-\eta) - 1}$ (Cauchyscher Hauptwert, falls $\eta \leq 0$) werden asymptotische Entwicklungen angegeben sowie Tabellen mit $k = 0,5$ in den Bereichen $-3 \leq \eta \leq -0,6$ (0,2), $-0,5 \leq \eta \leq 0,5$ (0,1), $0,6 \leq \eta \leq 20$ (0,2). Vgl. auch Robinson, Phys. Review, II. Ser. **83**, 678—679 (1951). G. Höhler.

Guest, P. G.: Grouping methods in the fitting of polynomials to equally spaced observations. Biometrika **41**, 62—76 (1954).

Bei der Ausgleichung von Beobachtungen mit gleichen Tafelabständen durch Polynome nach der Methode der kleinsten Quadrate ist es mitunter, etwa weil die zur Verfügung stehenden Hilfstafeln nicht ausreichen oder um die Rechenzeit zu verkürzen, nötig, die Beobachtungen zu gruppieren. Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit behandelt Verf. die Aufgabe, unverzerrte Schätzwerte für die Polynomkoeffizienten, die ausgeglichenen Werte und deren Standardabweichungen aus den durch Gruppierung erhaltenen Ergebnissen herzuleiten. Ferner wird die durch die Gruppierung hervorgerufene Abnahme der Wirksamkeit der Schätzwerte untersucht. Man kann bei der Gruppenbildung zur Berechnung der Polynomkoeffizienten Treppenfunktionen benutzen. Die numerische Durchführung dieses Verfahrens, bei dem in jeder Gruppe nur eine Stufe verwendet wird, sog. einstufige Verfahren, hat Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **45**, 220) behandelt. Im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit wird noch eine Methode angegeben, um die im Sinne größter Wirksamkeit beste Treppenfunktion bei ein- und zweistufigen Verfahren

für Polynome 1., 2. und 3. Grades anzugeben. (Verf. bemerkt, daß er für ein- und zweistufige Verfahren Tafeln bis zu $n = 100$ Beobachtungen berechnet hat, und zwar für einstufige Verfahren bis zu Polynomen 5. Ordnung, für zweistufige Verfahren bis zu Polynomen 3. Ordnung).

J. Heinhold.

Krejnes, M. A. und N. D. Ajzenštat: Über die Möglichkeit der Nomogrammdarstellung mit einer Genauigkeit bis zu kleinen Größen höherer Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 1137—1140 (1954) [Russisch].

Für drei Kurvenlittera x, y, z soll in der Umgebung von x_0, y_0, z_0 eine Masseausche Determinante $\Delta(x, y, z) = 0$ gelten, d. h. x_0, y_0, z_0 bestimmen eine Funktion $N(x, y)$ mit $z_0 = N(x_0, y_0)$. Eine Funktion $z = f(x, y)$ nennt man nomographierbar mit einer Genauigkeit bis zu Größen k -ter Ordnung, wenn eine Funktion $z = N(x, y)$ existiert, für die gilt: $f(x, y) - N(x, y) = O(\varrho^k)$, wobei $\varrho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Man setzt dann $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Es gibt eine solche Determinante, für die gilt: $\Delta(x, y, f(x, y)) = O(\varrho^{2k+1})$. Durch eine geeignete projektive Abbildung und durch Entwickeln der Funktionen in Potenzreihen nach x, y oder z wird das Problem der Nomographierbarkeit mit einer Genauigkeit bis zu Größen k -ter Ordnung zurückgeführt auf die Bestimmung der Koeffizienten der Potenzreihen bis zur k -ten Ordnung. Durch eine solche Abbildung kann man erreichen, daß die Funktion $z = f(x, y) = \sum_{i,k} p_{i,k} x^i y^k$ die Gestalt annimmt:

$Z = X + Y + X Y (X - Y) (q_{00} + q_{10} X + q_{01} Y + \dots + q_{0,k-3} Y^{k-3}) + O(\varrho^k)$, $\varrho = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Verf. zeigt, daß eine beliebige 6-mal differenzierbare Funktion $f(x, y)$ stets in der Umgebung (x_0, y_0) mit $\Delta(x, y, f(x, y)) = 0$, $f(x_0, y_0) = 0$, mit einer Genauigkeit bis zur 6. Ordnung nomographiert werden kann. Es bleiben 4 Parameter und $O(x^6), O(y^6), O(x^5 y), O(x y^5)$ willkürlich. Setzt man weiterhin die Koeffizienten der 6. Potenzen der Determinante gleich Null, so erhält man eine Beziehung zwischen den vorher willkürlichen Parametern. Daher kann eine Funktion nicht immer mit einer Genauigkeit 7. Ordnung nomographiert werden. Das Nullsetzen der Koeffizienten der 7. Potenzen führt auf zwei weitere Gleichungen zwischen den zunächst willkürlichen Parametern. Geht man noch einen Schritt weiter, so treten noch drei Bedingungen hinzu. R. Ludwig.

Ludwig, Rudolf: Bemerkungen zur günstigsten projektiven Abbildung von Skalen und Nomogrammen. Z. angew. Math. Mech. **34**, 298—299 (1954).

Vil'ner, I. A.: Nomogramme für die Berechnung elliptischer Funktionen und Integrale. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 2 (60), 113—124 (1954) [Russisch].

Verf. legt eine Anzahl Nomogramme (N 1, 5, 6, 7) vor, die die Berechnung der jeweils angegebenen elliptischen Integrale erster Gattung und elliptischen Funktionen für komplexe Moduln gestatten. Aus den graphischen Darstellungen 2, 3, 4 wird der umgeformte Modul m im komplexen Moduln k, k', k'' gefunden, der für den Gebrauch der angeführten Nomogramme notwendig ist. Ferner können mit Hilfe dieser Nomogramme Näherungsformeln für elliptische Funktionen und nomographierbare elementare Funktionen erhalten werden. Es werden solche für $\operatorname{sn}^2(x, m)$, dn^2 und sn^2 angegeben. Im Paragraphen 3 werden weitere Anwendungen besprochen. Auf die Grundlagen und auf den Aufbau der Nomogramme geht Verf. nicht ein. Es wird mehrfach auf frühere, nicht zitierte Veröffentlichungen hingewiesen, die für das volle Verständnis der Abhandlung notwendig erscheinen (vgl. jedoch z. B. Uspechi mat. Nauk **2**, Nr. 6, 227 (1947)).

Vollständig durchgerechnete Beispiele mit genauen Gebrauchsanweisungen und geringe formale Abänderungen der Nomogramme würden ihren Gebrauch wesentlich erleichtern. Störend wirkt auch eine Anzahl Druckfehler. Bei der Auswertung der Nomogramme wird es vorteilhaft sein, sich für einen vorgegebenen Modul aus den Skalenbüscheln der Nomogramme das zugehörige Skalenomogramm herauszuzeichnen. K. Leopold, Stammberger.

Händler, W.: Zur Nomographierbarkeit höherer Funktionen. Z. angew. Math. Mech. **34**, 293—294 (1954).

Curtis, G. C.: Nomograms for the solution of the sound-ranging problem in a plane. Quart. J. Mech. appl. Math. **7**, 129—135 (1954).

Verf. gibt einfache Nomogramme an zur Bestimmung der Koordinaten einer Schallquelle bei gemessenen Zeitdifferenzen des Schallempfanges von drei in einer Geraden liegenden Empfängern. Sind $M_1(x_1, 0)$, $M_2(0, 0)$ und $M_3(x_3, 0)$ die Koordinaten der Empfänger, $PM_2 = r$, $PM_1 = r + s_1$, $PM_3 = r + s_3$ die Entfernungen der Empfänger von der Schallquelle P , wobei s_1 und s_3 die Zeitdifferenzen entsprechenden Strecken sind, so gilt $x^2 - y^2 = r^2$, $(x - x_1)^2 - y^2 = (r + s_1)^2$, $(x - x_3)^2 - y^2 = (r + s_3)^2$. Durch Elimination von y erhält man zwei Determinanten, die zur Darstellung durch Fluchtliniennomogramme geeignet sind:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ s_1/(2x_1 + s_1) & (x_1^2 - s_1^2)/(2x_1 + s_1) & 1 \\ s_3/(2x_3 + s_3) & (x_3^2 - s_3^2)/(2x_3 + s_3) & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2r & 1 \\ s_1/(2x_1 + s_1) & (x_1^2 - s_1^2)/(2x_1 + s_1) & 1 \\ s_3/(2x_3 + s_3) & (x_3^2 - s_3^2)/(2x_3 + s_3) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Für die bekannten Werte x_1 und x_3 kann man beide Nomogramme vereinigen und erhält zwei

parallele, linear geteilte Leitern für x und r und zwei Kurvenleitern (Kegelschnitte) für s_1 und s_3 . Bei Annahme einer festen Schallgeschwindigkeit können die Kurven direkt nach Zeitdifferenzen skaliert werden. Durch eine einzige Fluchtlinie ermittelt man sofort aus s_1 und s_3 die Werte x und r . Ein Hilfsnomogramm liefert dann y . Für mehr als 3 Empfänger M_1, M_5, \dots läßt sich das Nomogramm durch weitere Kurvenleitern für s_1, s_3, \dots , erweitern. Die Ablesegerade ist dann durch 3 bzw. 4 Punkte festgelegt (Aufsuchen der besten Geraden wegen der Meßfehler).
R. Ludwig.

Muller, D. E.: Boolean algebras in electric circuit design. Amer. math. Monthly 61, Nr. 7, Part 2, 27—28 (1954).

Dörr, Johannes: Funktionentheoretische Methoden bei Übertragungs- und Regelungsproblemen. Z. angew. Math. Mech. 34, 287—289 (1954).

Schottlaender, Stefan: Über automatisch gesteuerte Bewegungen. Z. angew. Math. Mech. 34, 324—326 (1954).

● Proceedings of the Eastern Joint Computer Conference. — Papers and discussions presented at the joint IRE-AIEE-ACM computer conference, Washington, D. C.: December 8—10, 1953: Information processing systems. Reliability and requirements. New York: The Institute of Radio Engineers, Inc., 1954. 125 S. \$ 3,00.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt.

Rohleder, Hans: Der dreiwertige Aussagenkalkül der theoretischen Logik und seine Anwendung zur Beschreibung von Schaltungen, die aus Elementen mit zwei stabilen Zuständen bestehen. Z. angew. Math. Mech. 34, 308—311 (1954).

Garwick, Jan V.: A punched card machine especially equipped for scientific computations. Math. Tables Aids Comput. 8, 167—170 (1954).

Conn, Ralph B.: Digital computers for linear, real-time control systems. Proc. Eastern Comput. Confer., Washington, Dec. 8—10, 1953, 33—37 (1954).

Harmuth, Henning: Die Ausnützung gekrümmter Kennlinien für die höheren Grundrechnungsarten in elektronischen Rechenmaschinen. Acta phys. Austr. 8, 332—337 (1954).

Bekanntlich lassen sich die gekrümmten Charakteristiken von Vakuumröhren und Halbleiter-Dioden dazu benutzen, um in Analogie-Rechengeräten Funktionen einer Variablen zu bilden. Diese Tatsache gestattet insbesondere die Ausführung von Multiplikationen zweier Spannungen, eine Operation, die in rein elektrischen Rechengeräten erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Verwendet werden bei der Bildung des Produktes xy hauptsächlich die Identitäten $\log xy = \log x + \log y$ oder $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$. Durch „implizite“ Schaltung unter Verwendung eines Verstärkers lassen sich auch die Umkehrfunktionen, nämlich Division und Wurzelziehen, ausführen. Verf. skizziert einige bekannte Verfahren dieser Technik und gibt eine neue Schaltung, die die quadratische Funktion mit möglichst guter Genauigkeit darstellt.
Ambros Speiser.

Samelson, Klaus und Friedrich L. Bauer: Maßnahmen zur Erzielung kurzer und übersichtlicher Programme für Rechenautomaten. Z. angew. Math. Mech. 34, 262—272 (1954).

Die Verf. haben für den Rechenautomaten der T. H. München das Befehlsschema sowie die Organisation der Befehlseingabe und der damit verbundenen Fragen des Einbaus von Teilprogrammen ausgearbeitet und beschreiben hier die getroffenen Maßnahmen sowie die zugrunde liegenden Überlegungen. — Dabei dürften die folgenden Einrichtungen völlig neu sein: 1. Der Operationsteil eines Befehls wird in mehrere Gruppen von Ziffern aufgegliedert, wobei jede dieser Gruppen einen „Verein“ von Teiloperationen darstellt. Man hat dann die Möglichkeit, in jedem Befehl mehrere Teiloperationen zu kombinieren (nämlich je eine Teiloperation aus jedem Verein). 2. Die Verf. definieren außer den bereits von Goldstine und von Neumann eingeführten Begriffen „Änderungen erster und zweiter Art“ auch noch „Änderungen dritter Art“. Darunter sind die bei zyklischen Teilprogrammen den Änderungen der Induktionsvariablen parallellaufenden Adreßänderungen zu verstehen. Zur Vereinfachung der Änderungen dritter Art dient ein Adressen-Addenden-Register (Indexregister mit additiver Wirkung). 3. Zur Erleichterung der „Änderungen zweiter Art“ sehen die Verf. einen „Sprungbefehl mit Änderung zweiter Art“ vor, durch welchen nicht nur der Sprung auf das Unterprogramm erfolgt, sondern automatisch gewisse Parameter aus dem Hauptprogramm ins Unterprogramm übertragen werden. Dies erfolgt durch sinnreiche Ausnützung ohnehin vorhandener Einrichtungen. H. Rutishauser.

Pösch, H. und Th. Fromme: Programmorganisation bei kleinen Rechenautomaten mit innerem Programm. *Z. angew. Math. Mech.* **34**, 307—308 (1954).

Householder, Alston S.: Generation of errors in digital computation. *Bull. Amer. math. Soc.* **60**, 234—247 (1954).

Bei der numerischen Berechnung einer Größe $f(x)$ können unvermeidliche Fehler auftreten. Verf. untersucht den einen Fehler, der dadurch entsteht, daß die Rechenmaschine eine begrenzte Kapazität hat. Dies führt besonders bei der Multiplikation und Division dazu, daß eine Anzahl von Ziffern wegfällt und nach einer der üblichen Regeln aufgerundet werden muß. — Unter der Voraussetzung eines bestimmten digitalen, binären Rechensystems werden zunächst die Fehler bei der einfachen Multiplikation und Division berechnet und für das einfache Beispiel $a \cdot b \cdot c$ einer Folge von Rechenoperationen ein Kriterium abgeleitet, unter welchen Bedingungen der eine oder andere Rechengang den kleineren Fehler ergibt. — Sodann wird der Begriff der sog. Unsicherheit eingeführt, mit der das Ergebnis einer solchen Folge von Rechenoperationen behaftet ist. Diese Unsicherheit wird als Beispiel allgemein für einige Reihen berechnet.

W. Breitling.

Cairns, S. S.: Computational attacks on discrete problems. *Amer. math. Monthly* **61**, Nr. 7, Part 2, 29—31 (1954).

Im Rahmen des sogenannten SCAMP-Projekts werden an der Universität von Californien gewisse mathematische Probleme mit Hilfe von Rechenautomaten in Angriff genommen, teils um numerische Unterlagen für die Entwicklung mathematischer Theorien zu erhalten oder um gewisse Vermutungen, die man bisher nicht beweisen konnte, zu beweisen. Ein solches Problem, das im Rahmen dieses Projekts behandelt wird, ist das Existenzproblem für finite projektive Ebenen der Ordnung m . Diese Frage ist zur Zeit noch ungelöst für eine Folge von m Werten, die beginnt mit $m = 10, 12, 15, 20, \dots$. Verf. skizziert kurz verschiedene Wege, auf denen die Lösung dieses Problems etwa für $m = 10$ mit Hilfe eines Rechenautomaten versucht wurde.

J. Heinhöld.

Smagorinsky, Joseph: Data processing requirements for the purposes of numerical weather prediction. *Proc. Eastern Comput. Confer.*, Washington, Dec. 8—10, 1953, 22—30 (1954).

Kiss, I.: Die theoretischen Grundlagen der Radizierung mit der Rechenmaschine. *Acta techn. Acad. Sci. Hungar.* **8**, 221—240 u. russ., engl. und französ. Zusammenfassg. 241 (1954).

Der Verf. behandelt die Radizierung als Lösung der algebraischen Gleichung $x^n - A = 0$. Er gibt auf rekursivem Weg eine Verallgemeinerung des Newton-Raphson'schen Verfahrens. Die Wurzelnäherungsformeln von Heron, Lambert und Merrifield (Formeln vom zweiten, dritten und vierten Konvergenzgrad) erweisen sich als Anwendungen hiervon. Die entsprechende Näherungsformel fünften Grades wird hergeleitet. Ferner wird die Eulersche Verallgemeinerung des Newton-Raphson-Verfahrens angegeben, die von Zeit zu Zeit immer wieder neu entdeckt zu werden scheint. Der Ansicht des Verf., die einmalige Anwendung einer Formel hohen Konvergenzgrades sei auf der Rechenmaschine zweckmäßiger als die wiederholte Anwendung einer einfachen Formel, kann der Ref. nicht zustimmen.

H. Wundt.

Boesch, Walter: Die Berechnung einiger komplexer Werte auf einer Multipliziermaschine mit nur einem Multiplizierwerk. *Z. angew. Math. Phys.* **5**, 341—343 (1954).

Lemaitre, Georges: Comment calculer? *Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. **40**, 683—691 (1954).

Procédé de calcul au moyen de la machine à écrire, basé sur l'écriture mixte dyadique-décimale des nombres. Pour les détails qui sont assez compliqués, voir la note.

H. Freudenthal.

● Abdel-Messih, Moheb Aziz: Tabellen zur Erzeugung von Funktionen einer und zweier Variablen mit linearen Potentiometern. *Mitt. Inst. angew. Math. techn. Hochschule Zürich* Nr. 5, 33 S. (1954).

Mit linearen Potentiometern besteht die Möglichkeit der Erzeugung von rationalen Funktionen, indem die einer Anordnung von Potentiometern, festen Widerständen und Spannungsquellen entnommene Spannung oder der an einer bestimmten Stelle fließende Strom eine rationale Funktion von x ist, wobei wir mit x den Drehwinkel der Potentiometer bezeichnen. Die existierenden Schaltungsmöglichkeiten sind dabei sehr zahlreich, selbst wenn man sich auf nur 2 Potentiometer beschränkt. Verf. hat einen Katalog aller möglichen Schaltungen mit einem und mit zwei Potentiometern aufgestellt. Zu jeder Schaltung sind die dargestellte rationale Funktion sowie die zugehörigen Kurven für einige verschiedene Parameterwerte angegeben. Werden zwei Potentiometer getrennt betätigt und ihre Drehwinkel mit x und y bezeichnet, so entstehen rationale Funktionen mit 2 unabhängigen Veränderlichen x und y . Diese Funktionen sind ebenfalls als Kurvenscharen angegeben. Insgesamt sind 55 Fälle behandelt. Dieser Katalog ermöglicht es dem Konstrukteur eines Rechengörates, durch Vergleich von Kurven schnell die richtige Variante zu finden, von der aus die genaue Anpassung vorgenommen werden kann.

Ambros Speiser.

• Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi: *Tables of integral transforms*. Vol. I (Bateman Manuscript Project, California Institute of Technology). New York: McGraw-Hill Book Co. 1954. XX, 391 p. 56/6 s.

Die beiden Bände unter dem obigen Titel, die eine Sammlung von bestimmten Integralen darstellen und von denen der erste vorliegt, sind ein Ergebnis des sogenannten „Bateman Manuscript Project“, das sich der Herausgabe des von dem verstorbenen Harry Bateman gesammelten, überaus umfangreichen Materials widmet, und aus dem bereits drei Bände „Higher Transcendental Functions“ hervorgegangen sind. Die Herausgeber haben die glückliche Idee gehabt, den größten Teil der bestimmten Integrale (den ganzen ersten Band und die eine Hälfte des zweiten) als Integraltransformationen zu deuten und dementsprechend zu ordnen, was das Aufsuchen sehr erleichtert. So finden sich im vorliegenden ersten Band ausführliche Tabellen folgender Transformationen: Fouriersche cos-, sin- und Exponential-Transformation, Laplace-Transformation, Umkehrung derselben, Mellin-Transformation und Umkehrung derselben. Ferner ist ein ausführliches Verzeichnis der vorkommenden höheren transzendenten Funktionen und der benutzten Funktionssymbole angefügt. Diese klar und übersichtlich gedruckten Tabellen werden von allen denjenigen, die praktische Probleme mit den genannten Transformationen lösen wollen, mit Nutzen verwendet werden.

G. Doetsch.

• *Tables of Lagrangian coefficients for sexagesimal interpolation*. Introduced by H. E. Salzer. (Nat. Bur. of Standards, Appl. Math. Ser. Nr. 35.) Washington: Government Printing Office 1954. X, 157 p. 8 2.—

Um zwischen 3, 4, 5 oder 6 gegebenen Funktionswerten mit äquidistanten Abzissen bequem interpolieren zu können, braucht man Tafeln Lagrangescher Koeffizienten. Solche werden hier 8-stellig gegeben, und zwar für sexagesimale Teilung, also insbesondere für Zeit- und Winkelmaß, wobei der Schritt $1''$ beträgt. Die Anwendung der Tafeln ist ausführlich erläutert, auch für den Gebrauch von Formeln mit Differenzen.

E. J. Nyström.

Nejsuler, L. Ja.: Über die Tabulierung der Taylorschen Zeile bei Funktionen von drei Veränderlichen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 797–800 (1954) [Russisch].

Eine Funktion $v(x_1, x_2, x_3)$ soll samt ihrer Taylorentwicklung bis zu den Gliedern zweiter Ordnung tabelliert werden. Hierfür wähle man eine Hilfsfunktion $\Phi(r)$, deren Inverse existiert und betrachte die Taylorentwicklung von $\Phi(r(x_1, x_2, x_3))$ bis zu den Gliedern derselben Ordnung. Diese sei so beschaffen, daß man die Glieder, in denen Ableitungen von v nach x_i ($i = 1, 2, 3$) in höherer als erster Ordnung auftreten, vernachlässigen kann. Es werden die Fälle unterschieden, daß die zu tabellierende Funktion wenigstens in einer Veränderlichen x_i nur für eine kleine Anzahl fester Werte zu betrachten ist, und zweitens, daß eine stetige Veränderung der Argumente x_i in Betracht gezogen werden muß. Im ersten Fall leistet man die Tabellierung unter Verwendung einer früheren Untersuchung [Nejsuler, Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1947, 1543–1560 (1947)], im zweiten Fall stützen sich die Ausführungen zum Teil auf Nejsuler, *ibid.* 1948, 1169–1191 (1948). Weitere Literaturangaben, dies. Zbl. 39, 130.

L. Schmetterer.

Uhler, Horace S.: Hamartixéresis as applied to tables involving logarithms. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 728–731 (1954).

In einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 50, 134) wurde die Prüfung einer 61-stelligen Logarithmentafel durch Summenbildung der Logarithmen beschrieben. Hier wird die Methode auf die Prüfung der Logarithmen der Fakultäten ausgedehnt (F. J. Duarte, *Nouvelles Tables de Log $n!$ à 33 Décimales depuis $n = 1$ jusqu'à $n = 3000$* , Geneva, Kundig; Paris 1927). Die Summe der ersten 1000 Logarithmen n Duartes Tafeln wird in Vergleich gesetzt mit dem aus der Zerlegung von $\prod_{n=1}^{1000} n!$ in Primzahlpotenzen gewonnenen Logarithmus. Die Exponenten der Primzahlpotenzen werden in der Arbeit mitgeteilt. Der Vergleich ergab die Übereinstimmung der ersten 24 Dezimalen, während Unstimmigkeiten in den weiteren Dezimalen zur Auffindung von Fehlern in Duartes Tafeln führten. Die Prüfung wurde ausgedehnt bis zu $n = 1200$.
H. Unger.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Chintschin, A. J.: Die Methode der willkürlichen Funktionen und der Kampf gegen den Idealismus in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sowjetwiss., naturw. Abt. 7 (1954), 263—273 (1954).

Nach Kritik der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit und derjenigen v. Mises Häufigkeitsdefinitionen, beschreibt der Verf. eine Definition, die nach seiner Ansicht die Nachteile der beiden Definitionen nicht besitzt und insbesondere die Voraussage der Stabilität von Häufigkeiten gestattet. Der Verf. beschreibt seine Methode an Hand eines vereinfachten Roulettespiels. Die stochastische Größe ist in diesem Fall die Endlage eines auf einem Kreise sich bewegendes Punktes, wenn er im Zeitpunkt t angehalten wird nach einer Bewegung mit konstanter, aber willkürlicher Geschwindigkeit v . Der Verf. zeigt, daß unter Voraussetzung einer sehr allgemeinen Geschwindigkeitsverteilung $v(t)$ willkürliche Funktion, der Grenzwert ($t \rightarrow \infty$) der Häufigkeit des Eintreffens auf eine Stelle mit geraden bzw. ungeraden n stets 1/2 beträgt, wenn der Kreis in $2n$ gleiche Teile eingeteilt wird. Stabilität und Wert der Häufigkeit können in diesem Fall in einer langen Versuchsreihe aus objektiven Besonderheiten des Vorganges festgestellt werden, wobei der Wert der Häufigkeit nicht von der willkürlichen Anfangsfunktion abhängt. Der Verf. weist darauf hin, daß sich dieses Modell stark verallgemeinern lasse.
W. Saxer.

Holte, Fritz C.: Einige Eigenschaften der binomialen Verteilungsfunktion. Nordisk mat. Tidsskrift 2, 113—115 (1954) [Norwegisch].

Laha, R. G.: On some properties of the Bessel function distributions. Bull. Calcutta math. Soc. 46, 59—72 (1954).

The author derives the distribution of a linear function, and also of the ratio of two linear functions, of independent random variables („Bessel variates“) with probability density $e^{-x^2/2} x^{-1/2} I_{\nu-1/2}(\beta x^{1/2}) dx$ by the use of characteristic functions. He shows in particular that the sum of a number of independent Bessel variates is again a Bessel variate. Specializations of his results lead to known facts about Gamma variates and non-central χ^2 .
S. Vajda.

Kuznecov, P. L., R. L. Stratonovič und V. I. Tichonov: Verteilung der Punkte des Durchschnitts einer Zufallsfunktion $x(t)$ mit einer sicheren Funktion $f(t)$. Žurn. techn. Fiz. 24, 103—112 (1954) [Russisch].

La f. a. est donnée par la f. r. (fonction de répartition) jointe des valeurs de $x(t)$ et de sa dérivée $x'(t)$ en tout ensemble fini de points. On calcule la f. r. jointe des t des intersections de $x(t)$ et de $f(t)$, puis la f. r. des intervalles τ entre intersections successives. Pour τ grands, cette f. r. prend la forme $e^{-\beta\tau}$; β est calculé. La f. r. jointe des $x(t)$ et $x'(t)$ est déduite de la f. r. jointe des $x(t)$ et des $x(t + 1)$, dans le cas de f. a. „quasi-moment“. Tous les calculs sont purement formels, et la validité des opérations n'est nulle part étudiée.
B. Mandelbrot.

Wolfowitz, J.: Generalization of the theorem of Glivenko-Cantelli. Ann. math. Statistics 25, 131—138 (1954).

Let X_j^i ($i = 1, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, n$) be a sequence of independent chance

variables with distribution functions which are independent of j and let q_1, \dots, q_k be given parameters. Then, if $F(x|q)$ is the cumulative distribution function of $\sum_{i=1}^k q_i X_1^i$ and $F_n^*(x|q)$ the empiric distribution function of $\sum_i q_i X_j^i$ ($j = 1, \dots, n$) (i. e. $1/n$ times the number of $\sum_i q_i X_j^i$ which are less than x), then the probability of

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_q \sup_x |F(x|q) - F_n^*(x|q)| = 0$ is unity. — This is a generalisation of a theorem which M. Fréchet (this Zbl. 15, 260) describes as that of Glivenko and Cantelli. The latter theorem is used in the proof. The author also mentions the possibility of weakening some of the conditions, e. g. not insisting on the independence of the X_j^i , thereby obtaining yet more general theorems. *S. Vajda.*

Gnedenko, B. W.: Grenzwertsätze für Summen unabhängiger Summanden und Markovsche Ketten. Ukrain. mat. Žurn. 6, 5—20 (1954) [Russisch].

In diesem in der III. sowjetrussischen Tagung über Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik (Kiew 1953) gehaltenen Vortrag gibt Verf. eine wertvolle geschichtliche Übersicht über die Theorie der Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Summanden und von solchen von Markoff-Ketten. Beginnend bei den Klassikern der Wahrscheinlichkeitsrechnung, skizziert er vorbereitend den Entwicklungsgang des vom „Gesetz der großen Zahlen“ und dem „zentralen Grenzwertsatz“ ausstrahlenden Fragenkomplexes bis in die jüngste Zeit. Sodann gibt er eine eingehendere Synthese der wichtigsten, zumeist in Rußland erzielten neueren Resultate über Grenzwertsätze für Summen gegenseitig unabhängiger Summanden, und zwar zur Abschätzung der Konvergenzstärke (Ljapunoff, Cramér, Kolmogoroff, Linnik, Gnedenko u. a.), lokale Grenzwertsätze (Gnedenko, Kolmogoroff, Chintschin, Prochoroff u. a.), Untersuchung der Verteilung gewisser von solchen Summen abhängenden Größen (Kolmogoroff, Prochoroff, Gichman), Untersuchung der Wachstumsordnung (iterierter Logarithmus u. a.) derartiger Summen (Chintschin, Kolmogoroff, Gnedenko, Pietrowski, Hartman, Winter, Erdős, Feller u. a.). Im letzten Abschnitt werden analoge Resultate zusammengestellt, die Summen von gegenseitig abhängigen, und zwar durch Markoff-Ketten definierten Summanden betreffen (Doebelin, Sarymsakoff, Kolmogoroff, Sirazdin, Dobruschin u. a.). *M. P. Geppert.*

Gnedenko, B. V.: Ein lokaler Grenzwertsatz für Dichten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 5—7 (1954) [Russisch].

ξ_1, ξ_2, \dots sei eine Folge unabhängiger, zufälliger, mit derselben Verteilungsfunktion $F(x)$ verteilter Variabler. Sei $B_n > 0$, $s_n = (\xi_1 + \dots + \xi_n)/B_n - A_n$, und es existiere die Grenzverteilungsfunktion $\Phi(x)$ und die zugehörige Dichte $p(x)$ der s_n für $n \rightarrow \infty$. Die Verteilung von s_n soll eine Dichte $p_n(x)$ besitzen, $n = 1, 2, \dots$. Es interessiert die Frage nach der gleichmäßigen Konvergenz von $p_n(x)$ gegen $p(x)$ in $-\infty < x < \infty$. Eine Reihe von hinreichenden Bedingungen gab kürzlich W. L. Smith [Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 462—472 (1953)]. Hier wird ein in gewissem Sinne abschließender Satz gezeigt: Die gleichmäßige Konvergenz von $p_n(x)$ gegen $p(x)$ gilt genau dann, wenn $F(x)$ zum Anziehungsgebiet von $\Phi(x)$ gehört und ein Index n_0 existiert, so daß die Verteilungsfunktion von $\xi_1 + \dots + \xi_{n_0}$ eine Lipschitzbedingung erfüllt. Die Notwendigkeit ist klar. Der Beweis dafür, daß die Bedingungen hinreichend sind, zeigt Analogien zu den in früheren Arbeiten [Verf., dies. Zbl. 36, 87; Verf. und Koroljuk, Dopovid Akad. Nauk Ukrain. RSF 1950, 275—278 (1950)] verwendeten Abschätzungen. *L. Schmetterer.*

Širokorad, B. V.: Zur Frage der Anwendbarkeit des zentralen Grenzwertsatzes auf Markovsche Ketten. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 18, 95—104 (1954) [Russisch].

Verf. untersucht nichtstationäre Markoffsche Ketten mit zwei Zuständen im Schema der Versuchsfolge und findet, daß die Bedingungen für die Anwendbarkeit des Zentralen Grenzwertsatzes auf solche Ketten bei weitem nicht so eng sind wie für das von Bernstein untersuchte Schema. Gilt für die Größen a'_n und b_n der Matrix der Verkettungswahrscheinlichkeiten $a'_n \sim a \cdot n^\alpha$ und $b_n \sim b \cdot n^\beta$, dann gilt der Grenzwertsatz für die Fälle $\alpha \leq \beta < 1$ und $\beta \leq \alpha < 1$. *P. Lorenz.*

Skorochod, A. V.: Über einen die stabilen Verteilungen betreffenden Satz. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 2 (60), 189—190 (1954) [Russisch].

Verf. beweist mittels Abschätzung von $\int_0^\infty \frac{|f^{(n)}(1)|}{n!} du$, daß $f(z) = \int_0^\infty e^{-iu-zu^\alpha} du$

und $f(z) = \int_0^\infty e^{iu-zu^\alpha} du$ mit $0 < \alpha < 1$ ganze analytische Funktionen von z sind. Mit Hilfe der charakteristischen Funktion folgert er hieraus für stabile Verteilungen mit „Charakteristik“ $\alpha < 1$ die Form $p(x) = \Phi_1(x^{-\alpha})x$ für $x > 0$, $p(x) = \Phi_2(x^{-\alpha})x$ für $x < 0$, wobei Φ_1, Φ_2 ganze analytische Funktionen bedeuten. Damit wird ein analoges, von B. V. Gnedenko und A. N. Kolmogoroff (Grenzverteilungen für Summen unabhängiger Zufallsvariablen, Gostechizdat 1949) für $\alpha \geq 1$ erzieltetes Ergebnis ergänzt. *M. P. Geppert.*

Skitovič, V. P.: Linearformen von unabhängigen Zufallsgrößen und das normale Verteilungsgesetz. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 18, 185—200 (1954) [Russisch].

In Verallgemeinerung des Satzes von Bernstein-Gnedenko wird das folgende Theorem bewiesen: Es seien X_1, \dots, X_n unabhängige aleatorische Größen mit $0 < \text{var}(X_i) < \infty$; $\sum a_i X_i$ sei unabhängig von $\sum b_i X_i$. Dann sind alle diejenigen X_i gaußisch verteilt, für die $a_i b_i = 0$ ist. Der Beweis geschieht durch Diskussion der den gemachten Voraussetzungen entsprechenden Funktionalgleichung der charakteristischen Funktionen der X_i unter Benutzung eines Lemma von Ju. W. Linnik [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 9—11 (1953)], das die gaußische Verteilung dadurch charakterisiert, daß die Kumulantenfunktion ein Polynom ist. — Nach trivialen Erweiterungen auf mehrere Linearformen und umständlichen Beweisen der selbstverständlichen Umkehrsätze wird das Theorem auf den Fall erweitert, daß die X_i Vektoren sind. — Zum Schluß wird das obengenannte Lemma von Linnik auf n -dimensionale Verteilungen erweitert. *H. Richter.*

Agnew, Ralph Palmer: Global versions of the central limit theorem. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 800—804 (1954).

Während der zentrale Grenzwertsatz $F_n(x) \rightarrow \Phi(x)$ (Gaußsches Fehlerintegral) für die Verteilungsfunktion F_n der Summe von n unabhängigen gleichverteilten, normalisierten stochastischen Variablen behauptet, beweist der Verf., daß aus der punktwisen Konvergenz $(*) G_n(x) \rightarrow G_0(x)$ normalisierter Verteilungsfunktionen deren L_p -Mittelkonvergenz folgt. Andererseits zieht für monotone Funktionen $0 \leq G_n(x) \leq 1$ die Mittelkonvergenz die gleichmäßige Konvergenz $(*)$ nach sich. Keine wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung. *D. Morgenstern.*

Kallianpur, G. and H. Robbins: The sequence of sums of independent random variables. Duke math. J. 21, 285—307 (1954).

Let $S_n = X_1 + \dots + X_n$, the X_i being independent random variables with common distribution function $F(x)$, and $h_1(x), h_2(x)$ any two functions of x . The authors study the limiting distribution, for $n \rightarrow \infty$, of $\sum_{j=1}^n h_1(S_j)$, and the joint

distribution of $\left\{ \sum_{j=1}^n h_1(S_j), \sum_{j=1}^n h_2(S_j) \right\}$. [The first problem is a generalisation of that solved in Chung and Kac (this Zbl. 42, 375) where $h(x) = 1$ for $|x| < a$, and 0 outside this interval, and $F(x)$ had the characteristic function $\exp(-|t|^\alpha)$.] They obtain partial solutions under assumptions which are too extensive to be quoted here. Remarks are also made about the case when the X_i are two-dimensional vectors. *S. Vajda.*

Hopf, Eberhard: The general temporally discrete Markoff process. J. rat. Mech. Analysis 3, 13—45 (1954).

Let (X, B, λ) be a probability space, i. e. a triple of an abstract set X , a countably additive family B of subsets $A \subseteq X$ such that $X \in B$ and a probability λ in X countably additive on B .

Let $L_1(X)$ be the Banach space of B -measurable functions integrable with respect to λ . The author has succeeded in proving the following individual ergodic theorem, extending the results due to G. D. Birkhoff [Proc. nat. Acad. Sci. USA **18**, 650 (1932)], S. Kakutani (this Zbl. **23**, 145) and J. L. Doob (this Zbl. **41**, 454): Let S be a linear operator on $L_1(X)$ to $L_1(X)$ satisfying the conditions (1) $(Sf)(x)$ is non-negative and $\int_X (Sf)(x) \lambda(dx) = \int_X f(x) \lambda(dx)$ when

$f(x) \in L_1(X)$ is non-negative, (2) $S \cdot 1 = 1$. — Then $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (S^k f)(x)$ exists λ -almost

everywhere. The proof is carried out operator-theoretically [cf. the reviewer, this Zbl. **23**, 397, and N. Dunford-D. S. Miller, Trans. Amer. Math. Soc. **60**, 538—549 (1946)], by making use of the mean ergodic theorem in Banach spaces, a convergence theorem of S. Banach [Bull. Sci. Math., II. Sér. **50**, 36—43 (1926)] and a maximal ergodic theorem which the author proves for the linear operator S^* satisfying only (1); (3) for any $f \in L_1(X)$ and for any integer m , we

have $\lambda(A) \geq 0$ for $A = \left\{ x; \sup_{n \leq m} \sum_{k=0}^{n-1} (S^{*k} f)(x) > 0 \right\}$. The ergodic structure of the

stochastic process corresponding to such operator S^* is also studied; its dissipative part, the conservative part and the S^* -invariant sets. A conjecture is stated about the influence of the dissipative part upon the conservative part. K. Yosida.

Bochner, S.: Limit theorems for homogeneous stochastic processes. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 699—703 (1954).

Der Verf. leitet aus einem vektorwertigen zufälligen Prozeß $x(t)$ mit stationären unabhängigen Zuwächsen [vgl. Doob, Stochastic processes New York 1953], Kap. VIII] einen gleichartigen (o. B. d. A. 1-dim.) Prozeß $y(t)$ durch eine stetige Abbildung $y = \mu(x)$ her: $y_t - y_s = w \cdot \lim \sum \mu(x_{t_r} - x_{t_{r-1}})$ ($t_0 = s$, $t_n = t$). Aus der „mehr oder weniger“ geltenden Darstellung

$$\varphi(\beta) = \lim \int (1 - \exp(-2\pi i(\beta, \mu(x)))) dG_n(x), \quad G_n(x) = n F(x, 1/n)$$

für die charakteristischen Funktionen $\exp(-t q(x)) = \int \exp(-2\pi i(x, r)) dF(r, t)$ ($F(x, t)$ Verteilungsfkt. für $x_t - x_0$; entspr. φ, G zu y) werden Beziehungen zwischen den kanonischen Darstellungen von

$\varphi(\alpha) = i \sum c_p \alpha_p + \sum c_{pq} \alpha_p \alpha_q + \int [1 - e^{-2\pi i(x, r)} - 2\pi i(x, r)/(1 + |x|^2)] dG(x)$ und

$$\varphi(\beta) = i m \beta + \gamma \beta^2 + \int [1 - e^{-2\pi i \beta y} - 2\pi i \beta y/(1 + y^2)] dG(x)$$

(dasselbe G , falls $\mu(x) = O(|x|)$ für $x \rightarrow 0$ als Satz I) gewonnen. 8 Sätze, z. B.: Wenn $\mu(x) = \sum a_p x_p + o(|x|)$, dann $\gamma = \sum c_{pq} a_p a_q$. Wegen der Beweise wird auf ein angekündigtes Buch verwiesen. D. Morgenstern.

Pinsker, M. S. und A. M. Jaglom: Über die lineare Extrapolation zufälliger Prozesse mit stationären n -ten Zuwächsen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 385—388 (1954) [Russisch].

Es werden die Untersuchungen der in dies. Zbl. **51**, 105 referierten Arbeit fortgesetzt. Die dort eingeführte Bezeichnung behalten wir bei. Es zeigt sich, daß auch eine Reihe weiterer bekannter Aussagen für stationäre Prozesse auf den hier betrachteten Fall übertragbar sind. So definieren die Verf. unter Heranziehung der Größe

$$\sigma^2(s, \tau) = \inf_{\substack{m \geq 1 \\ \tau, \tau_j > 0, t_j > 0}} E \left(\left| A_r^{(n)} x(t+s) - \sum_{j=1}^m c_j A_r^{(n)} x(t-t_j) \right|^2 \right)$$

wie üblich singuläre und reguläre Prozesse $x(t)$. Die bekannte notwendige und hinreichende Kennzeichnung regulärer und singulärer stationärer Prozesse durch das

Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log f(\lambda)|}{1 + \lambda^2} d\lambda$, wobei $f(\lambda)$ die Ableitung der Spektralverteilungs-

funktion $F(\lambda)$ ist, läßt sich in gleicher Formulierung für den hier betrachteten Fall übernehmen. Wir heben noch die Übertragung des Zerlegungstheorems von Wold hervor. Keine Beweise. L. Schmetterer.

Hammersley, J. M. and K. W. Morton: Symposium on Monte Carlo methods: Poor man's Monte Carlo. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **16**, 23—38 (1954).

After a general introduction to Monte Carlo methods which are described rather than defined as methods which solve problems by subjecting random numbers to numerical processes, the authors emphasize that these methods are also useful to statisticians without complicated computing machinery and give three worked numerical examples: the critical size of a nuclear reactor, testing a quantum hypothesis, and self-avoiding random walks, i. e. those which proceed at random, but must not visit any point more than once. The question of how many of these walks there are is studied and many hints are given for an efficient way of arranging the calculations. *S. Vajda.*

Tocher, K. D.: Symposium on Monte Carlo methods: The application of automatic computers to sampling experiments. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B*, **16**, 39—75 (1954).

The author discusses in detail the generation of random elements for use on an automatic computer and mentions novel methods. He discusses the construction of samples from normal, Poisson and binomial distributions and the evaluation of a multiple integral by sampling methods. Finally, he devises a program for an automatic computer to carry out the self-avoiding random walk introduced by Hammersley and Morton (see preceding review). The discussion recorded after the paper refers to that of Hammersley and Morton as well. *S. Vajda.*

Hammersley, J. M. and K. W. Morton: Transposed branching processes. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B*, **16**, 76—79 (1954).

Suppose that a population is divided into classes and that at each of a sequence of instants each individual in class C_j gives birth to a_{ij} individuals of class C_i . Let the matrix (a_{ij}) have a unique dominant latent root λ . The ratio of successive population sizes then tends to λ . The process defined by the transposed matrix is called the transposed branching process. Sometimes it is possible to group classes together before the computation of λ is started and such grouping may be easier for the transposed branching process. The authors show this by an example which arose in a Monte Carlo study of the problem of excluded volume in high polymers, which has also led to the third example in the paper by the same authors reviewed above. *S. Vajda.*

Obuchov, A. M.: Wahrscheinlichkeitstheoretische Beschreibung stetiger Felder. *Ukrain. mat. Žurn.* **6**, 37—42 (1954) [Russisch].

Überblick über die Elemente der Theorie wahrscheinlichkeitstheoretischer Felder mit Hinweisen auf Anwendungen in der Turbulenz und der Meteorologie. *W. Szablewski.*

Birkhoff, Garret et Joseph Kampé de Fériet: Sur un modèle de turbulence homogène isotrope. *C. r. Acad. Sci., Paris* **239**, 16—18 (1954).

La vitesse d'un fluide turbulent est un vecteur fonction aléatoire de l'espace et du temps. Ses composantes $u_i(x, t, \omega)$ sont fonctions des éléments ω d'un espace Ω sur lequel est défini une mesure μ telle que $\mu(\Omega) = 1$. Les AA. supposent que: Ω est l'ensemble de tous les champs de vitesses continus de l'espace euclidien, la turbulence est homogène, isotrope, incompressible, μ est invariante pour le groupe des transformations euclidiennes. Moyennant certaines hypothèses complémentaires sur la mesure μ , ils démontrent que, à chaque fonction spectrale absolument continue, il correspond dans Ω une mesure μ et une seule définissant une statistique suivant la loi normale. La mesure μ possède la transitivité métrique (équivalence des moyennes spatiales et des moyennes statistiques). La classe des mesures μ est invariante sous l'effet de la diffusion. *J. Bass.*

Bailey, Norman T. J.: On queueing processes with bulk service. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **16**, 80—87 (1954).

Suppose that customers, arriving at random, join a queue to be served at intervals in batches of given maximum size. Let the intervals of time between successive services be independently distributed as χ^2 with an even number of degrees of freedom and let the new arrivals in any interval be given by a Poisson series. The author studies the equilibrium distribution of queue length and gives expressions for its mean and variance, and also for the mean waiting time. *S. Vajda.*

Kruskal, Martin D.: The expected number of components under a random mapping function. *Amer. math. Monthly* **61**, 392—397 (1954).

Si $f(x)$ est une application d'un ensemble fini, S , de N éléments, sur lui-même, un sous-ensemble T de S est dit invariant si $f^{-1}(T) = T$. La fonction f définit une relation de congruence sur S dont les classes sont les sous-ensembles invariants minima non vides, appelés composants de S par rapport à f . Si f est biunivoque l'application se réduit à une substitution dont les cycles sont précisément les classes de la congruence. Lorsque f est une fonction aléatoire dont les valeurs sont distribuées indépendamment avec une probabilité uniforme $1/N$, on indique ici un moyen de former méthodiquement les composants de S et on détermine leur nombre probable. M. Metropolis et S. Ulam (ce Zbl. **51**, 102) avaient déjà fait une computation analogue pour certaines fonctions „spécifiques“. *A. Sade.*

Blackwell, David: On optimal systems. *Ann. math. Statistics* **25**, 394—397 (1954).

Les règles en vigueur dans une maison de jeu étant les suivantes: 1° le gain ou la perte maxima d'un joueur ne doit pas dépasser l'unité; 2° l'espoir d'un joueur ne doit pas excéder $-u/g$, où g est son gain ou sa perte maxima et u une constante positive fixée, inférieure à un; un joueur possédant un crédit illimité veut édifier une stratégie: x_1, x_2, \dots, x_n lui assurant la plus grande probabilité d'amener au moins t unités. Alors, pour un tel système: $\Pr(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq t \text{ pour une valeur de } n) \leq [(1-u)/(1+u)]^t$. *A. Sade.*

Schelling, Hermann von: Coupon collecting for unequal probabilities. *Amer. math. Monthly* **61**, 306—311 (1954).

Exposé d'une question traitée par l'A., sans démonstration, en 1934 [*Deutsch. Statist. Zentralbl.* **26**, 137—146 (1934)]. Une firme enferme dans chaque emballage d'un certain produit un objet choisi au hasard dans un stock de k objets distincts. Quelle est la probabilité de trouver au moins une fois chacun des k objets en ouvrant n emballages 1° si les k objets ont des probabilités d'apparition différentes, données; 2° s'ils ont la même probabilité, $1/k$, d'être choisis! *A. Sade.*

Hess, F. G.: Alternative solution to the Ehrenfest problem. *Amer. math. Monthly* **61**, 323—328 (1954).

L'énoncé du problème d'Ehrenfest est le suivant: $2R$ boules numérotées sont distribuées entre deux urnes. On a d'autre part $2R$ tickets numérotés, en correspondance biunivoque avec les urnes. On tire un ticket au hasard. La boule correspondante est alors changée d'urne. On demande la probabilité pour que, après s tirages, il y ait $R + m$ boules dans la première urne, sachant qu'il y en avait initialement $R + n$. Pour résoudre ce problème, M. Kac a introduit un vecteur ξ_m (matrice à une colonne) dont toutes les composantes sont nulles, sauf la m^{e} égale à 1. Ce vecteur décrit un „état“ du système dans lequel $R + m$ boules sont dans la première urne. L'A. de la présente note définit l'état du système, d'une façon plus détaillée, par une matrice ξ_{mk} qui correspond au k^{e} état possible parmi tous ceux pour lesquels $R + m$ boules sont dans la première urne. Il montre que ξ_{mk} est le produit direct de $2R$ matrices, dont $R + m$ sont égales à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $R - m$ à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il en déduit une nouvelle mise en équation du problème qui lui fournit assez simplement la solution. *J. Bass.*

Auluck, F. C. and D. S. Kothari: Random fragmentation. *Nature* **174**, 565—566 (1954).

Luce, R. Duncan: A definition of stability for n -person games. *Ann. of Math.*, II. Ser. **59**, 357—366 (1954).

In this paper the author studies n -person games in which certain restrictions are imposed on the possibilities for changing coalitions once they are formed. He calls a game, defined by its characteristic function as introduced by v. Neumann and Morgenstern, „ k -stable“ if it is possible to find a partition of the set of players into coalitions (of one or more partners) and an imputation (i. e. a set of payments to individual players) such that (i) each coalition receives at least as much as the value of its characteristic function, (ii) this remains true for any coalition which could be formed from any existing, subject to the rule that the number of members admitted plus that of members expelled must not add up to more than k ($k \leq n-2$) and (iii) any player who participates with others in a coalition receives more than the value of his own characteristic function. It is first shown that two S -equivalent games (s. McKinsey, this Zbl. **41**, 256) are either both k -stable or both k -unstable. Then all k -stable 3- and 4-person games are determined. The author also shows that there exist constant-sum k -unstable games for all n and $k \leq n-2$ and adds further illustrative cases.

S. Vajda.

Mills, W. H.: The four person game—edge of the cube. *Ann. of Math.*, II. Ser. **59**, 367—378 (1954).

Von Neumann and Morgenstern have introduced a representation of essential normalized four-person zero-sum games which makes every such game correspond to a point of the cube $t \leq 2$, $u \leq 2$, $w \leq 2$ in (t, u, w) space. They have also given the solutions for those games which correspond to the vertices of the cube. In the present paper the author determines all solutions for games corresponding to the edge $u = w = 2$. No solution is finite for $t = 2$, but there exists a set of 6 imputations which form a „pseudo-solution“. This concept is defined as follows: A set S of imputations is a pseudo-solution if (i) no imputation of S dominates another imputation of S and (ii) all but a finite number of imputations not in S are dominated by some imputation of S . In the present case this finite number is 2.

S. Vajda.

Franckx, Éd.: La théorie des corps convexes non séparables et la théorie des jeux. *Acad. roy. Belgique. Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. **40**, 18—24 (1954).

The author considers two convex bodies, viz. (i) that defined by the vectors $\bar{X} = \sum q_i \bar{e}_i$ where $\sum q_i = 1$, $q_i \geq 0$ and \bar{e}_i ($i = 1, \dots, n$) are n orthogonal vectors in n -space, and (ii) that defined by $\bar{A} = \sum p_j \bar{A}_j$ where $\sum p_j = 1$, $p_j \geq 0$ and \bar{A}_j are m vectors, also in n -space. He calls the two bodies non-separable, if there exist two vectors \bar{X} and \bar{A} such that $\bar{A} = \lambda \bar{X}$, where λ is a non-negative scalar. — The aim of the paper is to describe the concepts of the theory of two-person zero-sum games in terms of vector products, and to give a new proof of the fundamental theorem. However, a slip in the argument makes the proof invalid.

S. Vajda.

Statistik:

• Hoel, Paul G.: Introduction to Mathematical Statistics (Wiley Publications in statistics). 2. ed. . New York: John Wiley & Sons, Inc. 1954. XI, 331 p. \$ 5.00.

Gegenüber der 1947 erschienenen ersten Auflage ist die vorliegende stark umgearbeitet und erweitert. Das bezieht sich einerseits auf den behandelten Stoff; so ist vor allem das Kapitel über die Varianzanalyse wesentlich ausführender, und es ist eine weitergehende Einführung in die parameterfreien Methoden aufgenommen worden. Andererseits ist methodisch durch die Voranstellung einer Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes und einer allgemeinen Diskussion über die logische Struktur der Grundaufgaben der Statistik eine begrüßenswerte Änderung eingetreten. Geblieben ist der Grundcharakter des Buches: Klare und scharfe Definitionen der statistischen Begriffe, starke Betonung der logischen Grundlagen. Dabei sind die an den Leser gestellten mathematischen Anforderungen gering. Tiefer liegende Sätze werden daher ohne Beweis eingeführt und ihre Bedeutung durch Anwendungen auf konkrete Beispiele gezeigt. Eine Fülle von statistischen Problemen, die als Ausgangspunkt oder als Anwendung der Theorie dienen, macht das Buch für den statistischen Anfänger besonders empfehlenswert. Die zahlreichen Übungsaufgaben sind vielleicht etwas zu einfach. — In Kap. 2 über den Wahrscheinlichkeitsbegriff als „Grundhilfsmittel“ der Statistik geht Verf. von der Laplaceschen Definition aus und führt die allgemeine Anwendbarkeit der daraus fließenden Sätze als Annahme ein. Merkmalsraum und zufällige Variable mit Verteilungs- und Dichtefunktion werden hier eingeführt. Andere Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie werden jedoch erst später behandelt, wenn sie unmittelbar gebraucht werden. Nach der Definition der statistischen Hypothese wird in Kap. 3

der Unterschied zwischen Testung und Schätzung erörtert. Bereits in dieser Stelle erscheinen die Begriffe des kritischen Bereiches, der Fehler erster und zweiter Art, der Teststärke einerseits sowie der Schätzfunktion als Punktfunktion im Merkmalraum andererseits. Auf diese logischen Grundstrukturen wird im folgenden dann Bezug genommen. Die Kap. 4–6 behandeln die Momente und die momenterzeugende Funktion mit Anwendungen auf spezielle Verteilungen. Dabei wird der Eindeutigkeitssatz der charakteristischen Funktion ohne Beweis zitiert und verwendet. In den Kap. 7–9 werden die Korrelation, Regression und die χ^2 -Verteilung behandelt. In Fortsetzung von Kap. 3 wird dann in Kap. 10 der bisherige Stoff in die allgemeinen Prinzipien der Testung und Schätzung bei festem Stichprobenumfang eingeordnet. Das Neyman-Pearson'sche Lemma wird bewiesen und das Likelihood-Verhältnis-Prinzip erläutert und an Beispielen geübt. Unverfälschtheit und Güte einer Schätzfunktion werden in Zusammenhang mit der Maximum-Likelihood-Methode diskutiert. Beim Konfidenzschluß wird besonderer Wert auf die korrekte Interpretation gelegt. Für genauere Tests werden in Kap. 11 die Verteilungen von χ^2 , s^2 , Student's t und die F -Verteilung abgeleitet und die üblichen Anwendungsbeispiele gebracht. Das Kap. 12 über Versuchsplanung ist etwas heterogen. Nach Einführung der Begriffe Randomisierung und Replikation bei Feldversuchen wird das Schema der Varianzanalyse im Falle von Anlagen mit zwei Eingängen für die beiden Grundtypen linearer Modelle besprochen. Die Testung der Hypothese der Einflußlosigkeit der Kolonnennummer wird unter Weglassung komplizierterer Beweisteile auf den F -Test zurückgeführt. Im gleichen Kapitel wird das Problem der Abnahmeprüfung im Falle eines einfachen Stichprobenschemas diskutiert und dabei Verbraucher- und Erzeugerrisiko, mittlere Ausschußgrenze usw. berechnet. In Beispielen wird die Aufgabe des minimalen Inspektionsaufwandes mit Hilfe der Dodge-Romig-Tafeln behandelt. Noch in diesem Kapitel wird als Einführung in die Sequenzanalyse der Likelihood-Verhältnis-Sequenztest ohne Beweise erläutert und an Beispielen seine Anwendung gezeigt. Das abschließende Kapitel 13 gibt eine Auswahl mathematisch besonders einfacher parameterfreier Tests: Der Stichprobenrang als Toleranzbereich, Vorzeichenstest u. ä., Wahrscheinlichkeitsverteilung für Überschreitungs- und Unterschreitungsfolgen des Medians einer Stichprobe und als weiteres Beispiel zur Prüfung der Zufälligkeit einer zeitlichen Reihe die Verwendung des zirkulären Autokorrelationskoeffizienten. Im Anhang sind eine Tabelle der Quadrate, der Normalverteilung, der Verteilungen von χ^2 , von t und von F beigegeben, während Auszüge aus anderen Tabellen im Text verstreut sind.

H. Richter.

• Monjallon, Albert: *Introduction à la méthode statistique*. Paris: Librairie Vuibert 1954. 278 p. 99 fig. 2000 fr.

An elementary text-book of statistics which deals with methods of presentation, characteristics of distributions, binomial, Poisson and normal law (the latter two are stated to be limiting cases, without proof), curve fitting, correlation, and in a chapter of 34 pages with concepts of modern statistical theory such as sampling distributions, tests of hypotheses, estimation, chi-squared test and small sample theory (t -test). The last two chapters deal with index numbers and with time series. Algebraic developments, where inserted, are given in small print and the author states that „the reader should not feel handicapped by a lack of sufficient mathematical knowledge“. — A „mathematical appendix“ contains some algebra used in the text, starting with the concepts of power and identity. In the sequel the binomial formula, differential and integral, elementary functions, series and e are mentioned. At the end of the book there are tables of the ordinates and areas of the normal curve, of χ^2 and of t . Apparently the book contains the lectures given to candidates for the French equivalent of Chartered Accountants and aims at familiarity with routines rather than at deeper mathematical understanding. Judgment on such a method will depend on one's confidence that the student can, in practice, select the appropriate routine even if he lacks a complete appreciation of the logical foundations which have led to the development of the various methods of statistical analysis.

S. Vajda.

• Kendall, M. G.: *Exercises in theoretical statistics: With answers and hints on solutions*. London: Charles Griffin and Co., Ltd. 1954. VII, 180 p. 20 s.

This valuable collection contains 400 exercises in five groups: distribution theory (100), sampling theory (100), relationship (75), estimation and inference (75) and time series (50). Many questions are taken from examination papers of the Universities of Cambridge, London, Manchester and Oxford, and of the Royal Statistical Society. The answers and hints contain also references to original research papers.

S. Vajda.

Gumbel, E. J.: *Elementare Ableitung der Momente für die Zahl der Überschreitungen*. *Mittel.-Bl. math. Statistik* 6, 164–169 (1954).

Es werden hier der Mittelwert und die höheren Momente der Anzahl der sog. Überschreitungen nach einer elementaren Methode berechnet.

H. Bergström.

Mandel, L.: Grading with a gauge subject to random output fluctuations. J. Roy. statist. Soc., Ser. B 16, 118—130 (1954).

Page, E. S.: Control charts for the mean of a normal population. J. Roy. statist. Soc., Ser. B 16, 131—135 (1954).

Prins, H. J.: Prüfmethode und Anwendungen der Poisson-Verteilung. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1954-005, 10 S. [Holländisch].

Expository article, dealing with testing the hypothesis that the means of Poisson distribution have given proportions as an example. S. Vajda.

Olkin, I. and S. N. Roy: On multivariate distribution theory. Ann. math. Statistics 25, 329—339 (1954).

Die Transformation der Zufallsvariablen, die in den Verteilungsfunktionen und im besonderen in dem mehrdimensionalen Normalgesetz vorkommen, führt zur Berechnung der Funktionaldeterminante, und dazu benutzt man verschiedene Methoden, in denen der Verf. gewisse Vereinfachungen macht, die er aus gewissen Sätzen der Matrixtheorie über die Verteilung der Nullstellen der bestimmenden Gleichungen ableitet. J. M^a. Orts.

Box, G. E. P.: Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems. I. Effect of inequality of variance in the one-way classification. Ann. math. Statistics 25, 290—302 (1954).

Es werden einige Sätze, die mit der Verteilung von quadratischen Formen in mehrdimensional normal verteilten Variablen zusammenhängen, angegeben und einige Approximationen numerisch untersucht. Die Resultate werden angewandt zur Untersuchung der Abweichungen, die sich ergeben, wenn von den Voraussetzungen der einfachen Varianzanalyse die Gleichheit aller Klassen-Populations-Varianzen als einzige nicht erfüllt ist. In diesem Falle ist die Zwischen-Klassen-Quadratsumme verteilt wie $\sum_{i=1}^k \hat{\lambda}_i \chi^2(n_i)$, wobei $\chi^2(r)$ unabhängig voneinander mit r Freiheitsgraden χ^2 -verteilte Größen bedeuten, und $\hat{\lambda}_i$ Eigenwerte der Matrix $U = N^{-1} \{ \delta_{ij} \sigma_i^2 N - \sigma_i^2 n_i \}$ sind (δ_{ij} = Kronecker-Symbol, σ_i^2 = Populationsvarianz in der i -ten Klasse, n_i = Anzahl der Beobachtungen in der i -ten Klasse, $N = \sum_{i=1}^k n_i$);

die Binnen-Klassen-Quadratsumme ist unabhängig davon verteilt wie $\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \chi^2(n_i - 1)$.

Das Ergebnis ist, daß die Abweichungen i. a. nicht groß sind, wenn die Besetzungszahlen in den Klassen gleich sind, daß aber bei ungleichen Klassen schwerwiegende Abweichungen auftreten können. M. P. Geppert-O. Ludwig.

Johnson, N. L.: Sequential procedures in certain component of variance problems. Ann. math. Statistics 25, 357—366 (1954).

Let two normal populations with variances σ_1^2, σ_2^2 respectively be given and let it be required to test $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 = \theta_1$ against θ_2 . D. R. Cox (this Zbl. 46, 365) has constructed a sequential procedure (I) which is equivalent to a sequential likelihood ratio test based on a sequence of variables which are not independent, so that Wald's approximate formula for the average sample number (ASN) can not be applied. The author describes two alternative procedures (II and III), one of them using a slightly different sampling scheme from I and the other using the same scheme, but a different decision rule. For II and III the ASN can be determined (approximately) by Wald's formula and tables of these ASN are given. The author then deals with three analogous procedures for discriminating between two ratios of variance components in a one-way classification. S. Vajda.

Silvey, Samuel D.: The asymptotic distributions of statistics arising in certain nonparametric tests. Proc. Glasgow math. Assoc. 2, 47—51 (1954).

The author considers the randomisation distribution of certain statistics used in the Analysis of Variance and in the problem of m rankings and shows that they

are asymptotically normal. It follows, in particular, that the randomisation test of the Analysis of Variance is asymptotically equivalent to the normal theory test, and that Kendall's coefficient of concordance is asymptotically normal.

S. Vajda.

Barrow, D. F. and A. C. Cohen jr.: On some functions involving Mill's ratio. *Ann. math. Statistics* **25**, 405—408 (1954).

Let Z (a function of h) be defined as

$$e^{-h^2/2} \int_h^\infty e^{-t^2/2} dt \text{ and } \psi(h) \text{ as } \frac{1-h(Z-h)}{(Z-h)^2}.$$

The author shows that, for finite h , $\psi'(h) > 0$, $2(Z-h)^2 - [1-h(Z-h)] > 0$ and $1 < \psi(h) < 2$. Also, $\lim_{h \rightarrow -\infty} \psi(h) = 1$ and $\lim_{h \rightarrow \infty} \psi(h) = 2$.

S. Vajda.

Sundrum, R. M.: On Lehmann's two-sample test. *Ann. math. Statistics* **25**, 139—145 (1954).

Lehmann (this Zbl. **45**, 409) suggested a test for the hypothesis that two independent random samples come from the same population. It depends on the fact, that, when X, X' ; Y, Y' are independently drawn from populations with continuous distribution functions F and G respectively, then the probability that $\max(X, X') < \min(Y, Y')$ is $\geq \frac{1}{3}$, and $= \frac{1}{3}$ only when $F = G$. The author derives an alternative expression for Lehmann's test statistic, gives formulae for its expected value and its variance, and tabulates the distribution for the case $F = G$ for some small samples.

S. Vajda.

Hajós, G. and A. Rényi: Elementary proofs of some basic facts concerning order statistics. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **5**, 1—6 und russische Zusammenfassg. **6** (1954).

Die Arbeit hat hauptsächlich methodischen Charakter und gibt elementare Beweise über die Anordnungsstatistiken $\eta_1^*, \dots, \eta_m^*$ einer Stichprobe des Umfanges n von der in $0 \leq \eta \leq 1$ gleichverteilten zufälligen Größe η . Nach dem Beweis, daß die η_k^* eine Markoffsche Kette bilden, werden die marginalen und bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten abgeleitet. Bei $\eta_0^* = 0$ und $\eta_{m+1}^* = 1$ sind die Differenzen $\delta_k = \eta_k^* - \eta_{k-1}^*$ für $k = 1, \dots, n+1$ äquivalente Variable, woraus folgt, daß $\eta_{i+k}^* - \eta_i^*$ derselben Beta-Verteilung wie η_k^* gehorcht. Entsprechendes gilt für die Quotienten der η_k^* . Schließlich ergibt sich die Unabhängigkeit der gleichverteilten Variablen $\xi_k = (\eta_k^*/\eta_{k+1}^*)^k$ bei $k = 1, \dots, n$, so daß die $\vartheta_k = -\ln \xi_k$ mit $0 \leq \vartheta_k < \infty$ unabhängig sind mit der übereinstimmenden Dichte $1 - e^{-x}$. Wegen $\ln \eta_k^* = -\sum_{j=k}^n \frac{1}{j} \vartheta_j$ bilden daher die $\ln \eta_k^*$ eine additive Markoffsche Kette. *H. Richter.*

Albert, G. E.: On the computation of the sampling characteristics of a general class of sequential decision problems. *Ann. math. Statistics* **25**, 340—356 (1954).

In the first part of the paper the author derives integral equations for the probabilities that the terminal decision d_i ($i = 1, \dots, r$) is made at stage $k = (0, 1, \dots)$ if x_0 is the starting point of a sequential experiment, the decision probabilities at each stage being known. (An assumption is made to ensure that the duration of the experiment is finite with probability 1.) He obtains bounds for the solutions and for the expected sample size by a method generalizing that of Kemperman (this Zbl. **38**, 298) and Snyder [*Nucleonics* **6**, 46—50 (1950)]. In the second part the results are applied to Wald's sequential probability ratio test for simple alternatives for a parameter, for which a sufficient statistic exists. It turns out that the bounds for the operating characteristics (power function) are closer than those given by Wald for the special case of the mean of a normal distribution.

S. Vajda.

Dumas, Maurice: Épreuve économique permettant de choisir entre deux hypothèses. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 40—42 (1954).

Dans un précédent travail, (ce Zbl. **52**, 152), l'A. avait indiqué une méthode permettant de choisir entre deux hypothèses par la voie la plus économique. Dans

la présente note, il indique un procédé par tâtonnement grâce auquel les difficultés pratiques relatives à la construction du graphique sont surmontées. Exemple.

A. Sade.

Kudō, Hirokichi: **Dependent experiments and sufficient statistics.** Natur. Sci. Rep. Orchanomizu Univ. 4, 151—163 (1954).

This article is a contribution to Blackwell's theory for comparison of experiments concerned with one and the same finite set of hypotheses. An experiment is a space X provided with a measure vector μ , i. e. n alternative probability measures μ_1, \dots, μ_n corresponding to equally many fundamental hypotheses H_1, \dots, H_n (we omit the measure theoretical details). To each $x \in X$, let there be given a convex body $A(x)$ in R_n [$A(x)$ is the set of possible actions when x has turned up; the coordinate a_i of a point $a \in A(x)$ may be interpreted as the loss or gain from action a when H_i is true]. A decision function δ is a mapping from X onto R_n with values $a(x) \in A(x)$. To every δ corresponds a „risk point“ v with coordinates $v_i = E(a_i(x) | \mu_i)$. The risk set $R(\mu, A(x))$ is the set of all risk points attainable by means of some δ . Any mapping $t = t(x)$ of X onto a space T generates n measures μ, t^{-1} on T and hence a new experiment involving the same fundamental hypotheses as the first one. Blackwell's results imply that t is a sufficient statistic, in Fisher's sense, if and only if $R(\mu t^{-1}, A) = R(\mu, A)$ for every constant convex A . According to the main theorem of the present paper, it is even enough that $R(\mu t^{-1}, I) = R(\mu, I)$ where I is the line segment between $(0, \dots, 0)$ and $(1, \dots, 1)$. — The introduction of a varying action set $A(x)$ is a new contribution. G. Elfving.

Cohen jr., A. C.: **Estimation of the Poisson parameter from truncated samples and from censored samples.** J. Amer. statist. Assoc. 49, 158—168 (1954).

Für die Schätzung des einzigen Parameters der Poissonverteilung ergibt die Maximum-likelihood-Methode bekanntlich den Stichprobenmittelwert. Verf. untersucht das analoge Schätzproblem für gestutzte und zensierte Stichproben. Verf. versteht unter gestutzten Stichproben (truncated samples) solche, bei denen die Anzahl der durch den einschränkenden Prozeß ausgeschlossenen Beobachtungen unbekannt ist, und unter zensierten Stichproben (censored samples) solche, bei denen die Zahl der in der Stichprobe gefundenen Stücke bekannt ist, aber bei einigen Stücken die Meßwerte fehlen. Die fehlenden Werte sollen stets an den Enden der Verteilung liegen (linksseitig, rechtsseitig oder beiderseitig gestutzte bzw. zensierte Stichproben (singly and doubly truncated bzw. censored samples). Für zweiseitig gestutzte Stichproben vom Umfang n erhält man die Schätzung \hat{m} aus der Gleichung

$$(1/n) dL/dm = \bar{x}/m - 1 - [f(c-1) - f(d)]/[P(c) - P(d+1)] = 0,$$

(L = Logarithmus der Plausibilität (likelihood-Funktion), \bar{x} = Mittelwert der gestutzten

Stichprobe, c und d Stützpunkte, $f(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$, $P(c) = \sum_{x=c}^{\infty} \frac{e^{-m} m^x}{x!}$). Die Gleichungen

für einseitig gestutzte Stichproben erhält man für $d \rightarrow \infty$ bzw. $c = 0$. Sind die Anzahlen der nicht gemessenen Werte an beiden Enden bekannt (n_1 links, n_2 rechts), so gilt

$$(1/n) dL/dm = \bar{x}/m - 1 - (n_1/n) f(c-1)/[1 - P(c)] + (n_2/n) [f(d)/P(d+1)] = 0.$$

Ist nur die Gesamtzahl n_0 der nicht gemessenen Werte bekannt, nicht aber n_1, n_2 , so gilt

$$(1/n) dL/dm = \bar{x}/m - 1 + (n_0/n) [f(d) - f(c-1)]/[1 - P(c) + P(d+1)] = 0.$$

Zur Berechnung der asymptotischen Varianzen von \hat{m} wird in allen Fällen d^2L/dm^2 angegeben. Anwendungen werden an Hand einer Tabelle über Zählrohrversuchsergebnisse von Rutherford und Geiger erläutert.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

Birnbaum, Allan: **Statistical methods for Poisson processes and exponential populations.** J. Amer. statistic. Assoc. 49, 254—266 (1954).

Bei kontinuierlicher Beobachtung von Ereignissen, z. B. bei Messungen mit dem Geigerzähler, spricht man von einem Poisson-Prozeß, wenn die (Zeit-)Punkte, in denen die x Ereignisse in einem (Zeit-)Intervall der Länge t eintreten, zufällig verteilt (unabhängig gleichverteilt) sind zwischen 0 und t . Ein Poisson-Prozeß kann auf eine der folgenden äquivalenten Weisen charakterisiert werden: a) Die „Wartezeiten“ u zwischen zwei aufeinander folgenden Ereignissen sind unabhängig verteilt mit Verteilungsdichten $g(u) = (1/\theta) \cdot e^{-u/\theta}$, $u \geq 0$, $\theta = E(u)$. b) $y = x(t_2) - x(t_1)$

ist für jedes (Zeit-)Intervall $d = t_2 - t_1$ Poisson-verteilt mit $d \cdot \lambda = d/\theta$, d. h. $p(y) = e^{-d \cdot \lambda} \cdot (d \cdot \lambda)^y / y!$, $y = 0, 1, \dots$. Es werden verschiedene Methoden zur Schätzung von λ bzw. θ , zur Bestimmung von Confidenzintervallen und Prüfung von Hypothesen bezüglich λ bzw. θ gegeben. Beim Vergleich zweier Poisson-Prozesse kann es auf λ_1/λ_2 ankommen (z. B. bei Prüfung der Wirksamkeit einer Strahlenschutzvorrichtung) oder auf $\lambda_1 - \lambda_2$. Auch hier werden in beiden Fällen mehrere Methoden beschrieben; zum Schluß wird gezeigt, wie beim Vergleich von mehr als zwei Poisson-Prozessen zu verfahren ist.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

Wollowitz, J.: Estimation of the components of stochastic structures. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 602—606 (1954).

Let $x_1 = \xi + v_1$ and $x_2 = \alpha + \beta \xi + v_2$ (α and β are constants, and ξ , v_1 und v_2 are random variables). The author announces results, to be proved elsewhere, concerning strongly consistent estimates of the constants, of the covariances of v_1 and v_2 and of the distribution function of ξ , as functions of independent observations on (x_1, x_2) with the same joint distribution function. The estimation of the distribution is performed by finding a function whose „distance“ from it converges to zero with probability one, as the number of observations increases. [„Strongly consistent“ was called „superconsistent“ in the author's earlier papers (v. g. this Zbl. **55**, 365).]

S. Vajda.

Wollowitz, J.: Estimation by the minimum distance method in nonparametric stochastic difference equations. Ann. math. Statistics **25**, 203—217 (1954).

The following problems are considered: A. Estimate α in the relation $x_i = u_i + \alpha u_{i-1}$, $|\alpha| < 1$. B. Estimate β in a stationary process $x_i - v_i = \beta(x_{i-1} - v_{i-1}) + u_i$. C. Estimate γ in a stationary process $x_i = \gamma x_{i-1} + u_i$. — In all these problems the u_i and v_i are sequences of independent, unobservable random variables, with a common distribution function for all u_i and a common distribution function for all v_i . The estimators must be Borel-measurable functions of x_1, \dots, x_n such that they are „superconsistent“, i. e. converge for $n = \infty$ to the true parameter value with probability one. The author defines types of estimators which solve the problems; these are such that they minimize the „distance“ between suitably chosen distribution functions. Use is made of the proofs of the generalized Glivenko-Cantelli theorem, proved in this Zbl. **55**, 365.

S. Vajda.

Matusita, Kameo: On the estimation by the minimum distance method. Ann. Inst. statist. Math. **5**, 59—65 (1954).

Let $p_i (> 0)$ be the probability of the event E_i and n_i/n its relative frequency among n observations. The author derives upper limits for the probability P_n that $\sum_i \left[\sqrt{p_i} - \left| \frac{n_i}{n} \right| \right]^2$ exceeds a given number and gives conditions for the probability of $\lim P_n = 0$ to be unity. He shows how a superconsistent estimate (cf. Wollowitz, this Zbl. **51**, 370) can be constructed and proves that minimum chi-squared provides such an estimate. He also studies the estimation of structural parameters and adds a few remarks about metrics in parameter space.

S. Vajda.

Graybill, Franklin A.: On quadratic estimates of variance components. Ann. math. Statistics **25**, 367—372 (1954).

Es seien Y_{ijk} ($i = 1, \dots, N_1$; $j = 1, \dots, N_2$; $k = 1, \dots, N_3$) Stichproben, und es gebe eine lineare Relation $Y_{ijk} = \mu + a_i + b_{ij} + e_{ijk}$, wo a_i , b_{ij} und e_{ijk} unabhängige Wahrscheinlichkeitsgrößen mit den Streuungen bzw. σ_a^2 , σ_b^2 und σ_e^2 sind. Eine quadratische Form von den Stichproben wird als nicht schief bezeichnet, wenn Q den Mittelwert σ_b^2 hat, als die beste nicht schiefe Abschätzung dieser Art, wenn die Streuung von Q so klein wie möglich ist. Es wird gezeigt, daß diejenige quadratische Form, die in der Streuungsanalyse auftritt, die beste nicht schiefe Abschätzung von σ_b^2 ist. Das Entsprechende gilt für allgemeinere lineare Zerlegungen von Stichproben.

H. Bergström.

Petrov, V. V.: Über die Methode der kleinsten Quadrate und ihre Extremaleigenschaften. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 1 (59), 41—62 (1954) [Russisch].

y, x_1, \dots, x_n seien die „wahren“ Werte von Meßgrößen, die einer linearen Beziehung $y = \sum_{k=1}^n x_k x_k$ genügen sollen. Kolmogoroff [Uspechi mat. Nauk **1**,

57—70 (1946)] hat die Schätzung der Parameter χ_k nach der Methode der kleinsten Quadrate untersucht und sich hierbei einer durchsichtigen Methode bedient, welche auf der Betrachtung linearer Vektorräume beruht. Er setzt voraus, daß die einem Verteilungsgesetz unterworfenen Stichprobengrößen y_1, \dots, y_N die gleiche Streuung besitzen. Der Verf. verzichtet auf diese letzte Voraussetzung und behandelt nach den Ideen von Kolmogoroff die Fälle bekannter Streuungen bzw. bekannter Gewichte. Hervorgehoben wird der Sonderfall unabhängig normal verteilter zufälliger Variabler y_i . In diesem Fall wird nachgewiesen, daß die durch die Methode der kleinsten Quadrate gewonnenen Schätzfunktionen wirksam sind. Die Untersuchungen werden auch auf den Fall ausgedehnt, daß zwischen den χ_k lineare Beziehungen bestehen. Den Abschluß bildet die Konstruktion von Konfidenzintervallen für die Parameter χ_k . Nicht alle Ergebnisse sind neu, doch fehlen fast alle Literaturhinweise. L. Schmetterer.

Downton, F.: Least-squares estimates using ordered observations. *Ann. math. Statistics* **25**, 303—316 (1954).

Let the random variable x be of form $x = at - b$ where t has a known density $f(t)$ whereas a, b are unknown parameters. It is well-known that the mean μ and the standard deviation σ of x may be estimated by the method of least squares applied to an ordered sample of x 's. The present paper provides explicit estimation formulas for the case $f(t) = pt^{p-1}$ ($0 < t < 1; p \geq 1$). Applications, including a limit passage, are given to the right triangular, exponential, and Pearson III distributions. G. Elfving.

Sarhan, A. E.: Estimation of the mean and standard deviation by order statistics. *Ann. math. Statistics* **25**, 317—328 (1954).

This article is concerned with the same estimation procedure as the paper by Downton reviewed above. The method is applied to the normal, rectangular, triangular ($f = 1 - x$) and double exponential ($f = \frac{1}{2}e^{-x}$) distributions. There is a numerical comparison of the resulting „best“ as well as some other linear estimators for μ and σ , the estimators being applied to all the above-mentioned populations. G. Elfving.

Basu, D.: On the optimum character of some estimators used in multistage sampling problems. *Sankhya* **13**, 363—368 (1954).

Let N_j be M population units and θ_j a parameter which is estimated by t_j . The author constructs estimators of a linear form of the θ_j and estimates their standard errors, assuming that the t_j are determined for m units which are selected from the M units with or without replacement, and with equal or unequal probabilities. He explains also in which sense his estimators are „best“. S. Vajda.

Sprott, D. A.: A note on balanced incomplete block designs. *Canadian J. Math.* **6**, 341—346 (1954).

It is shown how, by the use of Galois Fields $GF(r)$, balanced incomplete block designs with the following combinations of parameters can be constructed:

v	b	r	k	λ
$mk + 1$	$m(mk + 1)$	mk	k	$k - 1$
$2m(2\lambda + 1) + 1$	mv	$m(2\lambda + 1)$	$2\lambda + 1$	λ
$2m(2\lambda - 1) + 1$	mv	$2m\lambda$	2λ	λ
$4m(4\lambda + 1) + 1$	mv	$m(4\lambda + 1)$	$4\lambda + 1$	λ

In all these cases the expression for v must be the power of a prime and in the last case there is the condition that for one (and hence for all) primitive elements α of $GF(r)$ there be 2λ even and λ odd powers of α among the values $\alpha^{m(s-1)} - 1 = \alpha^{rs}$ ($s = 1, 2, \dots, 2\lambda$). S. Vajda.

Roy, Purnendu Mohon: Inversion of incomplete block designs. *Bull. Calcutta math. Soc.* **46**, 47—58 (1954).

The inversion of a design consists of exchanging the meaning of the parameters b and c , and also of k and r . Theorems are derived of which the following is typical: Inversion of an affine resolvable incomplete block design with parameters $c = n^2 m$, $b = nr$, $r = k = mn$ will always result in a partially balanced incomplete block.

design with parameters given in the paper. Conditions are also given which ensure that the inversion of a partially balanced incomplete block design leads back to a balanced incomplete block design. *S. Vajda.*

Banks, Charlotte: The factorial analysis of crop productivity. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **16**, 100—111 (1954).

Quenouille, M. H.: Checks on the calculation of the main effects and interactions in a 2^s factorial experiment. *Ann. Eugenics* **19**, 151—152 (1954).

Baker, G. A.: The effect of selection on linear functions of normally distributed correlated variables on the distributions of other linear functions. *Ann. Inst. statist. Math.* **5**, 91—95 (1954).

Foster, F. G. and A. Stuart: Distribution-free tests in time-series based on the breaking of records. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **16**, 1—22 (1954).

An observation in a time series is called a lower (upper) record if it is smaller (greater) than all previous observations. The sum (s) and the difference (d) of the numbers of upper and lower records are used to provide, respectively, tests for trend in location and in dispersion. The joint frequency distribution of s and d is obtained and those of s and of d are illustrated by tables. The authors construct also a „roundtrip“ test by counting records in both directions. The power functions of the tests are tabulated from results obtained on an electronic computer, and they are compared with those of other parameter-free tests of randomness. — Various aspects of the tests were discussed after the reading of the paper at the Royal Statistical Society and extracts of the discussion are also given. *S. Vajda.*

Gurland, John: An example of autocorrelated disturbances in linear regression. *Econometrica* **22**, 218—227 (1954).

Let the random vector y — interpreted as a segment of a time series — be of form $y = X\theta + u$ where the coefficient matrix X is known, the parameter vector θ is to be estimated, and the disturbance vector u satisfies $E(u) = 0$, $\text{cov } u = \Omega$. Any — wrong or correct — specification Ω^* of Ω yields a least squares estimator θ^* the efficiency of which depends on how realistic the assumption Ω^* is. The present article is concerned with the Markovian case $u_t = \rho u_{t-1} + v_t$, $E(u_s v_t) = E(v_s v_t) = 0$ ($s < t$), with reference to a paper by Cochran and Orcutt (this *Zbl.* **33**, 82); the author investigates the effect of the „start“ of the u -series which, in the applications, need not be stationary. *G. Elfving.*

Blum, Julius R.: Approximation methods which converge with probability one. *Ann. math. Statistics* **25**, 382—386 (1954).

Perfectionnement d'un problème de Robbins-Monro et Wolfowitz, où la variable converge avec une probabilité θ vers une valeur pour laquelle la fonction de régression devient égale à α donné. *A. Sade.*

Kallianpur, Gopinath: A note on the Robbins-Monro stochastic approximation method. *Ann. math. Statistics* **25**, 386—388 (1954).

Adaptation au même problème d'une méthode proposée par Robbins et Monro. *A. Sade.*

Klein, Hans: Über die Streugrenzen statistischer Verteilungskurven. Eine kritische Betrachtung zur Methodik der Großzahlforschung. *Mitteil.-Bl. math. Statistik* **6**, 140—163 (1954).

The author deals with the standard error in fitting lines on probability paper to observations which are tested for normality. This is a method used in „Großzahl“-forschung, a type of industrial statistical method due to Davies and Beckel. The paper starts with a description of the mathematical foundations of the method and concludes with critical remarks. *S. Vajda.*

Freytag, H.: Rechnerischer Ausgleich von Meßkurvenscharen. *Ingenieur-Arch.* **22**, 194—202 (1954).

Es handelt sich darum, die Abhängigkeit einer physikalischen Meßgröße m von zwei voneinander unabhängigen Einflußgrößen f und t numerisch zu erfassen. Eine Approximation der Messungswerte $m = F(f, t)$ durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck ist dabei nicht in Betracht gezogen. Vorausgesetzt wird die Möglichkeit, in den verschiedenen Messungsreihen

jeweils eine der beiden Einflußgrößen konstant zu halten derart, daß die Gesamtheit der ausgeführten Messungen sich in zwei Scharen von Meßkurven darbietet, in denen die beiden Einflußgrößen abwechselnd als unabhängige Veränderliche und als Parameter auftreten. Ferner wird angenommen, daß durch ein geeignetes Meßverfahren Differenzen der Größen m unmittelbar und mit wesentlich größerer Genauigkeit als die entsprechenden Absolutwerte gemessen werden können. In jeder der beiden Meßkurvenscharen ist dann der von der Variation der betreffenden Einflußgröße herrührende Gang der Meßgröße wesentlich genauer bekannt als der jeweilige Anfangswert einer Meßreihe. Die Ermittlung eines in sich stimmigen Wertesystems $m = F(j, t)$ führt auf eine Ausgleichungsaufgabe, die nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt wird. Wenn insbesondere in den Meßreihen $t = \text{konst.}$ dieselben Werte für j und t gewählt werden wie in den Reihen $j = \text{konst.}$, so weist die Koeffizientenmatrix der Normalgleichungen zahlreiche Nullstellen auf. Dadurch ist es dem Verf. möglich gewesen, das Ergebnis einer solchen Ausgleichung für eine beliebige Zahl von Meßpunkten in Formeln auszudrücken, die dem Praktiker die Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen ersparen sollen. *W. Hofmann.*

Wecken, Fr.: Über die glatte Ausgleichung von Wertefolgen. Z. angew. Math. Mech. **34**, 305—306 (1954).

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Lah, Ivo: A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics. Inst. Actuários Portug., Bol. **9**, 7—15 (1954).

Es seien $(x)_n = x(x-1) \cdots (x-n+1)$ und $[x]_n = x(x+1) \cdots (x+n-1)$. Der Verf. definiert im Anschluß an die Stirlingschen Zahlen 1. und 2. Art die folg.

Zahlklasse s_n^r durch die Definitionsgleichung: $[x]_n = \sum_{r=1}^n (-1)^r s_n^r (x)_r$. Diese

Zahlen haben ganz ähnliche Eigenschaften wie diejenigen von Stirling. Beispielsweise genügen sie der Differenzengleichung $s_{n+1}^r = s_n^{r-1} - (n+r) s_n^r$ und können explizite dargestellt werden. Man erhält einen Zusammenhang zwischen die-

sen Zahlen mit der nachschüssigen Leibrente a_x : $a_x = \frac{1}{i} \sum_{t=1}^{\omega-x} \frac{1}{l_{x+t}} (1+i)^{-t}$, wenn man diesen Ausdruck nach i differenziert. *W. Saxer.*

Meidell, Birger: Beitrag zur Anwendung des Mittelwertsatzes auf versicherungsmathematische Probleme. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. **2**, 97—117 (1954).

Ausgehend vom ersten Mittelwertsatz werden Näherungsformeln abgeleitet für den Barwert der lebenslanglichen Leibrente bei Variation des Zinsfußes (Zinsfußproblem). *E. Zwinggi.*

Lang, Reinhard: Bewertung von Sterblichkeitsbeobachtungen an kleinem Material. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. **2**, 7—37 (1954).

Helbig, Manfred und Hans Storck: Bewertung von Sterblichkeitsbeobachtungen an kleinem Material. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. **2**, 39—59 (1954).

Beide Arbeiten stellen die Lösung einer von der Deutsch. Ges. für Versicherungsmath. gestellten Preisaufgabe dar. In der Versicherungspraxis sind die Beobachtungsmaterialien zur Gewinnung der Sterbewahrscheinlichkeiten meist klein; daraus erhebt sich die Frage, ob und mit welcher Zuverlässigkeit die Ergebnisse der Auswertung für versicherungstechnische Berechnungen verwendet werden dürfen. Die Verf. beschreiben die den üblichen Prüfverfahren zugrunde liegenden statistischen Annahmen und zeigen die Anwendung an Hand numerischer Daten. *E. Zwinggi.*

Lublin, Mogens: La loi d'âge commun et la formule de Makeham. Bull. trimestr. Inst. Actuaires Français **65**, 21—29 (1954).

Verallgemeinerung des Satzes betreffend die Makehamsche Eigenschaft: sind die Sterbegesetze $l_i(x_i - t)$ von n Individuen nicht identisch, so ist die Makehamsche Eigenschaft gültig, wenn von den l_i entweder $n-1$ exponentiell und eine beliebig, oder m ($0 \leq m \leq n-2$) exponentiell und die übrigen Makehamsche Sterbegesetze (mit demselben Wert der Parameter c , samt Gaußschem Grenzfall $c=0$) sind. *B. de Finetti.*

Denffer, Herbert von: Über die zufälligen Sterblichkeitsschwankungen bei Untersuchungen an erhöhten Risiken. *Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math.* **2**, 71—84.

Mathen, K. K. and S. J. Poti: An adjustment for the effect of changing birth rates on infant mortality rates. *Sankhya* **13**, 417—422 (1954).

Lah, Ivo: Die Ableitungen der Versicherungswerte nach einzelnen Zinsmaßen. *Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math.* **2**, 85—92 (1954).

Verf. untersucht die Ableitung von Versicherungswerten (a_x , A_x , Prämie usw.) nach dem Aufzinsungsfaktor r , der Zinsintensität δ und dem Diskontierungsfaktor v .

E. Zwinggi.

Bennett, J. H.: The distribution of heterogeneity upon inbreeding. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **16**, 88—99 (1954).

• Jensen, Arne: A distribution model applicable to economies. Kopenhagen: Munksgaard 1954. 99 p.

The author gives a survey of known distributions of stable states. He distinguishes between schemes derivable from Markov chains on the one hand and from Markov processes on the other. He stresses also the distinction between distributions which hold after a given time and those which apply when a given step occurs first; this is analogous to the distinction between direct and inverse sampling. — Examples are given in about one third of the study of applications to economic models, to the theory of demand, the theory of risk (gambler's ruin), and to traffic programming.

S. Vajda.

Debreu, Gerard: Valuation equilibrium and Pareto optimum. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **40**, 588—592 (1954).

A valuation equilibrium (V. E.) is a state of an economic system in which no consumer can improve his position without spending more and no producer can increase his profit. A Pareto optimum (P. O.) is a state where no consumer can improve his own position without worsening that of another. The author constructs a mathematical model of the system and gives conditions for a V. E. to be a P. O., and for a P. O. to be a V. E. These theorems are generalisations of earlier results due to Arrow (this *Zbl.* **44**, 346) and of the author (this *Zbl.* **45**, 414).

S. Vajda.

Arrow, Kenneth J. and Gerard Debreu: Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica* **22**, 265—290 (1954).

A model of an abstract economy is constructed as a generalisation of the concept of a game and two sets of assumptions are shown to lead each to a competitive equilibrium. The assumptions are weaker and presumably closer to reality than those made by Wald for a similar theorem [*Z. Nationalökonomie* **7**, 637—670 (1936)].

S. Vajda.

Geometrie.

• Eulerus, Leonhardus: Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica. Vol. XXVII. *Commentationes geometricae.* (Vol. 2). Ed. A. Speiser. Auctoritate et impensis Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae. Zürich: Orell Füssli 1954. XLVIII + 400 p.

Dieser Band der Euler-Ausgabe, der zweite der geometrischen Untersuchungen, enthält 19 Abhandlungen (Nr. 3, 5, 23, 75, 79, 83, 85, 106, 129, 133, 166, 169, 173, 214, 215, 220, 224, 298, 300 des *Enestroemischen Verzeichnisses*). Vorangestellt ist als Einleitung des Herausgebers eine historisch-kritische Würdigung der abgedruckten Arbeiten.

Galatassi, Vittorio Emanuele: Tendenze qualitative nel progredire della geometria. *Periodico Mat., IV. Ser.* **32**, 1—15 (1954).

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

Zappa, Guido: Sui piani grafici finiti h -1-transitivi. *Boll. Un. mat. Ital.* **III. Ser.** **9**, 16—24 (1954).

Eine projektive Ebene wird (nach Baer) h - l -transitiv genannt, wenn für die beiden verschiedenen Geraden h, l die Gruppe der zentralen Kollineationen mit Achse l und Zentrum auf h transitiv ist auf der Menge der weder zu h noch zu l gehörigen Punkte. Die endlichen h - l -transitiven Ebenen lassen sich nun durch die sämtlichen Gruppenpaare S, H mit den folgenden Eigenschaften darstellen: S ist Vektorraum einer Dimension d über dem Primkörper der Charakteristik p , und H besteht aus $p^d - 1$ Automorphismen von S , welche = vom identischen Automorphismus abgesehen = außer dem neutralen Element von S kein Fixelement besitzen. Dabei sind dann S, H isomorph zu den Gruppen der zentralen Kollineationen mit Achse l und Zentrum $h \cap l$ bzw. P , wenn P irgendein nicht auf l liegender Punkt von h ist. Die Ebene ist genau dann desarguessch, wenn H zyklisch ist.

G. Pickert.

Lombardo-Radice, Lucio: Sui sistemi cartesiani di coordinate dei piani grafici κ - l -transitivi. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 24—29 (1954).

Mit Hilfe der Baerschen Koordinatendarstellung der h - l -transitiven Ebenen [Amer. J. Math. 64, 137—152 (1942)] werden die von Zappa (s. vorst. Ref.) gewonnenen Ergebnisse in sehr einfacher Weise hergeleitet.

G. Pickert.

Leisenring, Kenneth B.: A theorem in projective n -space equivalent to commutativity. Michigan math. J. 2, 35—40 (1954).

Verf. nennt eine Geometrie kommutativ, wenn für ihre Punkte ein Koordinatenkalkül eingeführt werden kann, in dem die Multiplikation kommutativ ist, und gibt folgende Verallgemeinerung des Satzes von Pappus (Theorem C): S_n sei ein kommutativer projektiver Raum der Dimension $n > 1$, und $T = \{t_i\}$, ($i = 1, \dots, n+1$), sei eine Menge von $n+1$ Punkten in einer Hyperbene H_0 von S_n . Keine echte Untermenge von T sei abhängig. Durch jede Punktmenge $A_k^2 = A_{k_1} \dots A_{k_n} = T - t_{k_1} \dots t_{k_n}$ ($k \neq m$) seien zwei von H_0 verschiedene Hyperebenen H_k^m und H_m^k gelegt. Dann bestimmen für jedes k die n Hyperebenen H_k^m ($m = 1, \dots, n+1$; $m \neq k$) einen Punkt p_k , ebenso die H_k^m ($k = 1, \dots, n+1$; $k \neq m$) einen Punkt q_m , und es gilt: Besteht Abhängigkeit zwischen den $n+1$ Punkten p_k , dann auch zwischen den q_m , und zwar vom gleichen Rang. Der Pappusche Satz ergibt sich hieraus für $n=2$ (Theorem B). Der Beweis wird in projektiven Koordinaten unter Verwendung Grassmannscher äußerer Produkte geführt. — Für ungerades n besteht, wie Verf. zeigt, ein einfacherer Satz (Theorem A'). Er besagt unter sonst gleichen Prämissen, daß für $H_k^m = H_m^k$, d. h. wenn man durch jede der Mengen A_k^2 nur eine Hyperebene legt, die erzeugten $n+1$ Punkte p_k ($= q_k$) abhängig sind. Daß die Aussagen je nach der Parität von n verschieden sind, beruht auf dem Verschwinden der schief-symmetrischen Determinanten ungerader Ordnung. Der Sonderfall $n=3$ des Theorems A' (Theorem A) liefert einen bekannten Satz (vgl. H. F. Baker, Principles of geometry I, London 1922, S. 62), welcher die Existenz Möbiusscher Tetraederpaare besagt. Zwischen den Theoremen A und B besteht gegenseitige Abhängigkeit, was in Richtung $B \rightarrow A$ von Baker (l. c. S. 61) und für $A \rightarrow B$ vom Ref. [J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 40, 2. Abt. 48—50 (1931); Lösung der Aufg. 63 (Reidemeister)] gezeigt worden ist. Die Vermutung liegt nahe, daß dasselbe für Theorem A' ($n=2k+1$) und Theorem C ($n=2k$) gilt.

E. Schönhardt.

Skopec, Z. A.: Einige Typen ebener und räumlicher Vierecke im Lobačevski-schen Raum. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 2 (60), 179—183 (1954) [Russisch].

Verf. betrachtet in der hyperbolischen Ebene Vierecke, bei denen die Summen zweier Seiten gleich der der übrigen beiden Seiten sind, und nennt solche Vierecke von 1. oder 2. Art, je nachdem ob die Seiten, deren Summen gebildet werden, benachbart sind oder sich gegenüberliegen. Auf einfache Weise beweist er dann: Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Viereck der ersten Art angehört, ist, daß die Winkelhalbierenden an den Ecken, wo die Seiten mit gleichen Summen zusammenlaufen, und die inneren Winkelhalbierenden an den übrigen Ecken einem Büschel angehören. Für Vierecke zweiter Art lautet die entsprechende Bedingung, daß alle inneren Winkelhalbierenden sich in einem Punkt, der gleichzeitig Inkreismittelpunkt ist, schneiden. Im Raum und sinngemäß auch im hyperbolischen R_n sind Vierecke beider Arten dadurch gekennzeichnet, daß ihre Seiten aus je einer Ebene parallel sind.

W. Burau.

Maier, W.: Inhaltsmessung im R_3 fester Krümmung. Arch. der Math. 5, 266—273 (1954).

Die bisherigen Herleitungen der Inhaltstformel für das Schläflische (von drei Bestimmungsstücken abhängige) Orthoschem des hyperbolischen Raumes bedienen sich alle der Integralrechnung. Der Autor gibt einen einfachen Beweis der Formel, welche diesen Inhalt als Linearkombination von nur drei asymptotischen Orthoschemen darstellt, ohne Mittel der Integralrechnung, welcher sich der Lobatschewskyschen Funktion $A(s) = \int_z^0 \ln \cos \sigma d\sigma$ bedient. Für den Inhalt eines einfachen

asymptotischen Orthoschem ergibt sich eine viergliedrige Funktionalgleichung in zwei Argumenten, deren Umkehrproblem, unter einer Zusatzbedingung, im analytischen Falle gelöst wird. — Im elliptischen Raume kann diese entsprechende dreiparametrische Funktionalgleichung aufgestellt und auf eine Gestalt gebracht werden, die dem Gaußschen Pentagramma entspricht. *K. Strubecker.*

Seidel, Jacob: Angoli fra due sottospazi di uno spazio sferico od ellittico. Att. Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 16, 625—632 (1954)

In einem sphärischen Raum S_N bzw. im elliptischen Raum J_N von N Dimensionen wird die gegenseitige Lage zweier linearer Unterräume Γ und Γ' der Dimensionen m und n ($n \leq m$) vollkommen bestimmt durch $n - 1$ metrische Invarianten. Diese Invarianten kann man deuten als stationäre Abstände eines Punktes von Γ und eines Punktes von Γ' , und nennt sie die Winkel zwischen Γ und Γ' . Der Autor leitet eine Gleichung für die Winkelsinus her, deren Koeffizienten von den Abständen der Basisvektoren von Γ und Γ' abhängen. — Die Räume S_N und J_N entstehen durch geeignete Identifizierung der Elemente eines Raumes Σ von $N + 1$ Dimensionen, in dem ein skalares Produkt, oder eines reellen linearen Raumes, in dem ein symmetrisches, bilineares und positives Skalarprodukt erklärt ist. Methodisches Arbeitsmittel sind dabei die Gramschen Matrizen der Grundvektoren der Räume Γ und Γ' bzw. ihrer Skalarprodukte; ferner die Begriffe der Normalprojektion und des Pols in Σ , mit deren Hilfe 1. eine einfache metrische Normalform der Gramschen Matrix gewonnen werden kann und 2. der einfache Beweis der Vollständigkeit der erhaltenen und als Winkel gedeuteten metrischen Invarianten der Räume Γ und Γ' gelingt. *K. Strubecker.*

Blanuša, Danilo: Über die isometrische Einbettung elliptischer Räume in höhere Räume konstanter Krümmung. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 6, 91—114 (1954).

Es sei R_n, S_n, E_n, H_n ein n -dimensionaler reeller euklidischer, sphärischer, elliptischer und hyperbolischer Raum und $1/\rho^2$ die Krümmung der geodätischen Flächen von E_n . Dann hat der Autor früher bewiesen [dies. Zbl. 51, 388; Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math. phys. astron., II. Ser. 8, 81—114 (1953)]: 1. Ein E_n läßt sich in einen R_N mit $N = (n + 3)/2$ isometrisch einbetten. Setzt man die Bedingung (B), daß die geodätischen Linien des E_n Kreise des Einbettungsraumes werden, so ist die Einbettung bis auf Bewegungen und Spiegelungen eindeutig bestimmt und E_n (Halbmesser ρ_0) liegt in einem S_{N-1} vom Halbmesser $\rho_1 = \rho_0 \sqrt{n+1}$. In der vorliegenden Note wird bewiesen: 2. Streicht man die Bedingung (B), so läßt sich ein E_m ($m = 2n > 0$, Halbmesser ρ_0) in einen S_{M-1} ($M = m(m+3)/2 = 2n^2 + 3n$) vom Halbmesser $\rho > \rho_1 = \rho_0 \sqrt{n+1}$ isometrisch einbetten. Der Grenzübergang $\rho \rightarrow \rho_1$ ergibt Einbettung in R_{M-1} . Ferner gibt es Einbettung in jeden H_{M-1} . — Daraus folgt 3. Ein E_m ($m = 2n + 1 > 1$) läßt sich in R_{M-1} ($M = m(m+3)/2$) isometrisch einbetten. Und 4. Ohne Bedingung (B) kann die in 1. angegebene Dimensionszahl des euklidischen Einbettungsraumes von E_n ($n > 1$) noch um eine Einheit erniedrigt werden. Für E_2 hat der Verf. diese Ergebnisse schon früher mitgeteilt [Nachr. Österr. Math. Ges., Wien 21 22, 40 (1952) und Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 9, 41—58 (1954)]. *K. Strubecker.*

Fejes Tóth, L.: Über die dichteste Horozyklenlagerung. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 5, 41—44 und russische Zusammenfassg. 44 (1954).

Nach einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 51, 113) hat die Lagerungsdichte nicht übereinandergreifender kongruenter Kreise in der hyperbolischen Ebene die obere Schranke $3/\pi$. Verf. zeigt nun, daß diese Schranke auch für Horozyklenlagerungen besteht, indem er beweist: Zu jeder Lagerung von nicht übereinandergreifenden Horozyklen gibt es eine Zerlegung der hyperbolischen Ebene in asymptotische Dreiecke, so daß die Lagerungsdichte in jedem Dreieck $< 3/\pi$ ist. Die obere Schranke wird von einer Horozyklenlagerung, aber von keiner Kreislagerung angenommen. *Kurt Schütte.*

Fejes Tóth, L.: On close-packings of spheres in spaces of constant curvature. Publ. math., Debrecen **3**, 158—167 (1954).

Verf. stellt das Problem der dichtesten Kugelpackung im Euklidischen Raum in den allgemeineren Zusammenhang der Kugelpackungen in Räumen konstanter Krümmung und knüpft dabei an das entsprechende zweidimensionale Problem an. In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **51**, 115) hatte Verf. bewiesen: Die Lagerungsdichte von nicht übereinandergreifenden kongruenten Kreisen auf einer Fläche konstanter Krümmung ist höchstens gleich der Dichte, die von 3 sich wechselseitig berührenden Kreisen im Innern des von ihren Mittelpunkten gebildeten Dreiecks eingenommen wird. Entsprechend vermutet Verf.: Die Packungsdichte kongruenter Kugeln vom Radius r im Raum konstanter Krümmung ist höchstens gleich der Dichte, die von 4 sich wechselseitig berührenden Kugeln im Innern des von ihren Mittelpunkten gebildeten Tetraeders eingenommen wird. Diese Vermutung, die durch verschiedene Überlegungen gestützt wird, hat folgende Konsequenzen: Die angegebene maximale Dichte wird nur dann erreicht, wenn das reguläre Tetraeder der Kantenlänge $2\sqrt{N}$ einen Kantenwinkel $2\pi/N$ mit $N = 3, 4, 5$ oder 6 besitzt. In den ersten drei Fällen besteht die dichteste Kugelpackung aus 5, 8 bzw. 120 Kugeln im Raum positiver Krümmung. Zum Fall $N = 6$, bei dem die Kantenlänge des Tetraeders unendlich wird, gehört eine Packung von Horosphären in hyperbolischen Raum, welche die wahrscheinlich absolut dichteste Kugelpackung im Raum konstanter Krümmung darstellt. Das Problem, zu einer gegebenen Zahl m den kleinsten Raum konstanter positiver Krümmung zu finden, in den sich m Einheitskugeln legen lassen, ist nur bis $m = 8$ gelöst. Für $m = 6, 7$ und 8 ergibt sich der durch das reguläre 16-Zell bestimmte Raum. Nach der angeführten Vermutung bilden für $m = 120$ die Ecken des regulären 600-Zells die günstigste Lagerung für die Kugelmittelpunkte. Verf. zeigt, daß diese Konfiguration, bei der jede Kugel durch 12 andere berührt wird, jedenfalls ein relatives Optimum darstellt. Die in der Arbeit angegebenen Ansätze dürften für weitere Untersuchungen sehr aufschlußreich sein.

Kurt Schütte.

Wald, A.: Congruent imbedding in F -metric spaces. Pacific J. Math. **4**, 305—315 (1954).

Ein F -Raum sei eine Punktmenge, derart, daß mit jedem Punktepaar x, y ein Element $x y^2$ eines Körpers F assoziiert ist (der Quadratabstand) mit $x x^2 = 0$ und $x y^2 = y x^2$. Ein Beispiel bildet der Koordinatenraum (x_1, \dots, x_n) , $x_i \in F$, mit $x y^2 = \sum a_i (x_i - y_i)^2$, $a_i \in F$. Unter der Voraussetzung, daß F die Charakteristik Null hat, wird gezeigt, daß die Kongruenzordnung dieses Raumes $F_\nu(a_i)$ in bezug auf die Klasse aller F -Räume gleich $n - 3$ ist. Der Raum $F_\nu(a_i)$ mit $a_i = 1$ wird mit F_ν bezeichnet. Es werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen angegeben, dafür, daß $k + 1$ Punkte eines F -Raumes in F_ν kongruent einzubetten sind. Dabei wird für F vorausgesetzt: 1. Charakteristik Null. 2. Die Summe zweier Quadrate ist ein Quadrat. 3. F enthält kein Element a , für das $a^2 = -1$ ist.

J. Haantjes.

Tits, Jacques: Espaces homogènes et isotropes, et espaces doublement homogènes. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 526—527 (1954).

L'A. cherche les espaces homogènes convexes de groupes de Lie: 1° isotropes (c'est-à-dire transitifs sur les directions tangentes), 2° doublement homogènes, 3° triplement homogènes. Ce sont 1° les espaces affins, projectifs, elliptiques, hyperboliques sur les corps réels, complexes, quaternioniens et octaves, la quadrique ovale réelle, la sphère euclidienne, le revêtement de l'espace projectif, ou enfin l'espace sphérique ou elliptique à 7 dimensions où opère le B_3 et le même à 6 dimensions où opère le G_2 multiplié éventuellement par un groupe 2-cyclique, 2° en excluant les cas exceptionnels, l'espace affins ou projectifs ou une quadrique ovale, 3° l'espace conforme. Voir aussi A. Borel, Ann. of Math., II, Ser. **58**, 443—457 (1953). H. Freudenthal.

Tits, Jacques: Etude géométrique d'une classe d'espaces homogènes. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 466—468 (1954).

Un groupe semi-simple étant donné, l'A. envisage les sous-groupes déterminés par des systèmes partiels du système des racines irréductibles. Les sous-groupes donnent lieu à des espaces homogènes qui dans l'interprétation de l'auteur sont analogues aux espaces de Grassmann d'un espace projectif. Spécialement l'auteur étudie le E_6 .

H. Freudenthal.

Elementargeometrie:

• **Baumgartner, L.: Geometrie im Raum von vier Dimensionen.** München: R. Oldenbourg Verlag 1954. 112 S. DM 6,20.

Das Büchlein gibt eine leichtfaßliche Einführung in die Elementargeometrie des vierdimensionalen Euklidischen Raumes R_4 . Für die Anfänger bieten 143 Aufgaben (mit ihren Lösungen) einen willkommenen Übungsstoff. Ausführlich werden lineare Räume und deren gegenseitige Beziehungen behandelt, wobei auch kurz die analytische Geometrie zu ihrem Rechte kommt. Über die regelmäßigen Polytope und deren Aufbau handeln die Abschnitte VII bis X. Im letzten Abschnitt wird kurz auf krumme Räume eingegangen und einiges über den Kugelraum behandelt.

R. W. Weitzenböck.

Palamà, Giuseppe: Relazione tra un angolo e la sua proiezione ortogonale su di un piano che incontra i suoi lati. *Periodico Mat.*, IV. Ser. **32**, 81—88 (1954).

Cavallaro, Vincenzo G.: Equazioni diofantee brocardiane. *Giorn. Mat. Battaglini*, V. Ser. **82**, 301—308 (1954).

Eine unbestimmte Gleichung $M(x^4 + y^4 + z^4) = N(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2)$, in der x, y, z reelle Zahlen sind, die den Bedingungen der Maßzahlen der Seiten eines nicht gleichseitigen Dreiecks genügen, und M und N zwei ganze positive Zahlen bedeuten, nennt Verf. eine Brocard'sche diophantische Gleichung. Wegen $x^4 + y^4 + z^4 > x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2$ muß $M < N$ sein. Verf. zeigt, daß solche Gleichungen in der Dreiecksgeometrie im Zusammenhang mit dem Brocard'schen Winkel ω auftreten und zu Dreiecken führen, die gewissen Bedingungen genügen. Gibt man z. B. $\operatorname{tg} \omega$ die Werte $1 \mid 7, 1 \mid 2, 1 \mid 3, 4 \mid 7$, so ergeben sich für die Seiten x, y, z Gleichungen der obigen Form mit $M = 2, N = 3$; $M = 5, N = 6$; $M = 5, N = 8$; $M = 65, N = 66$. Verf. untersucht die Eigenschaften der Dreiecke mit diesen besonderen Seitenbeziehungen. Im ersten Fall handelt es sich um das von ihm früher untersuchte Dreieck, in dem der Abstand der Brocard'schen Punkte $\Omega \Omega'$ den größten möglichen Wert $R/2$ hat (R Umkreisradius). M. Zacharias.

Toscano, L.: Sur l'ellipse de Lemoine. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **23**, 221—229.

Die Ellipse von Lemoine eines Dreiecks ABC ist dem Dreieck eingeschrieben, hat zu Brennpunkten den Schwerpunkt G und den Lemoinepunkt K und zur Fokalachse einen Durchmesser des Fußpunktkreises von G . Verf. untersucht die Beziehungen eines Punktes P zur Lemoineschen Ellipse, dessen Cevageraden AP, BP, CP die Seiten BC, CA, AB in Punkten P_a, P_b, P_c schneiden, die die Seiten in den Verhältnissen $m_a : m_b : m_c$ teilen (m_a, m_b, m_c die Medianen oder Seitenhalbierenden): Es ist $GP = \frac{2}{3} \Omega_m \Omega'_m$ (Ω_m, Ω'_m die Brocard'schen Punkte des Dreiecks der Medianen). P_a, P_b, P_c sind die Berührungspunkte der Dreiecksseiten und der Lemoineschen Ellipse. Das Produkt der Krümmungsradien der Ellipse in den Punkten P_a, P_b, P_c ist gleich der dritten Potenz des Quotienten $B P_a \cdot C P_b \cdot A P_c : A$ (A Flächeninhalt von ABC). Viel weitere metrische Beziehungen. M. Zacharias.

Pozzolo Ferraris, Giulia: Sul calcolo del lato di alcuni poligoni regolari. *Periodico Mat.*, IV. Ser. **32**, 97—102 (1954).

Bottari, Amerigo: Studio di alcuni luoghi geometrici elementari. *Periodico Mat.*, IV. Ser. **32**, 89—96 (1954).

Neville, E. H.: Oblique pedals. *Math. Gaz.* **38**, 166—171 (1954).

Zwei Anwendungen des bekannten Satzes: Gegeben ein Punkt Ω und Punkt P_1, P_2, \dots auf einer Kurve Γ . Q_1, Q_2, \dots seien Punkte in solcher Lage, daß die Dreiecke $\Omega P_1 Q_1, \Omega P_2 Q_2, \dots$ einander direkt ähnlich sind. Dann liegen Q_1, Q_2, \dots auf einer zu Γ ähnlichen Kurve, die aus Γ durch Drehung um den Winkel $\angle P_1 \Omega Q_1$ und Dehnung im Verhältnis $\Omega Q_1 / \Omega P_1$ erhalten wird. — I. Anwendung auf isogonal konjugierte Punktepaare: Schneidet ein Kreis die Seiten eines Dreiecks in sechs verschiedenen Punkten, so gibt es vier verschiedene Paare isogonal konjugierte Punkte, für die er ein schiefer Fußpunktkreis ist. — II. Anwendung auf Kegelschnitte.

M. Zacharias.

Lenz, Hanfried: Bemerkungen zur Winkelteilung. *S.-Ber. math.-naturw. K. Bayer. Akad. Wiss. München* **1953**, 273—279 (1954).

The author studies the geometrical constructions with a ruler and an "angle dissector", i. e. an instrument which performs the division of any angle into an arbitrary number of equal parts. The main result, which is easily obtained from classical results, is the following: The segment x can be constructed from any given points whose (rectangular cartesian) coordinates are in a field G of real number if and only if (i) x is algebraic over G with solvable Galois group, (ii) if x satisfies the

equation $f(x) = 0$, where f is irreducible over G , then f factorizes into linear factors in every real closed field $K \supseteq G$. F. A. Behrend.

Hadwiger, H.: Von der Zerlegung der Kugel in kleinere Teile. *Gaz. Mat., Lisboa* **15**, Nr. 57, 1–2 und portugiesische Übersetzung 2–3 (1954).

Bekanntlich kann die n -dimensionale Vollkugel vom Durchmesser 1 nicht in weniger als $n + 1$ Punkt Mengen von kleinerem Durchmesser zerlegt werden. B. Knaster hat die Frage gestellt, welches bei einer Zerlegung in $n + 1$ Teile die kleinste Zahl D_n für den größten Durchmesser der möglichen Teile ist. Verf. beweist hier: $D_1 = \frac{1}{2}$, $D_2 = \sqrt[3]{3/2}$, $D_3 = \sqrt[3]{(3 + \sqrt{3})/6}$, $D_n > \{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - 1/2n)^{1/2} \}^{1/2}$. Der Beweis benutzt einen Satz von H. Hopf über $n + 1$ antipodenfreie abgeschlossene Punkt Mengen, die die Kugelfläche überdecken, sowie einen Satz von K. Reinhardt über die sphärischen Abstände bei $(n + 1)$ Punkten der Kugelfläche. W. Süss.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

Primrose, E. J. F.: Real projective geometry. *Math. Gaz.* **38**, 185–189 (1954).

L'A. enuncia e dimostra note proposizioni di geometria proiettiva evitando l'uso degli immaginari con l'impiego di involuzioni, secondo il noto procedimento di Staudt. P. Buzano.

Brauner, Heinrich: Kongruente Verlagerung kollinear Räume in halb-achsiale Lage. *Monatsh. Math.* **58**, 13–26 (1954).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. **50**, 181) wird vorerst klargestellt, daß in zwei kollinearen Räumen ∞^2 Paare kongruenter Punktreihen vorhanden sind. Ihre Träger erfüllen im allgemeinen in jedem der Räume eine Strahlkongruenz vom Bündel- sowie Feldgrad 2. Daraus folgt, daß je zwei kollineare Räume auf ∞^3 Arten durch eine gegenseitige Verlagerung in halb-axiale „ha“-Lage gebracht werden können, d. h. in eine Lage, in der eine und nur eine Gerade e sich punktweise selbst entspricht. Es gibt dann stets auch ein Büschel selbstentsprechender Ebenen (Doppelebenen). Anschließend werden verschiedene Sonderfälle näher untersucht, insbesondere die ∞^2 speziellen „ha“-Lagen, die ∞^2 parabolischen „ha“-Lagen und endlich die ∞^1 speziellen parabolischen „ha“-Lagen zweier kollinear Räume. Die ersteren sind dadurch gekennzeichnet, daß die selbstentsprechende Gerade e von der Achse des Doppelebenenbüschels geschnitten wird, im zweiten Falle besitzt die Projektivität der durch e gelegten Ebenen zwei zusammengefallene Doppelebenen und im dritten Falle treten diese beiden Merkmale gleichzeitig auf. Zum Schluß werden besondere ein- und zweiparametrische Bewegungen eines Raumes untersucht, bei denen dieser mit einem dazu kollinearen Raum stets in „ha“-Lage bleibt. J. L. Krames.

Godeaux, Lucien: Remarque sur les homographies cycliques. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **40**, 569–573 (1954).

Dans l'espace S^{n-1} , une homographie H cyclique de période p premier, définit p systèmes d'hyperquadrriques invariants par H , et p homographies harmoniques H_i échangeant deux quelconques de ces systèmes. Le produit de deux de ces homographies H_i est une puissance d'une autre homographie H' cyclique de période p . B. d'Orgeval.

Edge, W. L.: The geometry of the linear fractional group $LF(4,2)$. *Proc. London math. Soc., III. Ser.* **4**, 317–342 (1954).

In der Menge der 28 nichtausgearteten Nullsysteme des dreidimensionalen projektiven Raumes S über dem Körper mit zwei Elementen werden 8 Teilmengen von je 7 Elementen ausgezeichnet, die durch die Kollineationen von S untereinander permutiert werden. Auf diese Weise ergibt sich ein neuer Beweis dafür, daß die Kollineationsgruppe von S isomorph ist zur alternierenden Gruppe vom Grad 8. Ferner werden einige Untergruppen dieser Kollineationsgruppe betrachtet. G. Pickert.

Weitzenböck, Roland: Zum Transversalenproblem. I. Geraden im R_3 , R_4 und R_5 . II. Zum 9-Ebenenproblem im R_5 . *Monatsh. Math.* **57**, 185–198 (1953), 265–306 (1954).

Im S_n haben $(n - d)(d - 1)$ Räume S_{n-d-1} im allgemeinen endlich viele sie schneidende

S_d , deren Zahl gleich dem Grad der Graßmannschen Mannigfaltigkeit aller S_d des S_n ist. Bei weniger als $(n-d)(d+1)$ Räumen S_{n-d} gibt es natürlich unendlich viele Transversal- S_d . Verf. versteht nun unter „Transversalenproblem“ die Frage einerseits nach algebraischen Gleichungen, denen diese endlich oder unendlich vielen S_d zu gegebenen festen S_{n-d-1} , bzw. ihre Schnittpunkte mit diesen genügen müssen, andererseits nach geometrischen Konstruktionen, mit Hilfe deren man sie erhält. Die Methode, mit der der Verf. an diese Fragen herangeht, ist das von ihm selber unter dem Namen „Komplexsymbolik“ 1908 eingeführte Rechnen, das auf der Aufspaltung von Graßmannkoordinaten in symbolische Faktoren beruht. In der ersten Arbeit wird der Fall $d=1$ im R_3 und R_4 behandelt. Es werden Ausdrücke angegeben für die Linienkoordinaten des durch 3 Geraden des R_3 bestimmten regulus und für die beiden Treffgeraden von 4 festen Geraden. Im R_4 werden die Bedingungen der Koordinaten der Transversalebene zu 5 festen Ebenen ausgerechnet. Bei 6 Geraden des R_4 , zu denen es bekanntlich 5 Transversalebenen gibt, wird die Gleichung 5. Grades angegeben, von der die Schnittpunkte der Transversalebenen mit einer der 6 Geraden abhängen. Bei 7 Geraden ist die Bedingung dafür, daß sie eine Transversalebene besitzen, eine Invariante, von der man weiß, daß sie in den Linienkoordinaten der 7 Geraden je vom Grade 5 ist. Die zweite Arbeit behandelt das wesentlich schwierigere Transversalenproblem in der Ebenengeometrie des S_5 . Es werden zunächst 5 Ebenen 1, 2, 3, 4, 5 allgemeiner Lage betrachtet, die ∞^4 Transversalebenen besitzen. Verlangt man dabei, daß 2 in Geraden geschnitten wird, so ergeben sich nur ∞^1 Transversalebenen, die auf 1 eine Kurve 3. Grades ausschneiden. Auf dieselbe Weise erhält man noch 3 weitere derartige, je von 3, 4, 5 abhängige Kurven 3. Grades in 1, die insgesamt 3 Schnittpunkte, außerdem aber noch zu je dreien je 3 weitere Schnittpunkte besitzen. Bei Hinzunahme einer 6. Ebene gibt es ∞^3 Transversalebenen zu 1, 2, ..., 6 und durch den festen Punkt A_0 auf 1 immer noch ∞^1 , die einen Kegel 3. Grades erzeugen; dieser schneidet seinerseits 2 in einer Kurve 3. Grades T_{3456} . Eine weitere Ebene 7 führt somit zur Definition von 4 derartigen Kurven in 2, die mit $T_{3457}, \dots, T_{4567}$ sinngemäß benannt werden. Diese 4 Kurven haben insgesamt 5 Punkte gemein, je 2 von ihnen, etwa T_{3456} und T_{3457} noch je 4 weitere, darunter auch 3 der schon vorher als ausgezeichnet auf 2 gefundenen Punkte. Bei Hinzunahme einer 8. Ebene kann man durch den bisher als allgemein auf 1 festgehaltenen Punkt A_0 in 1 nicht mehr eine Transversalebene erwarten, sondern muß A_0 so wählen, daß die 3 Kurven T_{3456}, T_{3457} und T_{3458} einen Punkt B gemein haben. Unter den Kurven des von diesen 3 Kurven gebildeten Linearsystems gibt es solche, die in Gerade und Kegelschnitt zerfallen, und diese spielen für die weitere Rechnung eine wichtige Rolle. Der geometrische Ort aller Punkte in 1, von denen aus es eine Transversalebene an die 7 weiteren Ebenen gibt, ist eine höhere Kurve. Bei Hinzunahme einer neunten Ebene ergibt sich eine weitere derartige Kurve; unter den Schnittpunkten beider Kurven sind die 42 Punkte enthalten, durch die es Transversalebenen zu den 9 Ebenen gibt. Es werden zahlreiche Invarianten und Kovarianten des zugehörigen Problems aufgestellt und besondere Punkte auf 1 und 2 durchdiskutiert, wobei auch die vorher angegebenen besonderen Punkte auf 1 und 2 alle eine Rolle spielen. Diese Dinge können hier nur angedeutet werden. Es erscheint nach Ansicht des Ref. überhaupt recht schwierig, durch die vielen Rechnungen, Umformungen usw. dieser tiefeschürfenden Arbeit hindurchzublicken, wenn man nicht die große, beim Verf. noch vorhandene, aber sonst heute meist verlorengegangene Fähigkeit im invariantentheoretischen Rechnen besitzt.

W. Burau.

Yamashita, Chitose: An elementary and purely synthetic proof for the double six theorem of Schläfli. Tôhoku math. J., II. Ser. 5, 215–219 (1954).

Verf. beweist auf synthetischem Weg den im Titel genannten Satz ausschließlich unter Verwendung der elementaren Tatsache, daß je zwei Geraden, die verschiedenen Scharen einer Regelfläche 2. Grades angehören, einander schneiden.

H. Horninger.

Lauffer, Rudolf: Über die Struktur der Konfigurationen (10_3) . Math. Nachr. 12, 1–8 (1954).

Eine erschöpfende Kennzeichnung der Strukturen der zehn Konfigurationen (10_3) mittels quadratischer und rechteckiger Ausschnitte ihrer Inzidenztafeln, für die eine Reihe von Sätzen bewiesen werden.

M. Zacharias.

Ladopoulos, Panaiotis D: Une extension d'un théorème de Clifford. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 2050–2051 (1954).

Betrachtet werden Kegelschnitte (KS) eines Kegelschnittnetzes der euklidischen Ebene. (a) Mit $2m$ KS ist ein Punktequadrupel verknüpft. (b) Mit $2n+1$ KS ist eine bizirkulare Quartik verknüpft. ($m, n \geq 2$.) Zu je $2m-1$ KS von (a) gehört nach (b) eine bizirkulare Quartik — diese schneiden sich in dem Punktequadrupel. Zu je $2n$ KS von (b) gehört nach (a) ein Punktequadrupel — diese liegen auf der bizirkularen Quartik.

M. Barner.

Lorent, H.: Une transformation reposant sur une conique ou une quadrique donnée. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 23, 230—247.

Der erste Teil dieser Arbeit behandelt eine Transformation in der Ebene, der zweite ihre Verallgemeinerungen im Raum. Die ebene Transformation ist wie folgt definiert: Einem Punkt $P(x', y')$ in der Ebene eines auf zwei rechtwinklige Achsen OX und OY bezogenen Kegelschnitts Γ mit dem Mittelpunkt O wird der Punkt $Q(x, y)$ zugeordnet, der als Schnitt der Senkrechten auf OP in P mit dem zu OP konjugierten Durchmesser von Γ entsteht. Es wird untersucht, welchen Ort einer der beiden Punkte durchläuft, wenn der zugeordnete sich auf einer gegebenen Kurve bewegt. Zunächst wird angenommen, Γ zerfalle in die Geraden OX und OY . Es werden die Formeln der direkten und inversen Transformation aufgestellt und die direkten und inversen Transformierten einer Geraden, eines Kreises, einer Parabel, einer geraden Strophoide, einer Lemniskate, einer vierblättrigen Rosenkurve bestimmt. Sodann werden die Transformationsformeln aufgestellt, wenn $\Gamma = A x^2 + B y^2 + C = 0$ ist ($A \neq B$) und für einige einfache Kurven ebenso verfahren. Es erscheinen dabei Kurven vom 3. bis zum 10. Grad. — Eine natürliche Verallgemeinerung der ebenen direkten Transformation im Raum ergibt sich aus folgender Konstruktion: Gegeben sei eine auf die Achsen OX, OY, OZ bezogene Fläche zweiter Ordnung $(\Sigma) A x^2 + B y^2 + C z^2 = D$. $P(x', y', z')$ sei ein veränderlicher Raumpunkt. Die auf OP senkrechte Ebene durch P schneidet die zu OP konjugierte Diametralebene von Σ nach der Geraden g . Dem Raum der Punkte P ist dann der Komplex der Geraden g zugeordnet. Zunächst werden einige Sondertfälle untersucht, die sich bei spezieller Lage von P in bezug auf Σ ergeben. Sodann werden Beispiele behandelt, in denen entweder eine Ortsfläche für P gegeben ist und die Eigenschaften der zugeordneten Geradenschar studiert werden, oder eine bestimmte Teil-schar von Geraden des Komplexes zugrunde gelegt und der geometrische Ort der zugeordneten Punkte P untersucht wird. — Eine Ausdehnung der ebenen inversen Transformation auf den Raum ergibt sich, wenn man dem Punkt $P(x', y', z')$ einen Punkt $Q(x, y, z)$ zuordnet, der als Fußpunkt der Projektion von P auf die zu OP konjugierte Diametralebene (Og) von Σ entsteht. Die Koordinaten von Q lassen sich rational durch diejenigen von P ausdrücken, während die von P sich im allgemeinen nicht eindeutig aus denen von Q ergeben. Für einige einfache Fälle wird der Ort bestimmt, den P (oder Q) durchläuft, wenn Q (bzw. P) sich gesetzmäßig im Raum bewegt. — Die Transformationen gestatten es, sowohl in der Ebene wie im Raum geometrische Gebilde zu studieren, die auf andere Weise nicht so einfach zu überschauen sind. *E. Löffler.*

Fabricius-Bjerre, Fr.: Eine elementare (3,1)-Transformation. Nordisk mat. Tidsskrift 2, 101—109 (1954) [Norwegisch].

Von einem Punkte P werden an eine Parabel die beiden Tangenten gezogen und in den Berührungspunkten die Normalen errichtet. Ihr Schnittpunkt sei P' . Über die rationale Transformation $P \rightarrow P'$ werden einige einfache Tatsachen rechnerisch bewiesen. Keine Literaturangaben. *R. W. Weitzenböck.*

Facciotti, G.: Una generalizzazione della iperbole. Periodico Mat., IV. Ser. 32, 57—69 (1954).

In Verallgemeinerung der Hyperbelgleichung $xy = k$ untersucht Verf. die ebene Kurve n -ter Ordnung, die den Ort der Punkte bildet, für die das Produkt der Abstände von n gegebenen allgemeinen Geraden konstant ist. Nach allgemeiner Untersuchung der Gestalt der Kurven behandelt er besonders den Fall $n = 3$ und schließt mit räumlichen und topographischen Betrachtungen. *M. Zacharias.*

Wunderlich, Walter: Eine bemerkenswerte Fokaleigenschaft der D -Kurven von Kegeln 2. Grades. Monatsh. Math. 58, 57—62 (1954).

Eine recht übersichtliche Rechnung in Matrizen zeigt, daß jede D -Kurve eines Kegels zweiten Grades die sechs Brennebenenbüschel des Kegels unter konstanten Winkeln durchsetzt. Die analytische Darstellung dieser Kurven wird angegeben und einige Sonder- und Grenzfälle werden kurz besprochen. *H. Gericke.*

Algebraische Geometrie:

● **Hodge, W. V. D. and D. Pedoe:** Methods of algebraic geometry. Vol. III. Book V: Birational geometry. Cambridge: At the University Press, 1954. X, 336 S. 40 s.

Le volume III fait suite aux vol. I (1947) et II (ce Zbl. 48, 145). Dans le livre I figuraient déjà des préliminaires algébriques; ils sont insuffisants pour obtenir les résultats de géométrie birationnelle qui sont présentés ici. C'est pourquoi des compléments d'algèbre occupent le 1^{er}

chapitre du livre: chap. XV, p. 1 à 82; ils portent sur la théorie des idéaux d'un anneau commutatif R noethérien: idéaux premiers et primaires, anneaux résiduels, restriction et extension d'un anneau, anneau des quotients R_p , p étant un idéal premier, modules, théorie multiplicative des idéaux, théorie de la dépendance intégrale. Ce mode de présentation permet aux A.A. de faire un exposé adapté à leurs besoins, et dispense en même temps le lecteur de se reporter à d'autres ouvrages au cours de l'étude de la partie géométrique. Le livre garde ainsi son autonomie, mais il gagne en longueur. Le 2^{me} chapitre (chap. XVI, p. 83 à 162) aborde la théorie des variétés. Les variétés algébriques sont définies dans l'espace affine A_n et étudiées en relation avec les idéaux dans $K[x_1, \dots, x_n]$, K étant un corps de base quelconque de caractéristique nulle (§ 1 et 2). Puis la notion de point simple, déjà définie au vol. 2, est approfondie au moyen de la théorie des idéaux. On y démontre (§ 3) que P est point simple sur V_d si et seulement si l'idéal des éléments non inversibles de l'anneau des quotients de P possède une base ayant d éléments, ce qui conduit à la notion de paramètres uniformisants. Les deux derniers paragraphes concernent les variétés normales dans l'espace affine et dans l'espace projectif, qui jouent un rôle important dans l'étude des transformations birationnelles. Un autre outil utile pour cette étude est la théorie de la valuation. Ici, comme en algèbre, la théorie est présentée de façon intéressante et complète pour son objet (chap. XVII, p. 163 à 221); elle couvre en particulier les valuations d'un corps de fonctions algébriques et la notion de centre d'une valuation. Au chapitre XVIII (p. 222 à 331) sont étudiées les correspondances birationnelles: la méthode employée est celle de O. Zariski; elle consiste à passer par l'intermédiaire des variétés normales, (§ 1 et 2). Des transformations birationnelles interviennent dans les §§ 3 et suivants: transformations monoidales et transformations de Cremona particulières. La fin du volume est consacrée à deux problèmes difficiles: celui de l'uniformisation locale et celui de la résolution des singularités d'une surface algébrique quelconque. Les méthodes mises en lumière tout au cours de l'ouvrage y trouvent une occasion de faire leurs preuves.

L. Lesieur.

Zariski, Oscar: Applicazioni geometriche della teoria delle valutazioni. Rend. Mat. e Appl. **13**, 51—88 (1954).

Exposé riche en suggestions concernant un domaine dans lequel les contributions originales de l'A. sont fondamentales. Voici la Table des matières: 1. Introduzione. 2. Valutazioni e punti infinitamente vicini. 3. Anelli di valutazione. 4. Posti e valutazioni. 5. Il centro d'un posto. 6. Trasformazioni birazionali. 7. Corrispondenze algebriche irriducibili. 8. Varietà normali. 9. Nuove considerazioni sulle valutazioni e sui punti infinitamente vicini. 10. Le superficie di Riemann di un corpo di funzioni algebriche. 11. Il problema dell'uniformizzazione locale.

G. Ancochea.

Zariski, O.: Le problème de la réduction des singularités d'une variété algébrique. Bull. Sci. math., II. Sér. **78**, 31—40 (1954).

Riassunto di una conferenza. L'A. espone con alcuni cenni di dimostrazioni i risultati di sue recenti ricerche sul problema dello scioglimento delle singularità di una varietà algebrica sopra un corpo di caratteristica nulla. Sia V_r una varietà pura ad r dimensioni, immersa in una varietà $F_{r+1} = F_r \times S_1$, prodotto d'una varietà non singolare F_r e d'una retta S_1 , in modo che ogni retta $P \times S_1$, $P \in F_r$, intersechi V_r in un numero finito di punti. Sia Γ_{r-1} la varietà delle coincidenze dell'involuzione segata su V_r dalle rette $P \times S_1$. Il problema della riduzione delle singularità viene ricondotto al teorema fondamentale seguente: Se le singularità di Γ_{r-1} sono dei „normal crossings“, esiste una trasformazione birazionale q di F_{r+1} che: a) trasforma F_{r+1} in una varietà non singolare F' , b) q^{-1} è regolare su F' , c) il luogo dei punti di F' ove q non è biregolare è una varietà W' pura di dimensione r , d) la varietà $q|V_r$, somma delle componenti trasformate di quelle di V_r e delle varietà eccezionali corrispondenti a sottovarietà di V_r , ha per sole singularità dei „normal crossings“. Ogni varietà pura V_r di S_{r+1} può immergersi, colle condizioni sopra richieste, nel prodotto F_{r+1} di $r+1$ rette con una trasformazione birazionale di S_{r+1} in F_{r+1} ; ammesso l'ultimo teorema, F_{r+1} può trasformarsi in modo che $q|V_r$ abbia per sole singularità dei „normal crossings“. Da ciò il teorema dello scioglimento delle singularità segue immediatamente. L'A. dà un cenno della dimostrazione del teorema fondamentale nel caso che V_r sia una varietà normale, dimostrazione che si estende al caso che V_r sia analiticamente irriducibile in ogni punto. Il problema dello scioglimento delle singularità viene così ridotto a quello della separazione delle falde di una V_r di F_{r+1} con una trasformazione birazionale di F_{r+1} . A. Andreotti.

Hirzebruch, Friedrich: Arithmetic genera and the theorem of Riemann-Roch for algebraic varieties. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 110—114 (1954).

Soit V^n une variété algébrique de dimension complexe n , et W un espace fibré analytique sur V^n de fibre vectorielle C^q , de groupe structural $GL(q, C)$. Soient $H^i(V^n; W)$ les groupes de cohomologie de V^n à valeurs dans le faisceau des sections locales holomorphes de W ; on sait que le rang g_i de $H^i(V^n; W)$ est fini. On pose $\chi(V^n; W) = \sum (-1)^i g_i$. Désignons par $\sum_i c_i x^i = \prod_i (1 + \gamma_i x)$, $\sum_i d_i x^i = \prod_i (1 + \delta_i x)$ les polynômes de Chern (et leurs racines symboliques)

daß alle zu L gehörigen Matrizen die Gestalt $\alpha \cdot (U \Omega)$ haben, wobei α eine beliebige p -reihige, quadratische Matrix von nicht verschwindender Determinante und Ω eine beliebige symmetrische Matrix von p Zeilen und Spalten bedeutet. Bei $p = 1$ ist $V(L)$ die Gerade, bei $p = 2$ eine nichtentartete Quadrik des S_7 , bei $p > 2$ ist $V(L)$ vollständiger Schnitt von $\binom{p}{2}$ quadratischen

Hyperkegeln mit $(2p^2 - 4p - 1)$ -dimensionaler Spitze. In der Theorie der Riemannschen Matrizen interessieren nun insbesondere solche Transformationen $\omega' = \alpha \omega A$, wobei 1. A ganzzahlig unimodular, 2. A beliebig rational ist. 1. und 2. definieren Klasseneinteilungen in zueinander äquivalente und isomorphe Matrizen und zugehörige Punkte. Es zeigt sich, daß genauer $V(M)$ zu $V(L)$ stets isomorph, aber nicht immer äquivalent ist. W. Burau.

Rosati, Mario: Sull'equivalenza birazionale delle due varietà di Picard associate ad una varietà superficialmente irregolare. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 16, 708—715 (1954).

Sia $\omega^{(p, 2p)} = (1^{-1} | \Omega)$ una matrice di Riemann, V_p sia la corrispondente varietà di Picard, V'_p la varietà di Picard dei sistemi continui di V_p , $\omega' = (1^{-1} | \Omega')$ la matrice di Riemann relativa a V'_p . L'A. dimostra che a) condizione necessaria e sufficiente perchè ω e ω' siano equivalenti (e cioè che V e V' siano birazionalmente equivalenti) è che $\omega M \omega_{-1} = 0$ con M intera modulare ($\text{Det. } M = 1$); b) la condizione $\omega M \omega_{-1} = 0$ è invariante rispetto all'equivalenza di matrici di Riemann; c) detto Γ_A il gruppo modulare ristretto relativo al livello A , ogni varietà V (propria se $A \neq E$) di equazioni $\omega M \omega_{-1} = 0$ nello spazio della geometria симплектика, è mutata dal gruppo in un sistema di varietà che si ottengono l'una dall'altra per $M \rightarrow T M T_{-1}^{-1}$, $T \in \Gamma_A$; d) se V_0, V_1 sono varietà del tipo precedente e se V'_0, V'_1 sono le varietà riempite dalla ω' rispettivamente ottenute dalle ω di V_0, V_1 , V'_0, V'_1 sono anch'esse varietà del tipo precedente e l'equivalenza di V_0 e V_1 rispetto a Γ_A porta l'equivalenza di V'_0 e V'_1 rispetto a Γ_A . A. Andreotti.

Igusa, Jun-ichi: On the arithmetic normality of the Grassmann variety. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 309—313 (1954).

This paper contains a very elegant proof (valid for a universal domain of arbitrary characteristic) of Severi's theorem which asserts that any hypersurface of a Grassmann variety is a complete intersection of the variety and a primal of its space. The proof is reduced to the demonstration of the arithmetic normality of the Grassmann variety. This is obtained by means of two lemmas of Hodge. The author deduces from the above results the first fundamental theorem of covariant vector invariants of the unimodular group and proves the possibility of expressing any Chow form in Grassmannian coordinates. A. Andreotti.

Mammana, Carmelo: Sulla varietà delle curve algebriche piane spezzate in un dato modo. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 8, 53—75 (1954).

Nello spazio S_N , ad N dimensioni, i cui punti siano le immagini delle curve algebriche piane C^n di ordine n , s'introduce la varietà V_d immagine della totalità delle C^n aventi equazione del tipo $f_1^{v_1} f_2^{v_2} \dots f_r^{v_r} = 0$, ove gli esponenti v_i e i gradi n_i delle forme ternarie f_i sono interi assegnati (con $\sum_{i=1}^r n_i v_i = n$). Si dimostra che V_d è razionale, appartiene ad S_N , ed ha ordine $K = n_1 r_1^{m_1} n_2^{m_2} \dots n_r^{m_r}$, ove $m_i = \frac{1}{2} n_i (n_i + 3)$ ed n_i è l'indice del sistema continuo definito da f_i . Approfondendo l'indagine si giunge poi a calcolare la molteplicità della V_d per la varietà $V_{N-1}^{3(n-1)^2}$ delle immagini delle C^n con punto almeno doppio non assegnato. Nella ricerca si ha occasione di conseguire altri risultati concernenti gli S_d tangenti alla V_d , la varietà luogo di tali S_d , la varietà W i cui punti sono le immagini delle C^n spezzate in tutti i modi possibili. Non mancano esemplificazioni, applicazioni, e riscontri con risultati già noti: in qualche passo però si avvertono errori di stampa che potrebbero dar luogo ad incertezze. V. E. Galafassi.

Morgantini, Edmondo: Sulle varietà tridimensionali contenenti una rete lineare di superficie razionali irriducibili. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 23, 100—126 (1954).

Im Anschluß an Arbeiten von G. Fano [Ann. Mat. pura appl., III. Ser. **24**, 49—88 (1915)], U. Morin (dies. Zbl. **21**, 58), und M. Baldassarri (dies. Zbl. **42**, 396; **46**, 385) verbessert Verf. eine bereits von F. Enriques [Math. Ann. **49**, 1—23 (1897)] aufgestellt Klassifikation dahingehend, daß eine dreidimensionale algebraische Mannigfaltigkeit V_3 , welche ein lineares Netz Φ von rationalen Flächen trägt, immer birational auf einen der folgenden Typen zurückgeführt werden kann: (I) auf den einfachen S_3 ; (II) auf den doppelten S_3 mit einer Verzweigungsfläche: (A) der Ordnung $2m$, die einen $(2m-2)$ -fachen Punkt besitzt, oder (B) der Ordnung 6 mit zwei benachbarten 3-fachen Punkten. Der Beweis geht aus von einem projektiven Modell W_3 der V_3 im S_4 , das so konstruiert ist, daß die charakteristischen Kurven des Netzes Φ irreduzibel sind, und benützt die Eigenschaften der sukzessiver adjungierten Systeme zu den hyperbenen Schnitten der einzelnen Φ . Durch eingehende Diskussion der hier möglichen Fälle wird das Resultat abgeleitet. *W. Gröbner.*

Predonzan, Arno: Sui sistemi lineari di superficie algebriche dello spazio a curva caratteristica di genere π e di grado $n \geq 3\pi+3$. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **23**, 127—162 (1954).

Verf. betrachtet das Problem, die größte Dimension der kompletten linearen Systeme Σ algebraischer Flächen von S_r (die keine Darstellungen von Kegeln sind) zu bestimmen, deren charakteristische Kurve γ folgenden Bedingungen genügt: sie ist veränderlich und irreduzibel, hat Geschlecht $\pi \geq 2$ und Grad $n = 2\pi + 2$. Dazu beantwortet er folgende äquivalente Fragen: Die Systeme Σ bis auf eine Cremona-Transformation klassifizieren und diejenigen V_3^3 bis auf eine lineare Transformation klassifizieren, welche normal in S_r und keine Kegel sind, deren Schnitte mit den S_{r-1} regelmäßige Flächen sind, deren Schnitte C mit den S_{r-2} ein Geschlecht $\pi \geq 2$ haben, wo $n \geq 3\pi + 3$ ist. V ist notwendig rational. Wenn $\pi = 2, 3$ ist, hat Morin (dies. Zbl. **24**, 342; **28**, 185) die zweite Frage gelöst. — Im ersten und im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit löst Verf. die Frage für jedes π , u. z. falls C hyperelliptisch bzw. nicht hyperelliptisch ist; er findet insgesamt 5 voneinander projektiv verschiedene Typen von V und bestimmt ihre Darstellungen auf einem S_r . Die gefundenen Systeme beantworten die zweite Frage. Im dritten Teil löst Verf. das erste Problem; die Antwort lautet: das Maximum der Dimension ist $3\pi + 4$ und wird in zwei Fällen erreicht: in beiden Fällen ist γ hyperelliptisch. Falls V ein S_0 -Kegel ist, folgt aus Ergebnissen von Castelnuovo [Ann. Mat. pura appl., II. Ser. **18**, 119—128 (1890)], daß das Maximum $3\pi + 6$ ist und in zwei Fällen erreicht wird. — Es ist zu bemerken, daß die wie folgt definierte M_r^π die wichtigste Rolle im Beweise spielt: auf V liegt bekanntlich ein lineares Büschel von Quadriken; der Ort ihrer S_3 ist die M ; V ist der Durchschnitt von M mit einer Hyperquadrik Q_{r-1}^2 , welche durch $r - \pi - 4$ S_3 von M geht. *M. Benedicty.*

Nollet, Louis: La régularité des axes du premier groupe de torsion des surfaces algébriques. Bull. Soc. roy. Sci. Liège **23**, 115—124 (1954).

Let F be an algebraic surface of arithmetic genus $p_a \geq 0$; let $|K|$ be the canonical system; let t be the order of the torsion group of F , and let D_1, \dots, D_t , ($D_1 = 0$) be the zero-divisors of the algebraic equivalence. We can suppose without loss of generality that the D_i 's are zero-divisors of the linear equivalence. The author proves the following interesting theorems: a) $\dim K + D_i = p_a$, $i = 1, \dots, t$; b) if F is irregular, the generic linear system of the continuous system $|K + D_i|$, $i \geq 1$, has the dimension p_a . The proof is based on the study of the axes of an abelian group of linear transformations. *A. Andreotti.*

Segre, Beniamino: Questioni di realtà sulle forme armoniche e sulle loro hesiane. I. H. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **15**, 237—242 (1953), 339—344 (1954).

Sia $f(x_0, x_1, x_2)$ una forma ternaria reale d'ordine n , armonica ($4f = 0$); sia h l'hesiana di f ; l'A. dimostra che se h non è identicamente nulla, l'equazione $h = 0$ ammette infinite soluzioni reali ed h assume nell'intorno di ciascuna di esse valori positivi e negativi (la sola esistenza di soluzioni non banali dell'equazione $h = 0$ era stata provata da Hans Lewy nel 1938). La dimostrazione dell'A. è di natura geometrica e si fonda sui seguenti teoremi: a) Se $f = 0$ ha un punto r -uplo in P , $f = 0$ passa per P con r rami lineari reali a tangenti distinte (se si assume come assoluto del piano la conica $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, quelle tangenti dividono il loro fascio in parti uguali). b) Se $2 \leq r \leq n$, $h = 0$ ha in P un punto di molteplicità $3r - 4$, passa per P con r rami reali (lineari) le cui tangenti coincidono con quelle di f , e, se $r = 2$, con ulteriori rami

immaginari, aventi per tangenti le tangenti da P all'assoluto ciascuna contata $r-2$ volte. Nell'intorno di P le r tangenti reali dividono il piano in parti ove alternativamente h è positiva e negativa. c) Se Q è un punto reale r -uplo di $h=0$, ma non multiplo per $f=0$, $h=0$ passa per Q con r rami reali lineari a tangenti distinte, dividenti nell'intorno di Q il piano in parti ove alternativamente h è positiva e negativa. La dimostrazione del teorema enunciato all'inizio viene conseguita combinando i teoremi precedenti e servendosi d'un ragionamento per continuità. L'A. considera anche la superficie immagine proiettiva del sistema lineare $\sum \lambda_{ik} \ell^2 f \ell x_i \ell x_k = 0$: $X_{ik} = \ell^2 f \ell x_i \ell x_k$; $X_{00} + X_{11} + X_{22} = 0$, quando f non soddisfa a nessuna equazione a derivate parziali, del secondo ordine, lineare omogenea, diversa dalla $\Delta f = 0$. È una superficie con un doppio sistema coniugato di curve algebriche birazionali, d'indice 2 (immagine del sistema delle tangenti all'assoluto). La curva $h=0$ su questa superficie è segata dalla varietà delle corde della superficie di Veronese: $|X_{ik}| = 0$, ($i \neq k$). A. Andreotti.

Heymans, P.: The representation of algebraic doubly infinite line systems. J. London math. Soc. 29, 309—318 (1954).

Verf. gibt hier eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Punkte einer algebraischen normalen Fläche F der Ordnung N als eindeutige Bilder der Geraden eines ∞^2 -Systems G betrachtet werden können. Die Bedingung lautet folgendermaßen: Wenn eine hyper-ebene Schnittkurve f von F zwei einfache und fixpunktfreie Linearscharen g_s^1 und g_n^{r-2} enthält, wo $n+s=N$ ist, und so daß die Minimalsumme der beiden Scharen in der charakteristischen Schar von f enthalten ist, dann existiert ein ∞^2 -Geradensystem \bar{G} eines Raumes S_r , mit $r \geq 4$, der Ordnung n , der Klasse s , und mit dem Index 1 (auf der Mannigfaltigkeit N , die von den Geraden von \bar{G} überdeckt wird), deren Geraden auf die Punkte einer Fläche abgebildet werden können, welche mit F oder mit einer Projektion von F homographisch ist. Daß die Bedingung notwendig ist, erkennt man sofort durch die Abbildung von \bar{G} auf die übliche Graßmannschen V_{2r-2} ; die Umkehrung wird analytisch bewiesen. Als Anwendung der Abbildung von G auf F kann man die Leitflächen und die singulären Punkte von \bar{G} untersuchen, sowie die anderen Geradensysteme, die auf derselben Mannigfaltigkeit F eventuell vorhanden sein können; als Beispiel der Fall, wo F eine F^8 von Del Pezzo der 1. Art ist. Man könnte auch eine Klassifikation der Systeme \bar{G} auf Grund einer Klassifikation der algebraischen Flächen und der g_s^1 ihrer Hyperebenen-Schnittkurven entwickeln. E. Togliatti.

Hutcherson, W. R. et N. A. Childress: Étude d'une involution cyclique de période cinq. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci. V. Sér. 40, 103—108 (1954).

Étude d'une surface d'ordre 25, de S_5 , contenant une involution cyclique d'ordre 5. Construction d'une surface image de cette involution. L. Godeaux.

Orgeval, Bernard d': A propos des surfaces de genres 1 et de rang 2. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci. V. Sér. 40, 109—117 (1954).

L'A. étudie les surfaces normales de genres un ($p_n = P_4 = 1$) possédant 8 points doubles coniques et telles qu'il existe une hyperquadrique passant par ces points et touchant la surface en tout point d'intersection. On sait que la surface est alors l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un (Godeaux). Il démontre que ces surfaces ne peuvent exister dans un espace de dimension $3+4A$, où A est une somme de quatre carrés au plus.

L. Godeaux.

Fabrieus-Bjerre, Fr.: On plane closed curves with two inflectional points. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 42—43 (1954).

Molinari, Anna Maria: Il gruppo delle trasformazioni cremoniane di S_n immagini delle proiettività dell' S_1 n -complesso. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl. 5, Nr. 1/2, 65—72 (1954).

L'A. caratterizza il gruppo delle trasformazioni cremoniane indicate nel titolo della presente Nota, studiando anche in modo particolare il caso in cui la proiettività risponda alla funzione inversa nell'algebra dei numeri n -complessi (nel qual caso la trasformazione cremoniana corrispondente in S_n risulta involutoria).

M. Piazzolla-Beloch.

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

• **Šilov, G. E.:** Vorlesungen über Vektoranalysis. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1954. 139 S. R. 2.65 [Russisch].

Verf. setzt die Kenntnis der Vektoralgebra sowie der Differential- und Integralrechnung der Funktionen mehrerer Veränderlichen voraus und gibt eine strenge Auslegung der Vektoranalysis. Die additiven Funktionen der Gebiete werden eingeführt. Die Fundamentaloperatoren der Vektoranalysis: der Gradient, die Divergenz und die Rotation, werden unabhängig vom Koordinatensystem und von der Differentiation nach den Koordinaten definiert. Dadurch ist es möglich, eine bestimmte ideale Integrität und Vollkommenheit der Theorie zu erreichen. Im Anhang gibt Verf. einige besondere Sätze über mehrfache uneigentliche Integrale, die er im Buche benutzt hat. Inhaltsverzeichnis: 1. Skalar- und Vektorfelder. Beispiele. 2. Satz von Ostrogradski und seine Verallgemeinerung. 3. Additive Funktionen der Gebiete und ihre Dichten. 4. Gradient eines Vektorfeldes. 5. Fluß und Divergenz eines Vektorfeldes. 6. Rotation eines Vektorfeldes. 7. Satz von Stokes und seine Anwendungen. 8. Differenzierbare Felder. 9. Glatte Vektorfelder. 10. Harmonische Felder. 11. Konstruktion eines Vektorfeldes aus seiner Rotation und Divergenz. Anhang. Uneigentliche mehrfache Integrale. *W. Wrona.*

● **Kil'čevskij, N. A.:** Elemente der Tensorrechnung und ihre Anwendungen auf die Mechanik. (Physikalisch-mathematische Bibliothek des Ingenieurs.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1954. 167 S. R. 5.15 [Russisch].

Das Buch enthält eine Einführung in die Tensorrechnung nebst Anwendungen auf die Mechanik. Verf. gibt aber nicht nur Anwendungen der Tensoralgebra sondern auch in großem Umfange solche der Tensoranalysis. Er bedient sich dabei der mehrdimensionalen nichteuklidischen Geometrie. Das erste Kapitel hat einleitenden Charakter und behandelt kurz die Vektoren. In dem zweiten Kapitel führt Verf. den Tensorbegriff ein und gibt die Elemente der Tensoralgebra und der Tensoranalysis. Im dritten Kapitel findet man Anwendungen der Tensorrechnung auf die Mechanik der Systeme der Massenpunkte und im vierten Kapitel Anwendungen auf die Mechanik der deformierbaren Körper. Das Buch endet mit einem Literatur- und Sachverzeichnis. *W. Wrona.*

Struik, D. J.: On free and attached vectors in affine and metric space. Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. 2, 126—133 (1954).

Im Anschluß an die Bezeichnungen der modernen Tensoralgebra wird gezeigt, wie sich die Begriffe: freier, gebundener, polarer, axialer Vektor bzw. Bivektor, ferner Rotor, Traktor, Stab, Keil, Motor, Comotor und Kleinsche Schraube erster und zweiter Art nach Bestimmungszahlen und Transformationsweisen anordnen lassen. Die lineare „Motor-Algebra“ geht hauptsächlich auf Studys „Geometrie der Dynamen“ (Leipzig 1903) zurück. Die Schrauben von Ball und die Speere von Study bleiben unbesprochen, da sie zu keiner linearen Algebra gehören.

R. W. Weitzenböck.

Behrend, F. A.: The Steinitz-Gross theorem on sums of vectors. Canadian J. Math. 6, 108—124 (1954).

Die n -dimensionalen Vektoren v_1, v_2, \dots, v_p mit $\sum_{\pi=1}^p c_\pi = 0$ und $c_\pi \leq 1$ bestimmen im R_n nach Wahl eines Anfangspunktes O vermöge der angegebenen Reihenfolge ein orientiertes geschlossenes Polygon P mit den Seitenvektoren v_π . Der Radius der kleinsten P umschließenden Hyperkugel mit Mittelpunkt O sei $R(v_1, v_2, \dots, v_p)$. Ferner sei $\bar{R}(v_1, v_2, \dots, v_p)$ der kleinste Wert von $R(v_1, v'_2, \dots, v'_{p-1}, v_p)$, wenn (v'_2, \dots, v'_{p-1}) die Permutationen von (v_2, \dots, v_{p-1}) durchläuft, und es sei c_n die kleinste positive Konstante, so daß $\bar{R}(v_1, v_2, \dots, v_p) \leq c_n$ bei beliebigem p und beliebigen Vektoren v_1, \dots, v_p . Bekannt sind nur die Werte $c_1 = 1$ und $c_2 = \sqrt{2}$, deren letzterer unabhängig von W. Groß [Monatsh. Math. Phys. 28, 221—237 (1917)], von V. Bergström [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 8, 206—214 (1930)], sowie vom I. Damsteeg und I. Halperin (dies. Zbl. 40, 382) ermittelt wurde. Nach Steinitz [J. reine angew. Math. 143, 128—175 (1913); 144, 1—40 (1914)] gilt $c_n \leq 2(n+1)$. Durch Verfeinerung der Steinitzschen Methode zeigt Verf. $c_n < n$ für $n \geq 3$ und speziell $c_3 \leq (5 + 2\sqrt{3})^{1/2}$. *E. Schönhardt.*

Pidek, H.: Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace X_1 . Ann. Polon. math. I, 114—126 (1954).

Die Transformation eines geometrischen Objektes nullter Klasse mit einer Komponente x in einer X_1 (Koordinate ξ) hat die Gestalt $\bar{x} = q[Q(x, \xi), \bar{\xi}]$, wo $q = Q^{-1}$ (in bezug auf die Variable x). Es seien x_1, \dots, x_n Komponenten von n geometrischen Objekten, die sich gleich transformieren. Es fragt sich, ob es nicht-triviale Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$ gibt, derart, daß f wieder die Komponente eines geometrischen Objektes bildet. Unter bestimmten Differenzierbarkeitsbedingungen stellt sich heraus, daß in diesem Falle $Q(x, \xi) = A\{\theta(\xi)L(x) + \Phi(\xi)\}$ ist und $f = \Psi\{\sum \gamma_i L(x_i)\}$ oder $= \Psi\{\sum \gamma_i L(x_i) + \chi[L(x_1) - L(x)]\}$ ist, je nachdem θ und Φ linear unabhängig oder linear abhängig sind. Man sagt, daß in diesem Falle die Objekte x eine Algebra gestatten (vgl. auch H. Pidek, dies Zbl. 52, 170).

J. Haantjes.

Pidek, H.: Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace X_m . Ann. Polon. math. 1, 127—134 (1954).

In dieser Arbeit behandelt Verf. das im vorsteh. Referat genannte Problem für eine X_m . Die Methoden und Resultate sind ganz ähnlich. $Q(x, \xi)$ soll die Gestalt $A\{\theta(\xi_1, \dots, \xi_m)L(x) + \Phi(\xi_1, \dots, \xi_m)\}$ haben und f genau dieselbe Form wie oben.

J. Haantjes.

Golaž, S.: Über den Begriff der kovarianten Ableitung. Nieuw Arch. Wiskunde. III. R. 2, 90—96 (1954).

Es sei Ω ein geometrisches Objekt erster Klasse in einer X_1 (Koordinate ξ). Betrachtet man Ω als Funktion eines Parameters τ und setzt man für die kovariante Ableitung $D\Omega/d\tau = f(d\Omega/d\tau, \Omega, d\xi/d\tau, \Gamma)$ wo Γ ein Objekt zweiter Klasse ist und setzt dazu voraus, daß $D\Omega/d\tau$ ein Objekt erster Klasse sei, so gibt es noch viele Möglichkeiten für die Funktion f , u. a. auch die klassische Formel. Betrachtet man Ω als Funktion von ξ , so führen dieselben Forderungen u. a. zu einer kovarianten Ableitung, welche linear in Ω ist, für welche aber Ω und $D\Omega/d\xi$ nicht gleichartig sind. Eine andere Möglichkeit ist eine kovariante Ableitung, für welche Ω und $D\Omega/d\xi$ gleichartig sind, die aber quadratisch ist in Ω .

J. Haantjes.

Golaž, S.: Sur la dérivée covariante des objets géométriques de deuxième classe. Ann. Polon. math. 1, 107—113 (1954).

Es handelt sich um die Frage, ob es möglich ist in X_1 mittels eines geometrischen Objektes dritter Klasse eine kovariante Ableitung zu definieren für geometrische Objekte zweiter Klasse. Es zeigt sich, daß dies unmöglich ist, wenn man alle Transformationen der Pseudogruppe $\xi = q(\xi), q'(\xi) : 0$ zuläßt. Es gelingt Verf. aber eine kovariante Ableitung zu definieren in bezug auf die Untergruppe von Transformationen, für welche $q' > 0$ ist.

J. Haantjes.

Signorini, Antonio: Sui moti rigidi sferici. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 274—282 (1954).

Die folgenden beiden Probleme werden in invarianter Darstellung mit differentialgeometrischen Hilfsmitteln behandelt: 1. Die Bestimmung der Bewegung einer körperfesten Kugel S auf einer raumfesten mit gleichem Mittelpunkt, sobald die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ in bezug auf ein raumfestes Achsentripel, und 2. wenn die Komponenten von ω in bezug auf ein körperfestes Achsentripel gegeben sind. Die beiden Probleme sind zueinander invers, indem die beiden Achsentripel ihre Bedeutung in beiden Fällen umkehren. Diese Umkehrung tritt bei der Poincaré-Bewegung in Erscheinung, bei der ein körperfester Kegel auf einem raumfesten ohne zu gleiten abrollt. Für die Beweisführung wird der Begriff der Tangentialkrümmung der vom Endpunkt des Vektors der Winkelgeschwindigkeit auf der Einheitskugel beschriebenen Kurve bei beiden Bewegungsformen verwendet.

Th. Pöschl.

Duncan, W. J.: A kinematic property of the articulated quadrilateral. Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 222—225 (1954).

Verf. beweist mit Hilfe des Satzes von Pappus und einer bekannten Eigenschaft der Relativpole dreier komplan bewegter ebener Systeme den folgenden Satz: „Wenn sich ein Gelenkviereck in seiner Ebene so bewegt, daß sich die Bahnnormalen von zwei gegenüberliegenden Eckpunkten auf der Diagonalen durch die beiden

anderen Eckpunkte schneiden, so schneiden sich die Bahnnormalen der beiden restlichen Eckpunkte auf der Diagonalen durch das erste Eckpunktpaar. Dieser Satz bleibt auch richtig für sphärische Gelenkvierecke und kann noch dahin verallgemeinert werden, daß man an Stelle der Drehgelenke die Relativpole von vier komplan bewegten Ebenen betrachtet. Man erhält dann eine allgemeine Eigenschaft der Bewegung von fünf komplanen starren ebenen Systemen. *W. Schmid.*

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Kneser, Hellmuth: Monoton gekrümmte ebene Kurven. Arch. der Math. 5, 77—80 (1954).

Von dem Krümmungsmittelpunkt I einer ebenen Kurve C sind zwei Eigenschaften gut bekannt: I ist Evolute von C , und die Bogenlänge von I ist gleich der Differenz der Krümmungshalbmesser von C an den betreffenden Endpunkten der Bogen. Verf. gibt einen neuen Beweis dieser Eigenschaften, der, wie die Resultate, nur auf den Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich beruht. Er verlangt, daß die Krümmung positiv monoton sei, und beweist, daß sie stetig ist. Wird nur vorausgesetzt, daß die Krümmung von beschränkter Schwankung ist, so wird die Bogenlänge auf I gleich der Gesamtschwankung des Krümmungshalbmessers längs des zugehörigen Bogens auf C . *J. Teixidor.*

Sbrana, Francesco: Su alcune proprietà delle curve sghembe. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sept. 1953, 263—265 (1954).

Associato ad ogni punto di una curva sghemba un vettore unitario contenuto nel piano osculatore e detti s l'arco, $c(s)$ la curvatura e $q(s)$ l'angolo del vettore colla tangente, l'A. prova essere necessario e sufficiente perché detto vettore abbia derivata parallela alla binormale che sia $dq/ds = c(s)$. Una interpretazione analoga dà per la torsione con un vettore del piano normale. *J. Teixidor.*

Henderson, G. P.: Parallel curves. Canadian J. Math. 6, 99—107 (1954).

Zwei punktweise aufeinander bezogene Kurven des euklidischen R_p heißen Parallelkurven, falls zusammengehörige Tangenten parallel sind und die Verbindungsgerade entsprechender Punkte auf den Tangenten senkrecht steht. Die $p-1$ Parallelkurven einer Kurve erhält man demnach als die Orthogonaltrajektorien der Normalhyperbenen der Kurve. (Man betrachte also die Gesamtheit zueinander gehörender Parallelkurven als Bahnkurven in einer Bewegung einer Hyperbene E normal zu sich.) Verf. untersucht dann die Gesamtheit von Parallelkurven F_p , die von den Punkten eines linearen Unterraumes E_p von E der Dimension p erzeugt werden. Die Ebenen E sind im allgemeinen Schmiegebenen der Dimension p einer Kurve C ; C ist p -te Evolute der Kurven von F_p , diese Kurven sind die p -ten Evoluten von C_p . (Bei Rotation der Hyperbene um eine feste lineare Untermannigfaltigkeit muß man Ausnahmen beachten.) Hyperkugeln mit dem Mittelpunkt in C_p durch den zugehörigen Punkt einer Kurve von F_p berühren diese mindestens in $(p-1)$ -ter Ordnung. Es werden noch die entstehenden abwickelbaren Flächen betrachtet. Z. B. gilt: Die Tangenten an zwei verschiedene erste Evoluten schließen einen festen Winkel ein (dann diese Tangenten sind fest im bewegten System). (Anm. d. Ref.: Die aufgeführten Zusammenhänge sind großteils projektiver Natur: Man betrachte die „projektive Bewegung“ einer Hyperbene, so daß die Tangenten an die Bahnkurven, die die Punkte dieser Hyperbene beschreiben, sich alle in einem Punkt treffen.) *M. Barner.*

Bompiani, Enrico: Un teorema del Bianchi sulle rigate applicabili. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 1—4 (1954).

L. Bianchi (Opere II., Roma 1953, p. 48—95) gab in seiner Diss. folgenden Satz: Sind C und C' zwei isometrisch aufeinander bezogene Raumkurven, so bilden die in den Streifenflächen gegen die Kurventangenten unter dem festen Winkel θ geneigten Geraden g und g' stets dann zwei aufeinander abwickelbare Regelflächen Φ, Φ' , wenn die Krümmungen κ, κ' und Windungen τ, τ' der Kurven durch die Relation $\kappa \cos \theta = \tau \sin \theta = \kappa' \cos \theta = \tau' \sin \theta$ verbunden sind. Verf. bemerkt, daß dieser Satz auch für nicht konstante Bianchische Winkel θ gilt. Diese Winkel beziehen sich dabei nur auf die Elemente dritter Ordnung der beiden Kurven und können mit ihrer Hilfe durch ein einfaches Projektionsverfahren gewonnen werden. Die Kurven C, C' können dann sogar beliebig vorgegeben werden und sind Struktionslinien auf den konstruierten Regelflächen Φ, Φ' , welche natürlich in entsprechenden Punkten von C und C' gleiche Gaußsche Krümmung haben. Vervollg. meinerungen werden angedeutet. *K. Strabacker.*

Hartman, Philip and Aurel Wintner: Umbilical points and W -surfaces. Amer. J. Math. **76**, 502—508 (1954).

Als spezielle Weingarten-Flächen (spezielle W -Flächen) werden solche bezeichnet, zwischen deren Gaußscher und mittlerer Krümmung K und H eine Relation $F(K, H) = 0$ besteht, wobei vorausgesetzt wird, daß $F(K, H)$ für $K \leq H^2$ von der Klasse C^2 ist, und für $K = H^2$ stets $F_H + 2HF_K \neq 0$ ist. Es wird gezeigt: (I) Auf jeder (nicht ebenen und nicht sphärischen) speziellen W -Fläche S sind die Nabelpunkte isolierte Punkte, und ihre Indizes sind negativ. Daraus folgt: (II) Wenn eine geschlossene orientierbare Fläche S vom Geschlecht Null eine spezielle W -Fläche aus der Klasse C^2 ist, so ist sie eine Kugel. — (I) ist unter der verschärften Voraussetzung der Analytizität von S in einem Theorem von H. Hopf (dies. Zbl. **42**, 157) enthalten. (II) hat S. S. Chern [Duke Math. J. **12**, 279—290 (1945)] bewiesen, unter der zusätzlichen Annahme $K > 0$. Chern nimmt dabei für S die Klasse C^3 an; die Nachprüfung der Autoren weist jedoch auf C^4 hin. Auch (II) steckt im analytischen Falle in einem Satz von H. Hopf. In obiger Form gewinnt man es aus (I) mittels eines Ergebnisses von H. Hopf und H. Samelson (dies. Zbl. **18**, 234), wonach auf einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht Null ein Netz mit einer endlichen Anzahl singulärer Punkte wenigstens in einem dieser Punkte positiven Index hat. Unter einschränkenderen Differentiationsvoraussetzungen ist (II) mit der Annahme $K > 0$ in einem Theorem von Pogoreloff (1948) enthalten, ebenso für $K > 0$ unter der Annahme, daß F und S analytisch sind, in einem Ergebnis von Alexandroff (1939). — Die Annahme $F_H + 2HF_K \neq 0$ für $K = H^2$ liefert den elliptischen Charakter der partiellen Differentialgleichung $F(K, H) = 0$ der Fläche $z = z(x, y)$. Aus einem Theorem von L. Niremberg (dies. Zbl. **50**, 98) folgt dann, daß in der Umgebung der Nabelpunkte eine lokale Darstellung $z = z(x, y)$ der Klasse C^3 existiert, und die dritten partiellen Ableitungen gleichmäßig einer Hölder-Bedingung genügen. Beim Beweis vom (I) sind die Fälle 1. Flachpunkt $K = 0$ und 2. kugeligter Punkt $K > 0$ zu trennen. Die Autoren können sich dabei auf drei frühere Arbeiten stützen [dies. Zbl. **50**, 378; Amer. J. Math. **75**, 449—476 (1953)].

K. Strubecker.

Kruskal, Martin: The bridge theorem for minimal surfaces. Commun. pure appl. Math. **7**, 297—316 (1954).

Énoncé approximatif du théorème fondamental démontré par l'A.: Etant données deux surfaces minima simplement connexes S et S' limitées par deux contours C et C' , on supprime un petit arc $a b$ de C et un petit arc $a' b'$ de C' , puis on relie a à a' et b à b' par deux arcs $a a'$ et $b b'$ voisins et presque parallèles; le contour ainsi obtenu limite une surface minima simplement connexe formée de trois morceaux dont deux sont respectivement voisins de S et S' et le troisième a une aire petite. C'est un cas particulier d'un théorème que R. Courant avait énoncé en 1950 en donnant seulement une idée sommaire de la démonstration.

J. Dufresnoy.

Jonas, Hans: Bemerkungen zu dem nach Tissot benannten Abbildungsproblem. Math. Nachr. **11**, 187—189 (1954).

Das Tissotsche Abbildungsproblem verlangt, die Ebene (x, y) flächentreu so auf die Ebene (u, v) selbst abzubilden, daß dabei ein orthogonales Kurvennetz in das Rechtecknetz $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ übergeht. Nach A. Korkine [Math. Ann. **35**, 588—604 (1890)] ist das Differentialsystem $x_u y_v - x_v y_u = 1$, $x_u x_v + y_u y_v = 0$ dieses Problems der Telegraphengleichung $\theta_{x^2} = \theta$ äquivalent. Verf. gibt für diese Reduktion der Aufgabe auf die Telegraphengleichung ein neues Verfahren, und kommt zu dem Ergebnis, daß sowohl x, y wie u, v mittels eines Integrals $\theta(x, \beta)$ der Telegraphengleichung ohne weitere Quadraturen dargestellt werden können.

K. Strubecker.

Lavrent'ev, M. A.: Die Stabilität in einem Satz von Liouville. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 925—926 (1954) [Russisch].

Es handelt sich um den Liouvilleschen Satz, daß es keine nichttriviale konforme Abbildung des dreidimensionalen Raumes auf sich gibt. Verf. teilt ohne Beweis zwei Sätze mit, die etwa folgendes besagen: Wenn (unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen) die betrachtete Abbildung nahezu konform ist, d. h. wenn das Ellipsoid, auf das die unendlich kleine Kugel abgebildet wird, sich „wenig“ von einer Kugel unterscheidet, dann existiert eine triviale konforme Abbildung so, daß die Entfernung der beiden Bildpunkte „klein“ ist. Die Abschätzung dafür hängt nur von der vorgegebenen Genauigkeit ab und nicht von den die Abbildung vermittelnden Funktionen.

W. Hahn.

Lagrange, René: Sur les réseaux d'hélices de même cône directeur tracés sur certaines surfaces. Bull. Sci. math., II. Sér. **78**, 50—80 (1954).

Verf. bestimmt mittels der doppelt symmetrischen Tensoren von der dritten Ordnung Flächen, welche ein zu den Minimalkurven, Asymptotenlinien oder Krümmungslinien konjugiertes Netz aus Schraubenlinien mit dem gleichen Richtungskegel tragen. Die allgemeinen Flächen mit solchen Netzen werden bekanntlich durch eine affine Transformation aus den Minimalflächen erhalten (vgl. G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 3, p. 472, Paris 1894). Verf. erhält in seinen Fällen abwickelbare Schraubenflächen bzw. die Minimalschraubenfläche bzw. die Gesinstflächen. Daran anschließend werden diejenigen Flächen bestimmt, die zwei oder drei solche Netze tragen. Im letzten Falle, wo die drei Achsen der Richtungskegel aufeinander senkrecht stehen, und der besondere Erwähnung verdient, gibt er eine Parameterdarstellung der Koordinaten und die cartesische Gleichung der Fläche.

O. Volk.

Ryžkov, V. V.: Über eine Transformation eines Paares von isometrischen Flächen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 25—27 (1954) [Russisch].

Verf. nennt „quasiähnlich“ eine solche Abbildung $\tilde{x}' = k \cdot \tilde{x}$, $\tilde{y}' = k \cdot \tilde{y}$ der Punktepaare \tilde{x}, \tilde{y} zweier euklidischer R_n auf die Punktepaare zweier anderer R_n , wenn dabei eine zuvor gegebene isometrische Beziehung $\tilde{v} = \mathfrak{A} \tilde{x} - \tilde{y}$ in eine solche zwischen \tilde{x}' und \tilde{y}' übergeht. Es zeigt sich leicht, daß außer bei $k = \text{const.}$ dies nur noch möglich ist, wenn man $k = c/(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)$ ($\tilde{x} \neq \tilde{y}$) setzt. Mannigfaltigkeiten, deren Bogenelemente bis zu einer bestimmten Ordnung übereinstimmen, behalten diese Eigenschaft bei quasiähnlichen Abbildungen bei. Ferner gilt: Die Beziehung eines isometrischen Flächenpaares mit konjugierten Netzen zu ihren bezüglich dieser Netze gebildeten Laplace-transformierten bleibt bei quasiähnlichen Abbildungen erhalten.

W. Burau.

Nitsche, Joachim: Randwertprobleme für die Verbiegung positiv gekrümmter Flächenstücke. Math. Z. **60**, 353—366 (1954).

Verf. betrachtet berandete, positiv gekrümmte Flächenstücke. Das charakteristische quasilineare System von Differentialgleichungen für zwei gesuchte Funktionen in zwei Veränderlichen wird auf eine elliptische Normalform gebracht [vgl. Math. Nachr. **7**, 35—54 (1952)]. Sind x^1, x^2 die Parameter und bedeutet T das Gebiet der (x^1, x^2) -Ebene, dem das Flächenstück entspricht, mit dem Rande S (Bogenlänge s), so ist das Biegeproblem äquivalent mit der Bestimmung zweier stetig differenzierbarer Funktionen $u(x^1, x^2), v(x^1, x^2)$, welche in T Lösungen des quasilinearen Systems sind. Durch geeignete Randbedingungen, die durch besondere Eigenschaften analytischer oder geometrischer Art ausgezeichnet sind, unabhängig davon, welche Gestalt sie bei einer speziellen Wahl der gesuchten Funktionen annehmen, gelingt es dem Verf., die Lösungen u, v der Gauß-Codazzischen Gleichungen eindeutig zu bestimmen und damit eine spezielle Fläche unter der Gesamtheit der zu ihr isometrischen Flächen zu charakterisieren. Ausgehend von Integralrelationen, d.h. von Beziehungen der allgemeinen Art
$$\oint_S M(u, v; s) ds = \iint_T N(u, v; u_{,1}, v_{,1}; x^1) dx^1 dx^2$$

kommt er zu der Forderung, daß Integralrelationen existieren mit den Eigenschaften: 1. sie sind frei von den Ableitungen der gesuchten Funktionen, 2. der Integrand des Randintegrals ist vermöge der Randbedingung $H(u, v; s) - \pi(s) = 0$ unabhängig von u, v und nur abhängig von der Funktion $\pi(s)$; dann ist $H = b F(k, b, a, b, s)$, wo k^2 die Gaußsche Krümmung, a die geodätische Windung und b die Normalkrümmung des Randes des gesuchten Flächenstückes sind und F der Potentialgleichung genügt. Da, wie Verf. zeigt, k, b, a, b Potentialfunktionen sind, folgt, daß $F = \alpha(s) + \gamma(s) k b + \beta(s) a b$ (α, β, γ beliebige Funktionen von s) eine Potentialfunktion ist; die Randbedingung geht daher in $\alpha(s) b + \beta(s) a + \gamma(s) k b = f(s)$ über, d.h. zur Klasse der Randbedingungen gehören in besonderen solche, wo eine lineare Beziehung zwischen Normalkrümmung und geodätischer Krümmung besteht.

O. Volk.

Löbell, Frank: Kriterien für die Integrabilität von Richtungsübertragungen in Flächen. S. Ber. mat.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1953**, 141—148 (1954).

Facendo seguito a un precedente lavoro (questo Zbl. **46**, 392), sui trasporti lineari di direzioni su una superficie di E_3 euclideo, l'A. ritrova qui un criterio per l'integrabilità di un tale trasporto, già da lui assegnato nel citato lavoro; l'interesse della nuova dimostrazione sta nel fatto che, mentre nelle (due) precedenti dimostra-

zioni occorre presupporre il fatto — già provato prima — che il trasporto fosse lineare — e di conseguenza l'esistenza di un vettore caratteristico —, tale ipotesi non è più qui necessaria, e la sua validità segue dal corso del ragionamento. Lo scopo dell'A. è ottenuto nel presente lavoro considerando la variazione di un opportuno integrale curvilineo, e applicando la formula di Gausz-Bonnet sulla curvatura integrale; è da notare che, viceversa, presupposta nota la teoria dei trasporti lineari, si può ottenere per questa via una semplice e naturale dimostrazione della formula di Gausz-Bonnet.

V. Dalla Volta.

Iha, P. and V. R. Chariar: On a certain rectilinear congruence. Math. Student 22, 77—83 (1954).

Es handelt sich um Linienkongruenzen, deren eine Brennfläche eine Kurve (Brennkurve) ist. Es werden einige einfache (zumeist bekannte) Sätze mitgeteilt. Insbesondere wird der Fall einer Normalenkongruenz studiert. Die von den Punkten der Brennkurve ausgehenden Kongruenzstrahlen bilden dann bekanntlich Drehkegel, deren Achsen Tangenten der Brennkurve sind; die Krümmungslinien der einen Schar auf den Normalenflächen der Kongruenz sind daher Kreise. Die weiteren Ergebnisse der Verff. sind leider fehlerhaft. Es werden dabei auch fehlerhafte Ergebnisse einer früheren Arbeit (Chariar-Singh, dies. Zbl. 34, 248) herangezogen, die ich in meinem Referat berichtigt habe, ohne daß die Verff. dies bisher bemerkt hätten.

K. Strubecker.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Ara, Rahmat und M. Pinl: Zur integrallosen Darstellung reeller isotroper Kurven. J. reine angew. Math. 192, 204—209 (1954).

Der euklidische R_n mit der Metrik $ds^2 = \sum \varepsilon_k dx_k^2$ ($\varepsilon_k = +1, k = 1, 2, \dots, n$) kann durch komplexe Affinitäten $y_k = \pm i x_k$ in jeden pseudoeuklidischen P_n übergeführt werden. Dabei gehen die isotropen Kurven von R_n in die isotropen Kurven von P_n über, deren es sowohl komplexe als auch reelle gibt. Einer integrallosen Darstellung der isotropen Kurven von R_n entspricht eine integrallose Darstellung einer (nicht notwendig reellen) isotropen Kurve in P_n . Verff. geben dafür verschiedene Beispiele, die sich auf den pseudoeuklidischen P_3 ($ds^2 = dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$) und die beiden pseudoeuklidischen P_4 mit $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2$ sowie $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2$ beziehen, und stützen sich dabei auf frühere Arbeiten von Pinl (dies. Zbl. 23, 266; 34, 90).

K. Strubecker.

Morduchaj-Boltoyskoj, D. D.: Über die Bogenlänge einer Kurve zweiter Ordnung in der Lobačevskijschen Ebene. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 449—450 (1954) [Russisch].

Verf. zeigt in dieser Note, daß die Bestimmung der Bogenlänge einer Ellipse in der hyperbolischen Ebene (wovon es mehrere Typen gibt) allgemein auf ein hyperelliptisches Integral führt. Wie man nun bei einer euklidischen Ellipse algebraisch rektifizierbare Bögen $s_2 - s_1$ sucht, werden hier mit Hilfe des Abelschen Theorems solche Bogensummen $s_2 + s_3$ auf der Ellipse gesucht, daß der Differenzbogen $s_2 + s_3 - s_1$ algebraisch rektifizierbar ist.

W. Burau.

Knothe, Herbert: Eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse. Math. Z. 60, 235—242 (1954).

Der Kreis hat die elementare Eigenschaft, eine einparametrische Schar kongruenter einbeschriebener Dreiecke zu besitzen, die durch eine Drehung so ineinander übergehen, daß auch die Eckpunkt tangentialen sich dabei vertauschen. Dies wird zu einer kennzeichnenden Eigenschaft der Ellipse erweitert: Einer Ellipse E mit stetiger Tangente ohne geradlinige Teile sei eine von einem Parameter $0 \leq t < 2\pi$ stetig differenzierbar abhängige Schar von Dreiecken mit den Ecken $A(t)$, $B(t) = A(f(t))$, $C(t) = A(g(t))$ einbeschrieben; dabei sei jeder Kurvenpunkt genau einmal A , B bzw. C und es sei die Seite BC eines Dreiecks (t) zugleich Seite AB eines anderen der Dreiecke $(t' + t)$. Bei einer Affinität, die eines der Dreiecke in ein anderes überführt, sollen die Eckpunkt tangentialen ineinander übergehen. Die Ellipse E ist eine Ellipse, wenn ein Zyklus $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$; $A(t')$, $B(t')$, $C(t')$; $A(t'')$, $B(t'')$, $C(t'')$; ... unendlich ist oder eine Periode > 4 besitzt. Als Anwendung wird ein neuer Beweis der folgenden von W. Blaschke [Vorlesungen über Differentialgeometrie, II. Bd., Berlin 1923, S. 191ff.] gefundenen Kennzeichnung des

Ellipsoids gegeben: Es ist der einzige Eikörper festen Volumens, für den das einbeschriebene Simplex maximalen Volumens den kleinsten Wert dieses Volumens liefert. Der Satz wird so gleich für das n -dimensionale Ellipsoid bewiesen.

W. Süss.

Süss, W.: Affine und Minkowskische Geometrie eines ebenen Variationsproblems. Arch. der Math. 5, 441—446 (1954).

Der Verf. zeigt, daß innerhalb der geometrischen Variationsrechnung die affine Differentialgeometrie ein sehr naturgemäßes Hilfsmittel darstellt. Ausgehend vom Variationsproblem $w = \int q(\dot{x}) dt$; $\dot{x} = dx/dt$ (q homogen von 1. Ordnung) wird gezeigt, daß die Eichfiguren (die Indikatritz \mathfrak{I} und die Figuratrix \mathfrak{f}) bezüglich des Einheitskreises polarreziproke Figuren sind. Aus \mathfrak{I} und \mathfrak{f} erhält man nach einer Drehung um einen rechten Winkel zwei neue Eichfiguren \mathfrak{E} und \mathfrak{e} . (Das Kurvenpaar \mathfrak{r} und \mathfrak{e} ist durch parallele Tangenten aufeinander bezogen. \mathfrak{e} ist die Isoperimetrix von Busemann). Nach Einführung des ausgezeichneten Parameters σ : $w = \int d\sigma$ ergeben sich die „Frenet-Gleichungen“ der Theorie: $\mathfrak{e}' = k \mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}'' = -K \mathfrak{e}$. Durch Vorgabe von k und K als Funktionen von σ ist das Kurvenpaar bis auf homogene Affinitäten bestimmt. Die Extremalen des isoperimetrischen Problems der durch das Variationsproblem begründeten Minkowski-Geometrie sind die Kurven mit $k = \text{const.}$, d. h. zu \mathfrak{e} homothetische Kurven. Es ordnet sich also die Isoperimetrix \mathfrak{e} sehr natürlich in die affine Geometrie der Kurvenpaare ein. Unter Benützung von \mathfrak{e} und \mathfrak{E} läßt sich dem Kurvenpaar \mathfrak{r} , \mathfrak{e} ganz analog ein zweites \mathfrak{X} , \mathfrak{E} mit völlig gleichen Beziehungen zuordnen. Damit besitzt man eine duale Erweiterung der Theorie. Die Frage, ob es auch zum Kurvenpaar \mathfrak{X} , \mathfrak{E} ein Variationsproblem gibt, das für dieses Paar die gleiche Rolle spielt wie das Ausgangsproblem für \mathfrak{r} und \mathfrak{e} wird im Falle eines positivdefiniten Ausgangsproblems bejahend beantwortet. Man erhält so ein zum ursprünglichen adjungiertes Problem. Der Verf. weist zum Abschluß noch daraufhin, daß bei dem allgemeineren Variationsproblem $w = \int q(x, \dot{x}) dt$ ein erweiterter Ansatz der affinen Geometrie der Kurvenpaare zu einer entsprechenden Theorie führt.

K. P. Grottemeyer.

Klingenberg, Wilhelm: Sui sistemi di sfere nella geometria di Laguerre. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 185—199 (1954).

Es wird im R_4 die indefinite Metrik betrachtet: $ds^2 = -dr^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, wie sie in der speziellen Relativitätstheorie auftritt. Deutet man x, y, z als Mittelpunkt und r als Radius einer Kugel im R_3 , so erhält man hier die Kugelgeometrie von Laguerre (vgl. etwa W. Blaschke, Differentialgeometrie III, Berlin 1929). Hier wird die Differentialgeometrie der (zweidimensionalen) Flächen F im R_4 untersucht oder die „Kugelkongruenzen“ im R_3 . Für die „Kongruenzen von Ribaucour“ und für die entsprechenden Flächen F im R_4 und die Flächen F mit der Gaußischen Krümmung Null im R_4 werden verschiedene kennzeichnende Eigenschaften angegeben.

W. Blaschke.

Gasapina, Umberto: Su una proprietà metrica delle flessioni delle superficie sviluppabili. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 160—163 (1954).

L'A. considera le congruenze di sfere dello spazio ordinario che ammettono deformazioni isometriche della superficie S dei centri, dipendenti continuamente di un parametro a in modo che le sfere della congruenza diventino ortogonali alla sfera di raggio a appartenente ad un sistema di sfere concentriche fisso e prova essere necessario e sufficiente che S sia sviluppabile e si possa deformare in modo che tutte le sfere vengano a passare per un punto fisso. Tali congruenze sono poi caratterizzate pel fatto che sviluppata S su di un piano, l'inviluppo delle sfere nel caso generale si compone di due linee simmetriche, una delle quali si può pensare descritta dal punto fisso nel rotolamento che applica S sul piano.

J. Teixeira.

Bompiani, E.: Sugli elementi curvilinei piani E_3 tangenti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 16, 585—590 (1954).

L'A. riprende lo studio, già iniziato da C. Longo (questo Zbl. 31, 271), della totalità ∞^2 degli E_3 curvilinei piani con dato centro e data tangente. Alla rappresentazione sui punti di un piano, data da Longo, egli sostituisce quella che si ottiene col far corrispondere all' E_3 di equazione: $y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + (4)$ il punto di S_3 di coordinate: $\xi = a_2$, $\eta = a_2^2$, $z = a_3$, $\tau = 1$ e appartenente perciò al cono $\xi^2 = \eta \tau$. Alle collineazioni piane che mutano in $s\bar{s}$ quella totalità di E_3 corrispondono le omografie di un G_4 che mutano in $s\bar{s}$ il cono lasciando fissi, oltre al vertice, il punto che

rappresenta l'elemento iperinflessionale e due generatrici che rappresentano elementi di flesso o eccezionali. Invece alle trasformazioni puntuali regolari che mutano in sé la ∞^2 di E_3 corrispondono in S_3 le collineazioni di un G_6 . Nei due casi l'A. si occupa degli invarianti di più elementi E_3 . P. Buzano.

Čech, E.: Deformazione proiettiva di strati d'ipersuperficie. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 266—273 (1954).

Questa comunicazione di E. Čech segue ad una serie di Note pubblicate sotto il titolo „Geometrie projective différentielle des correspondences entre deux espaces“ (vid. per le prime tre, questo Zbl. 41, 90) nelle quali l'A. ha ripreso la trattazione sistematica delle proprietà proiettive delle corrispondenze puntuali analitiche C fra due spazi proiettivi S_m, S_n coll'uso del riferimento mobile di E. Cartan, Note alle quali conviene di riportarsi per i concetti e risultati adottati in questa. — Nell'presente lavoro si studiano le deformazioni proiettive di stratti Σ d'ipersuperficie cioè di sistemi ∞^1 d'ipersuperficie tali che per ogni punto dello spazio ne passa una e una sola. Una C è deformazione proiettiva di un Σ se per ogni coppia A, A' di punti omologhi in C esiste una collineazione $K(A, A')$ fra i due spazi tale che presa una curva γ qualsiasi per A, C γ e $K \gamma$ abbiano in A' un contatto di primo ordine, contatto che diventa del secondo ordine se γ giace nell'ipersuperficie di Σ per A . Segue allora in particolare che C sottopone ogni singola ipersuperficie di Σ ad una deformazione proiettiva nel senso di Fubini. Si ha poi nel caso del piano ($n = 2$) che ogni C è deformazione proiettiva almeno per uno, e al più per tre stratti (di curve caratteristiche di C). Se Σ si compone di iperpiani, iperpiani sono i trasformati e la corrispondenza subordinata di C fra due di essi diventa una collineazione, e viceversa. Appartengono a questa famiglia (triviale) le corrispondenze sviluppabili. Per $n > 2$ una C può essere deformazione proiettiva al più per due stratti. Se $n > 3$ tutte appartengono ad un unico tipo costruibile con opportune proiezione e sezioni a partire delle assintotiche di una superficie di S_3 . Nel caso $n = 3$ esistono inoltre le deformazioni proiettive ottenute a partire dalla rete di deformazione proiettiva di una superficie (deformabile) non rigata: si hanno due (od una) congruenze di tangenti alla superficie e per ognuna di queste la C si definisce in modo unico mediante la collineazione relativa al contatto di terzo ordine fra la superficie e la sua deformata. Tale C è asintotica, cioè trasforma in asintotiche le asintotiche di qualsiasi rigata della congruenza e risulta deformazione proiettiva per due strati formati da quelle rigate della congruenza tangenti alla superficie di partenza lungo le asintotiche. Se C è deformazione proiettiva per un solo strato, per $n = 3$, può comporsi di superficie R od R_0 non sviluppabili e le C dipendono allora di 15, o, 14 funzioni di un argomento. Invece se $n > 3$ le ipersuperficie di Σ sono ovvero iperpiani (caso triviale) o involuppi di ∞^1 iperpiani. Per dualità alle sviluppabili di Σ corrispondono le assintotiche di una superficie A il cui spazio di appartenenza ha una dimensione d , con $2 \leq d \leq n$, detta classe dello strato parabolico Σ . La trasformazione k -linearizzante A relativa ad una omografia tangente K a C in un punto A qualsiasi, è una omografia della stella di centro A variabile con K . Nel caso generale A non si potrà scegliere in modo che trasformi la stella di vertice A nell'iperpiano tangente alla sviluppabile di Σ per A . Allora per ogni tale strato esistono deformazioni proiettive dipendenti di $2n + 2$ funzioni arbitrarie di un argomento. Nella ipotesi contraria riguardante A , bisogna tener conto nella discussione della classe dello strato e porta ad un numero assai elevato di casi particolari che sono elencati in dettaglio nel lavoro. J. Teixidor.

Finikoff, G.: Systèmes de congruences W. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 312—321 (1954).

Ein System von W -Kongruenzen ist erklärt als eine Familie von ∞^2 W -Kongruenzen, deren Brennflächen zwei Scharen von je ∞^1 Flächen bilden. Das erste Beispiel eines solchen Systems fand der Autor 1941. Es werden die wichtigsten Eigenschaften und Konstruktionen der Systeme von W -Kongruenzen angegeben, insbesondere ihr Zusammenhang mit den Paaren schichtbarer Kongruenzen beleuchtet. Hauptsächlichste Absicht des übersichtlichen Vortrags ist es aber, neben eigenen auch verschiedene neuere Ergebnisse von Moskauer Schülern des Autors (Lachtanoff, Ermolaeff, Schulman, Konzeina, Bazileff, Grigorieff, Korovin) mitzuteilen, die sich außer auf die Systeme von W -Kongruenzen auch auf verschiedene Verallgemeinerungen, insbesondere auch auf höhere Dimensionen beziehen. (Viele Druckfehler, teilweise auch bei den Namen, kein Literaturverzeichnis.) K. Strubecker.

Godeaux, Lucien: Sur quatre suites de Laplace associées à une congruence W. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci. V. Sér. 40, 880—885 (1954).

Si on considère une congruence W de surfaces focales x et x^* , la représentation des asymptotiques de ces surfaces par des points U, V, U^*, V^* de la quadrique de

Klein Q permet de définir deux suites de Laplace L et L^* ; les droites UV et U^*V^* se coupent en un point J de Q engendrant une suite de Laplace $\dots J_n \dots J_1 J J_1 \dots J_m$ inscrite aux précédentes, J_n étant section de $U_n U_{n-1}$ et $U_n^* U_{n-1}^*$, J_m de $V_m V_{m-1}$ et $V_m^* V_{m-1}^*$. Cinq points J consécutifs déterminent un hyperplan dont le pôle par rapport à Q décrit une suite de Laplace, circonscrite aux suites $L; \dots P_n \dots P_1 P P_1 \dots P_m \dots$. Le point P_n est intersection des droites $V_{n-1} V_{n-1}^*$ et $V_n V_n^*$, le point P_{-m} de $U_{-m-1} U_{-m-1}^*$ et $U_m U_m^*$. Si les suites L et L^* s'arrêtent en U_n et U_{n+1}^* y présentant le cas de Laplace, il est connu que la série des J , s'arrête en J_{n+1} qui coïncide avec U_{n+1}^* et en $J_{-(n+3)}$ coïncidant avec V_{n+2} ; les séries L et L^* s'arrêtent encore en V_{n+2} et V_{n+3}^* y présentant le cas de Goursat. Dans cette note l'A. établit projectivement que la série des P s'arrête également dans les deux sens, en P_{n+2} avec le cas de Goursat et en $P_{-(n+1)}$ avec le cas de Laplace. Application aux cas $n = 0, 1$.

B. d'Orgeval.

Kovancov, N. I.: Zur projektiven Theorie eines Geradenkomplexes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 917—920 (1954) [Russisch].

Verf. betrachtet Regelflächen F_2 in einem linearen Komplex K ; er zeigt, daß dann auf jedem Strahl q von F_2 eine Involution definiert ist, bei der 2 Punkte M und P einander zugeordnet sind, wenn die dem Punkt M im Komplex entsprechende Ebene die Tangentialebene an F_2 in P ist. Weitere Untersuchungen in dieser Note befassen sich mit den schon von F. Klein [Math. Ann. 5, 257—278 (1872), insbes. 271] eingeführten 3 Hauptflächen eines Komplexes, die durch einen Strahl desselben hindurchgehen. Diese Flächen hängen von einer Gleichung 3. Grades ab, deren Wurzeln auch teilweise oder ganz zusammenfallen können. Im letztgenannten Falle muß der Komplex linear sein. Die projektive Theorie der Komplexe erhält somit eine gewisse Ähnlichkeit mit der metrischen Theorie der Flächen 2. Grades: der lineare Komplex spielt die Rolle der Kugel, bei 2 gleichen Wurzeln liegt das Analogon zu den Drehflächen vor usw. Der Ausgangspunkt der Untersuchungen des Verf. ist eine Behandlung der Komplexe nach Cartan mit Hilfe eines beweglichen Tetraeders, von dem eine Kante die Komplexgerade ist. W. Burau.

Bell, P. O.: A theorem on generalized conjugate nets in projective n -space. Duke math. J. 21, 323—327 (1954).

Let M_1, \dots, M_r be points on the u^1, \dots, u^r -tangents at the point M_0 of an analytic variety V of r dimensions in a linear space S_n . It is supposed that the parametric net is a generalized conjugate net (Cp. this Zbl. 46, 397). Furthermore it is assumed that the points M_α ($\alpha = 1, \dots, r$) describe varieties V_α , having the property that the tangent plane of each V_α at M_α passes through the points M_β . It is proved that in this case the parametric net on V_α is (α, β) -conjugate. The tangent plane of V_α at M_α intersects the tangent plane of V at M_0 in an $(r-1)$ -plane II_α . The (β, α) -Laplace transform of V_α at M_α is defined as the point of intersection of the u^α -tangent to V_α at M_α with the $(r-2)$ -plane of intersection of II_α and a neighbouring II_β , as II_β moves in the direction of the u^β -tangent. The coordinates of this point are computed. J. Haantjes.

Jeger, M.: Zur projektiven Differentialgeometrie der ebenen Kurven-3-Gewebe. Math. Z. 60, 112—119 (1954).

Verf. gibt Bedingungen dafür, daß die Kurven eines durch $p_{ijk} dx^i dx^j dx^k = 0$ mit symmetrischem p_{ijk} dargestellten ebenen Kurven-3-Gewebes Geodätische einer vorgegebenen affinen Übertragung der Gewebeebene sind, speziell auch dafür, daß die Geodätischen der Übertragung das mit dem Gewebe verknüpfte Doppelverhältnissystem bilden. Ist für die Übertragung $I_{ik}^j = 0$, so erhält man Bedingungen für die Geradlinigkeit des Gewebes. G. Bol.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

● Levi-Civita, Tullio: Opere matematiche. Memorie e note. Vol. I. 1893—1900. Bologna: Nicola Zanichelli 1954. XXX, 563 p. Lire 8000.

Das Erscheinen des ersten Bandes der gesammelten Abhandlungen von Levi-Civita (1873—1941) wird jeder Geometer mit Freude begrüßen, weil so vieles von dem, was er geleistet hat, jetzt noch immer aktuell ist. Dieser erste Band enthält in chronologischer Reihenfolge die

Arbeiten zwischen 1893 und 1900. In einer der ersten Abhandlungen über absolute Invarianten eines Systems von ko- und kontravarianten Größen bezüglich einer Gruppe verbindet Verf. die Einsichten und Methoden von Ricci und Lie. Von 1895 an erscheinen Abhandlungen über klassische Mechanik (Algebraische Integrale der Dynamik, Bewegung eines festen Körpers um einen festen Punkt, spezielle Bewegungen mit drei Freiheitsgraden, usw.). Die Arbeiten haben einen geometrischen Charakter. Oft wird vorausgesetzt, daß keine Kraft vorhanden ist. Es handelt sich dann um die geodätischen Linien eines Riemannschen Raumes. Wichtig ist die Abhandlung über die Möglichkeit, die Bewegungsgleichungen eines Systems A in die Gleichungen eines Systems B zu transformieren. Verschiedene Arbeiten handeln über die Potentialgleichung $\Delta_2 u = 0$. Mittels der Transformationen, welche Potentiale in sich selbst transformieren, werden alle Typen von Potentialen gefunden, die von zwei Koordinaten abhängen (d. h. für die krummlinigen Koordinaten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ sollen $\Delta_2 u = 0$, $\partial u / \partial \varrho_3 = 0$ ein vollständiges System bilden). Das Buch schließt mit der berühmten Abhandlung von Ricci und Levi-Civita: „Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications“ in Math. Ann., die jahrelang die Hauptquelle bildete für das Studium der Tensorrechnung. J. Haantjes.

Kručkovič, G. I.: Klassifikation der dreidimensionalen Riemannschen Räume nach den Bewegungsgruppen. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 1 (59), 3—40 (1954) [Russisch].

Bianchi, in his „Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni“ (Pisa 1918) classified the Riemannian V_3 with positive definite ds^2 according to their groups of motions. The author remarks that new cases arise when the condition $ds^2 > 0$ is given up, for instance the theorem: If the surfaces of transitivity of a group G_r of motions of a V_n are V_{n-1} , then they are geodesic parallel, holds only for non isotropic surfaces. The classification is performed by selecting coordinate systems in which the structural constants of the G_r have the greatest simplicity. The study involves V_3 admitting G_2 , non-transitive G_3 , transitive G_3 and G_4 . A list of results is at the end; it contains 5 types of ds^2 allowing a G_2 , 4 types with non-transitive G_3 , 7 types with transitive G_3 and 8 types with a G_4 (of which 4 are integrable). For instance, the V_3 with $ds^2 = e_1(dx^1)^2 + \alpha(dx^2)^2 + 2\beta dx^2 dx^3 + \gamma(dx^3)^2$, $e_1 = \pm 1$, α, β, γ arbitrary functions of x^1 , $\alpha\gamma - \beta^2 = 0$, admits an abelian G_2 , of which the surfaces of transitivity are non isotropic; the V_3 with $ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1 dx^2 + g_{33}(dx^3)^2$, g_{11}, g_{12}, g_{33} arbitrary functions of x^1 , $g_{33} \neq 0$, $g_{12} \neq 0$, admits a non-transitive G_3 with isotropic surfaces of transitivity; the V_3 with $ds^2 = k(dx^1)^2 + e^{2x^1}(2dx^1 dx^2 - (dx^3)^2)$, k a constant, admits an integrable G_4 with intransitive subgroup G_3 . D. J. Struik.

Yano, Kentaro: Groups of motions and groups of affine collineations. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 229—233 (1954).

L'A. dà, senza dimostrazione, alcuni interessanti risultati sui gruppi di movimenti in spazi di Riemann, e sui gruppi di collineazioni affini, generalizzando precedenti teoremi di H. C. Wang, I. P. Egorov, Y. Muto. Ecco alcuni degli enunciati dell'A.: a) L'ordine massimo di un gruppo completo di movimenti per uno spazio di Riemann a curvatura non costante non supera $\frac{1}{2}n(n-1)+2$. b) Uno spazio di Riemann R_n con $n \neq 4$ non ammette gruppi di movimenti di ordine r tale che $\frac{1}{2}n(n+1) > r > \frac{1}{2}n(n-1)+1$. c) Se uno spazio di Riemann R_n con $n \neq 4$, ammette un gruppo di movimenti di ordine $\frac{1}{2}n(n-1)+1$, tale gruppo è transitivo. d) Se uno spazio R_n , con $n \neq 4$, $n \neq 8$, ammette un gruppo di movimenti di ordine $\frac{1}{2}n(n-1)+1$, esiste un campo ξ di direzioni tale che la direzione $\xi(P)$ in P è trasformata nella direzione $\xi(Q)$ in Q da ogni movimento del gruppo che porti P in Q . e) Condizione necessaria e sufficiente affinché uno spazio R_n con $n \neq 4$, $n \neq 8$ ammetta un gruppo di ordine $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ è che esso o sia il prodotto topologico di una retta e di un R_{n-1} a curvatura costante, o che R_n sia a curvatura costante negativa. f) Indicato il gruppo lineare con $x'_i = a_{ij}x_j$, poniamo $H_n = \{(a_{ij}), |a_{ij}| = 0\}$; $H'_n = \{(a_{ij}), |a_{ij}| \neq 0\}$; $P_n = \{(a_{ij}), a_{ii} = 1; K = \{(a_{ij}), a_{ij} = \lambda \delta_{ij}, \lambda > 0\}$; $L = \{(a_{ij}), a_{11} = 1, a_{31} = 0, |a_{ij}| = 1 (\alpha = 2, \dots, n)\}$; $L' = \{(a_{ij}), a_{11} = 1, a_{1\alpha} = 0, |a_{ij}| = 1 (\alpha = 2, \dots, n)\}$; $M = \{(a_{ij}), a_{11} > 0, a_{31} = 0, |a_{ij}| = 1 (\alpha = 2, \dots, n)\}$; $M' = \{(a_{ij}), a_{11} > 0, a_{1\alpha} = 0, |a_{ij}| = 1 (\alpha = 2, \dots, n)\}$ e sia, infine, $I(b)$ la matrice diagonale $I(b) = \langle e^{(1+b)t}, e^{bt}, \dots, e^{bt} \rangle$, con b reale. Se allora uno spazio A_n a connessione affine simmetrica ammette un gruppo di movimenti il cui gruppo di isotropia in un punto ordinario $P \in H_n$, H'_n , P_n , $K \times M$, $K \times M'$, $K \times L$, $K \times L'$, $I(b) \times L$, o L , il gruppo è transitivo e il suo ordine è rispettivamente $n^2 + n$, $n^2 + n$, $n^2 + n - 1$, $n^2 + 1$, $n^2 + 1$, n^2 , n^2 , $n^2 - 1$, e lo spazio è piano; se invece il suddetto gruppo di isotropia è $I(b) \times L'$, o L' , o il gruppo è transitivo e di ordine n^2 o $n^2 - 1$, ovvero intransitivo e di ordine $n^2 - 1$ o $n^2 - 2$.

V. Dalla Volta.

Golab, S.: Les courbures (ordinaires) d'une courbe située sur une hypersurface et les courbures géodésiques et normales ainsi que la torsion géodésique de cette courbe. Ann. Polon. math. 1, 81—88 (1954).

Für eine Kurve auf einer Hyperfläche in V_3 definiert man die erste und zweite Krümmung k_1 und k_2 , die geodätische Krümmung und Torsion α und β und die Normalkrümmung γ . Es

bestehen zwei Relationen zwischen diesen fünf Größen, woraus sich ergibt: 1. Eine ebene geodätische Linie ($k_1 \neq 0$) ist Hauptkrümmungslinie. 2. Eine ebene asymptotische Linie ($k_1 \neq 0$) ist Hauptkrümmungslinie. 3. Für eine Hauptkrümmungslinie C ist $\alpha \gamma$ dann und nur dann konstant, wenn C eben ist. Es handelt sich in dieser Arbeit um die möglichen Verallgemeinerungen dieser Sätze auf den Fall einer Kurve in einer V_{n-1} in V_n (vgl. S. Gotåb, dies. Zbl. **36**, 114). Es zeigt sich, daß 1. gültig bleibt, 2. sich nicht generalisieren läßt und von Theorem 3 bleibt nur die Hälfte; Für eine ebene Hauptkrümmungslinie ist $\alpha \gamma$ konstant. *J. Haantjes.*

Gaffney, Matthew P.: A special Stoke's theorem for complete Riemannian manifolds. Ann. of Math., II. Ser. **60**, 140—145 (1954).

On considère une variété riemannienne M , dont le tenseur fondamental est de classe C^2 ; on la suppose complète, c'est-à-dire telle que tout ensemble borné et fermé soit compact. Soit γ une $(n-1)$ -forme de classe C^1 , telle que $\gamma, d\gamma$ possèdent des normes finies. Alors $\int_M d\gamma = 0$. En particulier, soient α, β deux formes de degrés respectifs $p, p-1$, de normes finies sur M , ainsi que $d\alpha$ et $\delta\beta$; l'on aura $\int_M d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha, \beta) - (\alpha, \delta\beta) = 0$; les opérateurs d et δ sont adjoints, l'opérateur Δ est symétrique, le théorème de décomposition est applicable à \bar{J} . Une variété complète M est à frontière négligeable (Gaffney, ce Zbl. **42**, 102). *Th. Lepage.*

Lemoine, Simone: Sur les variétés riemanniennes localement déformables d'un espace complet. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2052—2053 (1954).

Die Verf. betrachtet Riemannsche $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten V_{n-1} einer n -dimensionalen V_n . Die V_n wird vollständig vorausgesetzt im Sinne von H. Hopf und W. Rinow, die Metrik beider Mannigfaltigkeiten ist überall positiv definit. Dann sind alle Geodätischen der V_n notwendig von unendlicher Länge. Unter den V_{n-1} in V_n sind die lokal deformierbaren von besonderem Interesse. Die Verf. gewinnt die folgenden Sätze: (1) jede lokal deformierbare V_3 (die hinsichtlich ihrer induzierten Metrik vollständig ist) enthält zu jedem Punkt einen „Antipoden“; (2) jede V_{n-1} einer einfach zusammenhängenden V_n mit positiv definierter Metrik, die entweder lokal euklidisch ($n=3$) oder lokal hyperbolisch ist ($n=4$), enthält notwendig ein unendliches Gebiet. Ein Korollar ist: in einer offenen Halbkugel einer vierdimensionalen Hyperkugel existiert keine vollständige und lokal deformierbare V_3 . *M. Pinl.*

Jankiewicz, C.: Sur les espaces riemanniens dégénérés. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 301—304 (1954).

Das Problem der Geometrie eines degenerierten Fundamentaltensors ist mehrfach untersucht worden (für Literatur vgl. Schouten, Ricci-Calculus, Berlin 1954, S. 133). Der Fundamentaltensor vom Range $m < n$ bestimmt ein E_{n-m} -Feld, und man kann verlangen, daß eine Übertragung sowohl den Tensor als auch $n-m$ in dem E_{n-m} -Feld vorgegebene kontravariante Vektorfelder invariant läßt. Es bleiben natürlich Unbestimmtheiten. Insbesondere wird der Fall betrachtet, wo der Raum reduzibel ist. *J. A. Schouten.*

Westlake, W. J.: Hermitian spaces in geodesic correspondence. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 301—303 (1954).

Coburn (dies. Zbl. **27**, 429) hat die n. u. h. Bedingungen aufgestellt dafür, daß zwei \tilde{V}_n (U_n = Raum mit hermiteschem Fundamentaltensor, $\tilde{V}_n = \tilde{V}_n$ mit symmetrischer Übertragung, oft nach Kähler benannt, vgl. Schouten, Ricci-Calculus, Berlin 1954, S. 257) geodätisch aufeinander abbildbar sind, und er hat geschlossen, daß die geodätische Abbildung eines \tilde{V}_n auf einen \tilde{V}_n unmöglich sei. Bochner (dies. Zbl. **35**, 104) hat gezeigt, daß dieser Schluß unrichtig ist. Es werden hier die n. u. h. Bedingungen aufgestellt für die geodätische Abbildung zweier \tilde{V}_n aufeinander. *J. A. Schouten.*

Boothby, William M.: Some fundamental formulas for Hermitian manifolds with non-vanishing torsion. Amer. J. Math. **76**, 509—534 (1954).

Après une exposition de la méthode de S. S. Chern en géométrie différentielle globale, l'A. prouve quelques critères suffisants pour qu'une forme différentielle tensorielle sur une variété à connexion soit image d'une forme définie sur l'espace fibré de Chern (espace dual à l'espace fibré principal de la structure) associé. Ces critères sont alors appliqués à l'étude des structures complexes non-kähleriennes, surtout en ce qui concerne les formes pures. En particulier, une forme pure de type 0 est analytique si elle est close. A la fin sont traités quelques applications de Bochner's Lemma aux formes pures.

H. Guggenheimer.

Nemizu, Katsumi: Sur l'algèbre d'holonomie d'un espace homogène riemannien. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 319—321 (1954).

Sei G/H ein homogener Riemannscher Raum (das ist der homogene Raum einer Liegruppe G (H kompakt) mit einer positiv definiten Metrik, invariant unter G). G/H sei nicht lokal euklidisch. Falls die mit der Identität zusammenhängende Isotropiegruppe \tilde{H}_0 irreduzibel ist, ist die lokale Holonomiegruppe irreduzibel. Zwei weitere Sätze behandeln die Struktur der Liealgebra der lokalen Holonomiegruppe für den Fall, daß G/H nicht kählersch ist und für den Fall, daß G kompakt ist. Vgl. die Arbeit des Verf., Amer. J. Math. **76**, 33—65 (1954).

W. Klingenberg.

Lichnerowicz, A.: Sur les groupes d'holonomie des variétés riemanniennes et kähleriennes. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 33—44 (1954).

Exposition et démonstration des théorèmes dus à l'A. (ce Zbl. **46**, 398; Coll. int. CNRS géométrie différentielle Strasbourg 1953) et à A. Borel (Borel et Ličnérówicz, ce Zbl. **46**, 398). (Attention aux erreurs d'impression!)

H. Guggenheimer.

Libermann, Paulette: Sur la courbure et la torsion de certaines structures infinitésimales. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 234—246 (1954).

Presentation of results mainly contained in the author's thesis [Ann. Mat. pura appl., IV, Ser. **36**, 27—120 (1954)] a new feature being the consideration of Chern's forms [cf. Ann. of Math., II, Ser. **47**, 85—121 (1946)], and the definition of r -isotropic structures, being such that the components of the invariant form giving the r -th characteristic class are independent from the chosen frame. These structures are generalisations of Einstein metrics.

H. Guggenheimer.

Soós, Gy.: Über Gruppen von Affinitäten und Bewegungen in Finslerschen Räumen. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **5**, 73—83 und russische Zusammenfassg. 84 (1954).

Eine affinzusammenhängende Mannigfaltigkeit von Linienelementen gestattet eine infinitesimale affine Transformation $x^j = x^j + \xi^j \delta t$, wenn die Lieschen Ableitungen der Übertragungsparameter Γ_{ij}^k und C_{ij}^k bezüglich des Feldes ξ^i verschwinden. Dies führt zu einem System von Differentialgleichungen, dessen Integrabilitätsbedingungen angegeben sind. Die n. u. h. Bedingungen dafür, daß eine r -parametrische Gruppe von affinen Transformationen (im Falle eines metrischen Raumes (Finslerscher Raum) — eine Untergruppe von Bewegungen enthält, werden angegeben.

J. Haantjes.

Debever, R.: Sur une structure infinitésimale régulière associée aux intégrales d'hypersurfaces du calcul des variations. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 214—221 (1954).

Dérivation, dans la théorie différentielle des espaces fibrés, de la connexion de Cartan des espaces de Finsler (E. Cartan, ce Zbl. **8**, 272).

H. Guggenheimer.

Rund, Hanno: On the analytical properties of curvature tensors in Finsler spaces. Math. Ann. **127**, 82—104 (1954).

Verf. hat in einer Reihe von Arbeiten die Geometrie von Finsler als lokal Minkowskische Geometrie behandelt. Hier werden für die dabei vom Verf. eingeführte Parallelverschiebung (vgl. dies. Zbl. 42, 404) neue Übertragungsgrößen $P_{kh}^{*i}(x, x')$ eingeführt, welche sich im Gegensatz zu den früher verwendeten P_{kh}^{*i} wirklich wie Übertragungsgrößen transformieren und so die Einführung einer kovarianten Ableitung gestatten. Bemerkung des Ref. A. Deicke: Die P^* sind identisch mit den I^* , die E. Cartan (dies. Zbl. 8, 418) als Übertragungsgrößen benutzt hat, während er den Finsler-Raum als lokal euklidisch betrachtete. Nach Hinweis auf die bei der kovarianten Ableitung eines Tensorfeldes auftretenden Schwierigkeiten definiert Verf. eine relative kovariante Ableitung in bezug auf ein Richtungsfeld und untersucht die Eigenschaften des zugehörigen Krümmungstensors $K_{hmn}^i(x, x')$. Weiter definiert er eine „absolute kovariante Ableitung“; diese ist mit der von E. Cartan eingeführten identisch (A. Deicke). Bei der Untersuchung der Eigenschaften des „absoluten Krümmungstensors“ \hat{K}_{hmn}^i übersieht Verf., daß sich diese nicht aus denen des vorher eingeführten „relativen“ Tensors K_{hmn}^i ableiten lassen, da die Vertauschungsregel der absoluten kovarianten Ableitung bei richtungsabhängigen Tensoren von der der relativen Ableitung verschieden ist. Insbesondere ist die behauptete Relation $\hat{K}_{ikhmn} + \hat{K}_{ihkmn} = 0$ unrichtig. Wenn Verf. behauptet, $\hat{K}_{ikhmn} = 0$ sei eine hinreichende Bedingung dafür, daß der Finsler-Raum ein Minkowski-Raum ist, so beruht dies auf einem Fehlschluß: es wird zwar gezeigt, daß es zu jedem Parallelfeld von Linienelementen ein Koordinatensystem gibt, in dem die P_{ij}^{*k} für die Feldrichtungen verschwinden, jedoch nicht, daß es ein Koordinatensystem gibt, in dem dies für alle Parallelfelder gilt. Der Tensor \hat{K}_{ikhmn} ist nicht, wie behauptet wird, von dem Tensor R_{ikhmn} von E. Cartan wesentlich verschieden; sondern es gilt $\hat{K}_{ikhmn} = R_{ikhmn} + A_{ih}^l R_{0l m n}$, woraus man leicht die Äquivalenz der beiden Gleichungen $R_{ikhmn} = 0$ und $\hat{K}_{ikhmn} = 0$ folgert.

A. Deicke-W. Süß.

Rund, Hanno: On the geometry of generalized metric spaces. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20–26 Sett. 1953, 114–121 (1954).

Après une analyse critique de la dérivation covariante dans les espaces métriques généralisés en relation avec le lemme de Ricci, on propose une dérivation covariante qu'on appelle absolue définie par les formules

$$X_{j;k}^i = \mathcal{E}X^i/\mathcal{E}x^k - (\mathcal{E}X^i/\mathcal{E}x^h) p_{jk}^{*h}(x, x') + p_{hk}^{*i}(x, x') X^h$$

où $X^i(x, x')$ est un champ vectoriel et $p_{jk}^{*h}(x, x')$ sont définis à l'aide du tenseur métrique $g_{ih}(x, x')$ de l'espace. Cette dérivation covariante absolue satisfait le lemme de Ricci $g_{i;j;k}(x, x') = 0$, pourvu que la direction x'^i de dérivation coïncide avec la direction x'^i dans $g_{ij}(x, x')$. A la dérivation covariante absolue est associée un tenseur absolu de courbure et la condition nécessaire et suffisante pour que l'espace soit de Minkowski s'exprime par l'annulation de ce tenseur. On montre aussi que le tenseur absolu de courbure satisfait aux identités de Bianchi. G. Vranceanu.

Rund, Hanno: Über nicht-holonome allgemeine metrische Geometrie. Math. Nachr. 11, 61–80 (1954).

Es handelt sich hier teilweise um Übertragung von Untersuchungen von J. L. Synge [Proc. London math. Soc., II. Ser. 25, 247–264 (1926)] über nicht-holonome Riemannsche Geometrie auf die analogen Fragen in der Finslerschen Geometrie. In einem n -dimensionalen Punktraum F_n seien eine Finslersche Metrik $ds = F(x^i, dx^i)$ sowie m Bindungsgleichungen $G_\mu(x^i, x'^i) = 0$ gegeben, wobei die G_μ in x' positiv homogen 1. Ordnung sein sollen; die Matrix $(\partial G_\mu / \partial x^i)$ habe den Rang m . Neben den Extremalen des Variationsproblems der Finsler-Metrik mit den gegebenen Nebenbedingungen (Lagrange-Problem), die natürlich von den geodätischen Linien des Finsler-Raumes i. a. verschieden sind, stehen die Bahnkurven, d. h. die Autoparallelen des bezüglich der Gleichungen $\{G_\mu = 0\}$ zu definierenden Parallelismus, bestimmt durch die Forderung, daß ihre Tangentenvektoren $\{G_\mu = 0\}$ genügen und ihre Hauptnormalen auf der durch $\{G_\mu = 0\}$ definierten nicht-holonomen Mannigfaltigkeit senkrecht stehen. Als Bahnkurven eines nicht-holonomen Systems sind sie bei Anwendung auf die Dynamik wichtig. Es werden die für das Zusammenfallen der Extremalen mit den Bahnkurven notwendigen und hinreichenden (holo-

nomen) Bedingungsgleichungen abgeleitet. Weiter wird die in der nicht-holonomen Mannigfaltigkeit induzierte Übertragung und deren Krümmungstensor untersucht und die Gleichung für die relative Abweichung benachbarter Bahnkurven bestimmt. Abschließend wird auf eine mögliche Anwendung auf Kawaguchi-Räume hingewiesen, welche auch zeigt, daß die Bahnkurven eines dynamischen Systems mit von der Beschleunigung abhängiger Lagrange-Funktion i. a. nicht den Eulerschen Gleichungen des Variationsproblems genügen. *A. Deicke-W. Süß.*

Akbar-Zadeh, Hassan: Sur la réductibilité d'une variété finslerienne. *C. r. Acad. Sci., Paris* **239**, 945—947 (1954).

Se F_n è una varietà di Finsler, la V_{2n-1} degli elementi lineari (x, x') tangenti a F — il cui punto generico si indicherà con z —, può essere notoriamente considerata uno spazio fibrato differenziabile, di base F , e avente per fibre delle sfere; se si indica con p la proiezione canonica $(x = pz)$, la proiezione di un cammino (cappio) di V_{2n-1} è un cammino (cappio) di F_n ; per trasporto parallelo mediante la connessione finsleriana, il gruppoide dei cappi in $z \in V$ omotopi a zero si rappresenta, come si sa, nel gruppo di omologia ristretto σ_2 che opera nello spazio vettoriale tangente a F in pz ; se ora si suppone σ_2 riducibile, l'A. dimostra che F_n è decomponibile nel senso dell'ordinaria geometria differenziale locale; la linea della dimostrazione si avvicina a quella seguita da A. Lichnerowicz (Geometria differenziale in grande. Gruppi d'olonomia e omologia. Roma 1954) per dimostrare l'analoga proprietà nel caso di una varietà riemanniana. *V. Dalla Volta.*

Kawaguchi, Akitsugu: Theory of areal spaces. *Rend. Mat. e Appl., V. Ser.* **12**, 373—386 (1954).

An n -dimensional space with coordinates x^i is endowed a priori with an m -dimensional measure of area: $dS = F(x^i, \partial x^i / \partial u^\alpha) du^1 \cdots du^m$, ($\alpha = 1, \dots, m < n$), which is regarded as referring to a plane element of an m -dimensional subspace $x^i = x^i(u^\alpha)$. If a metric tensor can be defined in such a space, the latter is said to be of the metric class, and F. Brickell (this Zbl. **44**, 182) proved that this is not always the case. By defining a so-called metric bitensor, the author proves a theorem due to Tandai: Any space of the metric class must be either a Riemannian, a Finsler or a Cartan space. A more general notion of spaces of the submetric class is defined, and necessary and sufficient conditions in order that these be again of the metric class are given. Finally a covariant derivative is introduced for submetric spaces with connection coefficients which have to be deduced from given conditions. A more detailed account of these results is to be found in the papers „On Areal Spaces, I—VI“, by the author, Katsurada and Tandai [this Zbl. **44**, 371; **45**, 436; **51**, 396; *Tensor*, n. Ser. **2**, 47—58 (1952)]. *H. Rund.*

Kawaguchi, Akitsugu: A remark to the theory of areal spaces. *Nieuw Arch. Wiskunde*, III. R. **2**, 115—117 (1954).

In an areal space an m -dimensional element is measured by a function $F(x^i, p_\alpha^i)$. A condition can be given in order that the space be of the metric class. In this paper the author derives Iwamoto's condition, which contains the third derivatives of F , from his own condition containing only first and second derivatives of F . [Cp. A. Kawaguchi and K. Tandai, *Tensor*, n. Ser. **2**, 47—58 (1952).] *J. Haantjes.*

Tonooka, Keinosuke: Theory of subspaces in a geometry based on a multiple integral. I. Metric tensor and theory of connections. *Tensor*, n. Ser. **3**, 75—83 (1954).

In previous papers [J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. **12**, 43—72 (1952) and this Zbl. **49**, 119] the author has discussed an n -dimensional geometry with an area defined by the K -ple integral $S = \int \cdots \int F(x^i, p_\alpha^i, p_{\alpha\beta}^i, \dots) du^1 \cdots du^K$, $N \geq 1$, where $x^i = x^i(u^\alpha)$, $i = 1, 2, \dots, n$; $\alpha = 1, 2, \dots, K$ is the K -dimensional surface, $p_\alpha^i = \partial x^i / \partial u^\alpha$, etc. In this paper the metric tensor of a subspace $X_m^{(2)}$ in $X_n^{(2)}$ ($m < n$) are determined, where $X_n^{(2)}$ is a manifold of K -dimensional surface elements

of order N . Then a connection is found along the $X_m^{(2)}$ in $X_n^{(2)}$ such that the induced connection is the same as the intrinsic connection. Reference is made to related work by E. T. Davies (this Zbl. 36, 384) and V. Wagner (this Zbl. 29, 167).

D. J. Struik.

Ide, Saburo: On the connections in higher order spaces. Tensor, n. Ser. 3, 84—90 (1954).

The author develops a generalization of Wirtinger's connection which can be related to the connections of Kawaguchi spaces (A. Kawaguchi, this Zbl. 19, 278). This is shown to hold for many cases, for instance in the spaces with metric $s = \int \{a_i a_j x'^i x'^j + 2b_i x'^i + c_1\} dt$. It is also pointed out how the theory applies to other spaces of Kawaguchi (this Zbl. 19, 328).

D. J. Struik.

Haantjes, J.: On a special class of spaces A_n . Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. 2, 79—102 (1954).

The spaces A_n are defined as spaces with symmetrical affine connection, in which a congruence of curves exists such that any surface X_2 generated by the curves of the congruence and intersecting some fixed geodesic of A_n is totally geodesic. This happens for the general projective space H_{n-1} whose homogeneous coordinates x^h can be considered as non-homogeneous coordinates of A_n , and it also happens for subprojective spaces. The conditions for such an A_n in terms of the congruence are derived, including the case that the X_2 are also flat, that is, of curvature tensor zero. Then follow the conditions that the connection in A_n induces a projective connection in H_{n-1} and the additional conditions that A_n be subprojective. This leads to the recent results of T. Adati (this Zbl. 45, 112) and J. A. Schouten (this Zbl. 50, 163), and to a new form of the condition that an A_n ($n \geq 5$) be subprojective.

D. J. Struik.

Nijenhuis, Albert: On the holonomy groups of linear connections. II. Properties of general linear connections. Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A 57, 17—25 (1954).

(Part I, this Zbl. 51, 132). In this second part it is shown how the concepts, introduced in the first part for linear displacements in tangent spaces under an affine connection can be extended to general linear fibre bundles, especially to those which are related to the infinitesimal holonomy group. An application is made to the integrability problem of sets of equations of the form $\partial_\mu \Phi^i = \Pi_{\mu j}^i \Phi^j + \Psi_\mu^i$, $i, j = 1, \dots, N$; $\mu = 1, \dots, n$, where Π and Ψ are given functions of the variables x^μ defined in a connected open set of a Euclidean space E_n , the Φ^i are unknown. There is also a discussion of the non-homogeneous holonomy group which arises in the rolling (developing) process of the tangent spaces to an affinely connected manifold.

D. J. Struik.

Nijenhuis, Albert: A theorem on sequences of local affine collineations and isometries. Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. 2, 118—125 (1954).

Etant donnée une variété analytique M à connexion affine analytique et p_i une suite de points convergente vers un point p , s'il en existe pour chaque point p_i de la suite une transformation φ_i qui change un voisinage de p_i dans un voisinage de p et ces transformations φ_i conservent la connexion, on montre que M possède un groupe local à un paramètre de transformations affines dans un voisinage de p , qui ne conservent pas le point p . Si M est un espace de Riemann et φ_i sont des isométries, l'espace possède un groupe local de mouvement dans un voisinage de p . Pour la démonstration on part du fait que dans les espaces tangents $E_n(p_i)$ et $E_n(p)$ de p_i et p la transformation φ_i induit une transformation ψ_i qui change le tenseur de courbure et de torsion et leurs tenseurs dérivés du point p_i dans ceux du point p et ψ_i peut se décomposer dans le transport parallèle de $E_n(p_i)$ en $E_n(p)$ le long de la géodésique $p_i p$ et dans une transformation linéaire non-singulière. *G. Vranceanu.*

Varga, O.: Bedingungen für die Metrisierbarkeit von affinzusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeiten. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 5, 7—16 und russische Zusammenfassg. 16 (1954).

In einer affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeit mit dem Linienelement (x^h, v^h) wird das invariante Differential eines Vektorfeldes $\xi^h(x, v)$ definiert mittels zweier geometrischer Objekte Γ_{ji}^h und I_{ji}^h . Es wird untersucht, unter welchen Bedingungen der Raum sich metrisieren läßt im Sinne von Cartan. Es handelt sich dabei um die Integrabilitätsbedingungen eines Differentialgleichungssystems, welche sich mit Hilfe der drei Krümmungsaffinoren darstellen lassen. *J. Haantjes.*

Kosambi, D. D.: The metric in path-space. Tensor, n. Ser. 3, 67—74 (1954).

The author continues his investigations [Quart. J. Math., Oxford. II. Ser. 3, 307—320 (1952)] on the relations between a path space given by $\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$, $\dot{x}^i = dx^i/dt$, $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$, $i = 1, 2, \dots, n$ and the Riemann metric with which it may be endowed. His main result is that by a suitable projective change of the parameter t such paths may actually be made the geodesics of such a metric. Mapping a neighborhood upon an open sphere in a euclidean R_n by $x^i = x_0^i + y^i - (1/2!) (\Gamma_{jk}^i)_0 y^j y^k - \dots$, taken in any direction ξ through a point x_0 along a path, where $y^i = t \xi^i$, it is shown that if the correspondence between two local direction bundles are given by $\hat{x}^i = (\partial x^i / \partial y^j) \xi^j$, $\xi^i = (\partial y^i / \partial x^j) \hat{x}^j$, then the parameter t is determined on every path by $dt^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, $g_{ij} = \sum_r \frac{\partial y^r}{\partial x^i} \frac{\partial y^r}{\partial x^j}$. This metric tensor g_{ij} makes the paths into geodesics and t into the arc distance. The given relation between \hat{x}^i and ξ^i is also necessary and sufficient to map all paths into straight lines of the y -space with the same t values for corresponding arc segments. It is also pointed out that symmetric affine connections are not essential. Some suggestive applications are indicated.

D. J. Struik.

Eisenhart, Luther P.: Generalized Riemann spaces and general relativity. II. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 463—466 (1954).

(Part I, this Zbl. 51, 130.) The present paper starts with Einstein's $g_{ij,k} = g_{hj} \Gamma_{ik}^h + g_{ih} \Gamma_{kj}^h$ and derives from it by algebraic processes that Γ_{jik}^h can be written in the form $\Gamma_{jik}^h = \frac{1}{2} g_{ij;k} + b_{jik}^h$, where the tensor b_{jik}^h satisfies the conditions $b_{jik}^h + b_{ijk}^h = 0$, $b_{jil}^h + b_{kji}^h + b_{ikj}^h = 0$ and $g_{ij;k}$ is the covariant derivative of g_{ij} in terms of the Christoffel symbols of the unsymmetric g_{ij} . This value, substituted into the Einstein equation $\Gamma_{j,k}^k - g^{ik} \Gamma_{ijk}^j = 0$, leads to the solution $\Gamma_{jik}^h = \frac{1}{3} \Delta_{jik}^h$ where $\Delta_{jik}^h = \Delta_{kji}^h = \Delta_{ikj}^h = \frac{1}{2} (g_{ji;k} + g_{jk;i} + g_{ki;j})$. Other solutions are written in the form $\Gamma_{jik}^h = \frac{1}{3} (\Delta_{jik}^h + c_{jik}^h)$, and the conditions for c_{jik}^h are derived. The paper ends with identities resulting from the integrability conditions of $g_{ij,k} = g_{hj} \Gamma_{ik}^h + g_{ih} \Gamma_{kj}^h$. Raising and lowering of indices is with respect to g_{ij} , where $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$. *D. J. Struik.*

Winogradzki, Judith: Sur les géodésiques de l'univers d'Einstein-Schrödinger. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 996—998 (1954).

Ist die Übertragung $I_{\mu\lambda}^\alpha$ in einer A_n metrisch, so ist die Übertragung $I_{(\mu\lambda)}^\alpha$ dann und nur dann ebenfalls metrisch, wenn $S_{\mu\lambda\alpha} = S_{[\mu\lambda]\alpha}$ (Schouten-Struik, Einführung I, S. 84; vgl. auch Schouten, Ricci-Calculus, S. 137). Die Verfasserin, die diesen Satz anscheinend nicht kennt, beweist den gleichlautenden Satz für die Übertragung von Einstein-Schrödinger mit nicht symmetrischem Fundamentaltensor. Der hier vorausgesetzte (sehr spezielle) Fall ergibt eine sehr einfache Lösung der Gleichungen für $I_{\mu\lambda}^\alpha$, die gleichzeitig angenäherte Lösung ist für den allgemeinen Fall, wo $g_{[\lambda\alpha]}$ und $\partial_\mu g_{(\lambda\alpha)}$ klein erster Ordnung sind. *J. A. Schouten.*

Ecken. Jede Metrik F beschränkter Gesamtkrümmung ist Grenzfall von gleich-beschränkten Vielfachmetriken. Es wird ein einfaches Verfahren für die Konstruktion dieser Annäherung angegeben. ω^+ und ω^- der Vielfache konvergieren dabei gegen die entsprechenden Krümmungen von F . H. Weyls Satz über das Vorhandensein einer Eifläche zu vorgeschriebener Metrik läßt sich jetzt ohne Einschränkung beweisen. Ebenso die Eindeutigkeit. Der allgemeine Satz über das „Zusammenkleben“ von Flächen besagt etwa, daß man durch Verkleben von Flächen beschränkter Krümmung wieder solche Flächen erhält. Damit gelingt es z. B. zu zeigen: Schneidet man aus einer Eifläche ein Stück positiver Krümmung heraus, so wird der Rest verbiegbare. Es folgen u. a. Sätze über „Kappen“, d. h. solche konvexen Flächenstücke, deren Normalriß auf eine Ebene eindeutig ist. Jedenfalls ist hier ein (wenn auch noch steiniger) Weg eröffnet, der zu vielen neuartigen und anschaulichen Ergebnissen führt.

W. Blaschke.

Strel'cov, V. V.: Über gemeinsame Punkte von Geodätischen. Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Astron. Fiz. Mat. Mech., Razd. Mat. Mech. **3** (7), Nr. 129, 89—103 (1954) [Russisch].

Die vorliegende Arbeit beruht ganz auf den Begriffsbildungen des Buches von Aleksandrov, dies. Zbl. **38**, 352, und beschäftigt sich mit regulären, d. h. stetig gekrümmten Flächen F des R_3 , die einer Kreisfläche homöomorph sind und deren positiver Krümmungsbestandteil $\omega^+ < 2\pi$ ist. Das Hauptergebnis ist der Satz, daß eine kürzeste und eine geodätische Linie auf einer solchen Fläche F , wenn sie nicht zusammenfallen, nur eine endliche Zahl gemeinsamer Punkte haben können. Als wichtige Folgerung hieraus ergibt sich dann, daß jede Geodätische auf derartigen Flächen endliche Länge hat, nur endlich viele Punkte auf dem Rande besitzt und auch 2 verschiedene Geodätische nicht unendlich viele Schnittpunkte haben können. Schließlich lassen sich diese Resultate auch auf Flächen des obigen Typus mit endlich vielen Ecken übertragen. Der Beweis dieser Sätze erfordert eine Reihe von Hilfssätzen. Die Methode ist die mengentheoretische von Aleksandrov, 8 Skizzen unterstützen wirksam die Anschauung.

W. Burau.

Kelly, P. J.: Barbilian geometry and the Poincaré model. Amer. math. Monthly **61**, 311—319 (1954).

Let K be a region in the euclidean plane bounded by a simple closed curve J . For each pair of points a and b in K $r(a, b)$ is defined as $[\max pa pb]$, $p \in J$, where pa denotes the euclidean distance. Now a new distance is defined as $d(a, b) = \log [r(a, b) \cdot r(b, a)]$ and it is shown that under this notion of distance the set K is a metric space (Barbilian space). In the case where J is a circle and K its interior there is a unique geodesic connecting a and b . It is a circle passing through a and b orthogonal to J . The distance is identical with the Poincaré definition in his model of hyperbolic geometry. A generalisation is obtained by taking for J any closed set instead of the boundary of K . Then $r(a, b)$ is defined as $\max \{1, \max pa pb\}$. An example is given.

J. Haantjes.

Hadwiger, H.: Über additive Funktionale k -dimensionaler Eipolyeder. Publ. math., Debrecen **3**, 87—94 (1954).

P, Q, R, \dots Eipolyeder (d. h. konvexe Polyeder) des k -dim. euklidischen Raumes R_k . $P + Q$: Eipolyeder, das durch das $(k-1)$ -dim. Schnitteipolyeder PQ in P und Q zerlegt ist. Eine über der Menge aller Eipolyeder des R_k definierte Funktion φ heißt additiv, wenn $\varphi(P) + \varphi(Q) = \varphi(P + Q) + \varphi(PQ)$, einfach additiv, wenn $\varphi(P) + \varphi(Q) = \varphi(P + Q)$. P_i : i -dim. Kante ($0 \leq i \leq k-1$) des Eipolyeders P . $\Omega_i(P, P_i)$: $(k-i-1)$ -dim. sphärisches Maß (Volumen) des Normalenbildes in einem (beliebigen) „inneren“ Punkt von P_i . Ω_i : gesamtes Volumen der $(k-i-1)$ -dim. Einheitssphäre. i -te relative Kantenkrümmung: $\omega_i(P, P_i) = \Omega_i(P, P_i)/\Omega_i$. $\omega_0(P, P_0)$ ist die Eckenkrümmung in P_0 , $\omega_{k-1}(P, P_{k-1}) = 1/2$. Ist Φ_i ($1 \leq i \leq k$) ein Funktional, das für alle i -dim. Eipolyeder des R_k definiert und innerhalb jedes i -dim. Teilraumes R_i des R_k einfach-additiv ist, dann heißen die durch $\chi_i(P) = \sum' \omega_i(P, P_i) \Phi_i(P_i)$, ($i = 0, 1, \dots, k-1$, Σ' : Kantensummentation), $\chi_k(P) = \Phi_k(P)$ erklärten Eipolyederfunktionale Basisfunktionale. Hauptsatz: Jedes additive Eipolyederfunktional läßt sich als Summe von Basisfunktionalen $\chi_i(P)$ ($i = 0, 1, \dots, k$) darstellen. Andeutung zum Beweis: Es wird $\Phi_0(P) = \varphi(P)$ gesetzt, und weiter rekursiv $\Phi_i(P) = \Phi_{i-1}(P) - \sum' \omega_{i-1}(P, P_{i-1}) \Phi_{i-1}(P_{i-1})$. Aus der in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **41**, 380) für jedes Polyeder gegebenen Darstellung $P = \sum \varepsilon_n T_n$ ($\varepsilon_n = \pm 1$) mittels „Bausteinen“ T_n wird, ohne ausführlichen Beweis, gefolgert, daß das allgemeinste einfach-additive Funktional durch eine willkürliche Bausteinfunktion konstruierbar ist. Die den i -dim. Volumina $\Phi_i = V_i$ entsprechenden Basisfunktionale sind bis auf einen konstanten Faktor die Minkowskischen Quormalintegrale W_{k-i} . Ein Eipolyederfunktional φ heißt beschränkt, wenn es zu jedem Würfel T eine Konstante $C = C(T)$ so gibt, daß für jedes Eipolyeder $P \subset T$ die Einschränkung $|\varphi(P)| \leq C$ gilt. Frage: Sind die Linearkombinationen $\sum x_p W_p$

($v = 0, 1, \dots, k$) die einzigen additiven, bewegungsinvarianten und beschränkten Eipolyeder-funktionale? Die Antwort lautet positiv, wenn man zeigen kann, daß das Volumen das bis auf eine multiplikative Konstante einzige einfach-additive, bewegungsinvariante und beschränkte Funktional ist. *Chr. Pauc.*

Dinghas, Alexandre: Sur une généralisation du théorème de Lusternik concernant des familles continues des ensembles. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 575—576 (1954).

Die vektorielle Linearkombination $A = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r$ ($\lambda_k > 0$) abgeschlossener Mengen A_k des euklidischen \mathbb{R}_n wird durch das Integral $A = \int_0^1 A(\lambda) d\lambda$ auf stetige Familien solcher Mengen $A(\lambda)$ erweitert; $0 \leq \lambda \leq 1$ sei das Intervall J_0 . In J_0 sei $A(\lambda)$ gleichmäßig beschränkt, d. h. Teilmenge einer festen abgeschlossenen Menge S . Als Oszillation von $A(\lambda)$ auf $J \subset J_0$ wird $\omega(J) = \sup |A(\lambda'), A(\lambda'')|$ definiert ($\lambda', \lambda'' \in J$, A, B Abstand der Mengen A, B); als Oszillation in $\lambda \in J_0$ für die gegen 0 konvergierende Länge von J der Grenzwert $\omega(\lambda) = \lim \omega(J)$, wobei $\lambda \in J$. Die Existenz des Integrals A im Sinne von Minkowski und Riemann ist gesichert, wenn das Lebesguesche Maß der λ -Menge mit $\omega(\lambda) \rightarrow 0$ verschwindet.

Bezeichnet m das Lebesguesche Maß, so ist $m A^{1/n} \geq \int_0^1 m A(\lambda)^{1/n} d\lambda$. Hierin gilt nach Vermutung des Verf. das Gleichzeichen nur im Falle $A(\lambda) = f(\lambda) A$, wobei A eine feste konvexe Menge und $f(\lambda)$ eine nach Riemann integrierbare positive Funktion ist. Für einen ausführlichen Beweis und Erweiterungen der Theorie von Brunn, Minkowski und Lusternik wird eine ausführliche Darstellung in Aussicht gestellt. *W. Süss.*

Dinghas, Alexandre: Démonstration du théorème de Brunn-Minkowski pour des familles continues d'ensembles. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 605—607 (1954).

Die vorstehend referierte Arbeit wird zu einem die Ungleichung von Minkowski enthaltenden Ergebnis erweitert, wobei auch der Fall des Gleichheitszeichens geklärt wird. $x^{\lambda} = (x_1^{\lambda}, \dots, x_n^{\lambda})$ sei ein Punkt von $A(\lambda)$ in Cartesischen Koordinaten, ω_0 der Würfel $0 \leq \tau_k \leq 1$, $k = 1, \dots, n$. $A(\lambda)$ wird auf ω_0 hinsichtlich der Innenpunkte folgendermaßen umkehrbar eindeutig abgebildet: die positiven Funktionen $g_k^{\lambda}(x_1^{\lambda}, \dots, x_k^{\lambda})$ mögen den Gleichungen genügen $\int g_k^{\lambda}(x_1^{\lambda}, \dots, x_k^{\lambda}) dx_k^{\lambda} = g_{k-1}^{\lambda}(x_1^{\lambda}, \dots, x_{k-1}^{\lambda})$; die genannte Abbildung wird durch die Differentialgleichungen $g_k^{\lambda}(x_1^{\lambda}, \dots, x_k^{\lambda}) \cdot \partial x_k^{\lambda} / \partial \tau_k = g_{k-1}^{\lambda}(x_1^{\lambda}, \dots, x_{k-1}^{\lambda})$ geleistet. Für $g_k^{\lambda} = 1$, $g_0^{\lambda} = m A(\lambda)$ sind die g_k^{λ} die Maße der Schnitte von $A(\lambda)$ mit den Ebenen $x_1 = \tau_1, \dots, x_k = \tau_k$ (C_i konstant). Für das Maß von $A = \int_0^1 A(\lambda) d\lambda$ findet man $m A = \int_{\omega_0} D d\tau_1 \dots d\tau_n$,

wobei $D = \prod_{k=1}^n \partial \xi_k^{\lambda} / \partial \tau_k$ und $\xi_k^{\lambda} = \int_0^1 x_k^{\lambda}(\tau_1, \dots, \tau_k) d\lambda$ ist. Mit Hilfe der Abbildungsgleichungen erhält man hieraus die verallgemeinerte Minkowski-Ungleichung

$m A^{1/n} \geq \int_0^1 m A(\lambda)^{1/n} d\lambda$. Fast überall auf J_0 muß im Falle des Gleichheitszeichens

$g_k^{\lambda} = g_k q(\lambda)^{n-k}$ sein, wobei g_k von λ unabhängig und $q(\lambda) > 0$ integrierbar, sonst beliebig ist. Verf. kündigt einen ausführlichen Beweis mit weiteren Verallgemeinerungen an, z. B. $A(\lambda)$ als Vereinigung von endlich vielen konvexen Mengen und die durch Grenzübergang aus solchen zu gewinnenden Mengen. *W. Süss.*

Levi, F. W.: Ein geometrisches Überdeckungsproblem. Arch. der Math. **5**, 476—478 (1954)..

Mit C wird ein ebenes konvexes Gebiet bezeichnet, mit $[C]$ seine abgeschlossene Hülle, und mit $|C|$ der Flächeninhalt von C . $H(C, \varrho)$ sei die Mindestanzahl von zu C

im Verhältnis 1:2 homothetischen Gebieten, die hinreicht, um $\{C\}$ zu überdecken. Entsprechend ist $S(C, \varrho)$ die Mindestzahl, wenn von den überdeckenden Gebieten nur Ähnlichkeit verlangt wird. $H(\varrho) = \max H(C, \varrho)$, $h(\varrho) = \min H(C, \varrho)$, $S(\varrho) = \max S(C, \varrho)$, $s(\varrho) = \min S(C, \varrho)$; $\chi(C) = \min (C : P)$, wo P die in C eingeschriebenen affinregulären Sechsecke durchläuft. Verf. beweist: $h(1) = 3$, $H(1) = 4$, $s(1) = 2$, $S(1) = 3$, $\lim H(C, \varrho) : \varrho^2 \leq \alpha(C) \leq 3/2$ für alle C , und $1 < \lim S(\varrho) : \varrho^2 < 3/2$. I. Fáry.

Molnár, J.: Ausfüllung und Überdeckung eines konvexen sphärischen Gebietes durch Kreise. II. Publ. math., Debrecen **3**, 150—157 (1954).

Im vorliegenden zweiten Teil (vgl. dies. Zbl. **50**, 389) beweist Verf. den folgenden Satz: Ist ein im engeren Sinne konvexes sphärisches Gebiet durch wenigstens drei kongruente Kugelkappen bedeckt, so ist die Überdeckungsdichte $> 2\pi \frac{1}{27} = 1.2091\dots$. Wahrscheinlich gilt diese Abschätzung auch für beliebige konvexe Gebiete, und sie wird hier in diesem Falle unter der zusätzlichen Annahme bewiesen, daß jeder Kreis die Begrenzungskurve des Bereiches in höchstens zwei Punkten durchsetzt.

I. Fáry.

Davis, Chandler: Remarks on a previous paper. Michigan math. J. **2**, 23—25 (1954).

The previous paper referred to in the title is that reviewed in this Zbl. **48**, 406. Theorem (i) is proved in a slightly more general form and a shortened proof of theorem (ii) is given. Further theorems of the same type are mentioned and discussed. S. Vajda.

Topologie:

Cargal, Buchanan: Generalizations of continuity. (Abstract of a thesis.) Iowa State College, J. Sci. **28**, 288—289 (1954).

Geymonat, Ludovico: Su di un metodo per lo studio di spazi astratti molto generali. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **12**, 360—366 (1954).

L'A. croit prouver l'importance des structures plus générales que les structures topologiques en examinant, à l'aide d'un exemple artificiel, les rapports entre divers axiomes possibles pour une opération plus générale que la fermeture (telles que $\bar{E} \subset E \cup F$, $E \supset \bar{E} \cup F$, $\bar{E} \cap \overline{E \cup F} \neq \emptyset$). G. Marinescu.

Aczél, J.: Bemerkungen zur Realisierung der Hausdorffschen Axiome in abstrakten Mengen. Publ. math., Debrecen **3**, 183—186 (1954).

Mit Hilfe des Auswahlaxioms kann in jeder beliebigen unendlichen Menge M ein nichttriviales Hausdorffsches Umgebungssystem konstruiert werden (nicht-trivial heißt dabei, daß jede Umgebung eines jeden Punktes unendlich ist): Man zerlegt M in paarweise fremde, abzählbar unendliche Teilmengen A und ordnet jedes A nach dem Typus der ganzen Zahlen. Als Umgebungen eines Punktes x werden definiert die Mengen $A(x; n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$; dabei ist $A(x; n)$ jene Teilmenge des x enthaltenden A , die entsteht, wenn man, von x ausgehend, jedes n -te Element nach oben und unten im Sinne der Ordnung fortschreitend sammelt. G. Aumann.

Capel, C. E.: Inverse limit spaces. Duke math. J. **21**, 233—245 (1954).

Inverse systems of spaces $(X_\lambda, H_{\lambda, \mu}, A)$ are considered, i. e. (i) A is a directed set, (ii) $\lambda \in A$ implies X_λ is a Hausdorff space, (iii) if $\lambda > \mu$ there is a continuous function (the „bonding“ map) $H_{\lambda, \mu} : X_\lambda \rightarrow X_\mu$, (iv) if $\lambda > \mu, \mu > \nu$, $H_{\lambda, \nu} = H_{\mu, \nu} H_{\lambda, \mu}$. The inverse limit space X of the inverse system can be defined as a closed subset of the Cartesian product X^* of the X_λ . A short recapitulation (mainly) of known properties which carry over from the X_λ to X is given. The main results which follow are: I. A proof that the continuity theorem in the Alexander-Kolmogoroff cohomology theory is equivalent to the extension and reduction theorems. II. A consideration

of the case of monotone bonding maps H_{λ} . In this case, it is proved that (i) if the X_{λ} are (semi-) locally connected, then X is (semi-) locally connected, (ii) if I is countable and all X_{λ} 's are arcs, then X is an arc, (iii) if I is countable and all X_{λ} 's are simple closed curves, then X is a simple closed curve. *A. van Heemert.*

Ellis, David: A set-theoretic description of normal topologies. *Amer. math. Monthly* **61**, 405—407 (1954).

It is proved that the topology of a normal space S can be completely described by means of the Boolean algebra of subsets of a certain class of real valued bounded functions over S . *A. van Heemert.*

Wallace, A. D.: Partial order and indecomposability. *Proc. Amer. math. Soc.* **5**, 780—781 (1954).

L'A. établit: Si X est un espace séparé (axiome T_1), régulier, connexe et indécomposable, muni d'un ordre partiel tel que si $L(x) = \{y: y \leq x\}$, on ait 1° $L(x) \cap L(y) = \emptyset$ pour tout $x, y \in X$ 2° Si U est un voisinage de $L(x)$, il existe un voisinage V de x tel que $x' \in V \Rightarrow L(x') \subset U$. 3° $L(x)$ est compact et connexe pour tout $x \in X$, alors, l'ordre sur X est un ordre total. *A. Revuz.*

Novák, J.: On a problem concerning completely regular sets. *Fundamenta Math.* **41**, 103—104 (1954).

A topological space R has property α if every function defined and continuous on R is bounded. The problem, raised by Slowikowski and Zawadowski: Does property α imply the compacticity of a completely regular space R ? is answered to the negative, using the Čech-bicomactification of the set of naturals. *A. van Heemert.*

Mrówka, S.: On completely regular spaces. *Fundamenta Math.* **41**, 105—106 (1954).

Another solution is given to the problem treated by Novák (see preceding review). A more direct method is used to construct a counterexample. *A. van Heemert.*

McShane, E. J.: A theory of convergence. *Canadian J. Math.* **6**, 161—163 (1954).

Als Syntax bezeichnet der Verf. ein aus einer Abbildung f aus D in S und einer Filterbasis \mathfrak{R} in D bestehendes Paar. Konvergenz oder Häufung einer Syntax in bezug auf eine Filterbasis \mathfrak{Q} in S werden sinngemäß erklärt, ebenso Begriffe wie Untersyntax (Verfeinerung) und entschiedene Syntax [das System der $f(N)$ mit $N \in \mathfrak{R}$ ist ein Ultrafilter]. Für die Kompaktheit eines topologischen Raumes werden mit Hilfe dieser Begriffe 7 Kriterien angegeben und schließlich der Tychonoff'sche Satz über die Kompaktheit eines Produkts kompakter Räume bewiesen. *K. Krickeberg.*

Ryll-Nardzewski, C.: A remark on the Cartesian product of two compact spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* **2**, 265—266 (1954).

Generalising a result of Katětov, it is proved that if (i) X is compact, (ii) the character of every $x \in X$ is $\leq m$, (iii) Y is m -compact, then $X \times Y$ is compact. It is understood that the character of $x \in X$ is $\leq m$ if there is a „local basis“ of x of power m and that X is said to be m -compact if every covering of X consisting of m open sets contains a finite subcovering. *A. van Heemert.*

Ball, B. J.: Countable paracompactness in linearly ordered spaces. *Proc. Amer. math. Soc.* **5**, 190—192 (1954).

It is shown in this note that every linearly ordered space must be countably paracompact. This is easily deduced from a theorem which may be stated as follows: X denoting a linearly ordered set and W a countable collection of open sets covering X ; M_p , $p \in X$, denoting the set of all interior points x of a connected chain of open intervals which, forming a refinement of W , cover p and x ; if $p \in X$ and $R = \{x \in M_p: p \leq x\}$, then either (1) R is covered by a finite subcollection of a set K_p , union

of a subset of M_p and of some element of W , or (2) there is a sequence $\{x_n\}$ of points of R such that, for each n , $x_n < x_{n+1}$ and if $x \in R$, then, for some n , $x < x_n$.
C. Racine.

Yang, Chung-Tao: On paracompact spaces. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 185—189 (1954).

This note generalizes a result of A. H. Stone (this Zbl. **32**, 314) and proves that a space is fully normal T_1 either (1) if two points with disjoint closures have disjoint neighbourhoods, or (2) if the neighbourhood of the closure of a point contains the closure of a neighbourhood of this point, or (3) if every point has a neighbourhood whose closure is normal. It is shown also that a space is paracompact T_4 if and only if it has a retract which is paracompact T_2 and meets every non-null closed set.

C. Racine.

Hoheisel, Guido: Über Distanzfunktionen. Arch. der Math. **5**, 203—206 (1954).

M bedeute eine beliebige Menge, ϱ eine Abbildung von $M \times M$ in eine total geordnete Menge N , in der ein Element o ausgezeichnet ist, und F eine Abbildung von $N \times N$ in N , so daß stets $\varrho(x, y) \leq F(\varrho(x, z), \varrho(y, z))$, $x \neq y$ sei eine Abkürzung für $\varrho(x, z) = \varrho(y, z)$ und $\varrho(z, x) = \varrho(z, y)$ für jedes $z \in M$. Betrachtet werden hinreichende Bedingungen dafür, daß ϱ eine Distanzfunktion ist, d. h. (1) $\varrho(x, y) \geq o$, (2) $\varrho(x, y) = o$ impliziert $x \equiv y$, (3) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$, (4) $\varrho(x, x) = o$. Z. B. folgt (1) aus einfachen Monotonieannahmen über F allein. (2) und (3) ergeben sich dann u. a. aus $F(\varrho(x, y), o) = F(o, \varrho(y, x))$ und $F(\xi, o) = \xi$. (2) allein auch schon aus schwächeren Voraussetzungen (Ungleichungen). (4) resultiert aus $\inf \{\varrho(x, z); z \in M\} = o$ und einer Stetigkeitseigenschaft von F in (o, o) .

K. Krickeberg.

Ward, A. J.: A generalization of the Fréchet distance of two curves. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 598—602 (1954).

Par une généralisation naturelle de la distance sur l'espace $h(E)$ des „courbes“ d'un espace métrique E , l'A. définit une structure uniforme \tilde{U} sur $h(E)$ lorsque E est pourvu d'une structure uniforme séparée \tilde{U} . L'A. montre qu'il existe une structure uniforme séparée moins fine (et, en général, strictement moins fine) que \tilde{U} induisant sur $h(E)$ la même topologie que \tilde{U} , qui est donc aussi séparée.

A. Revuz.

Ward, A. J.: A second generalization of the Fréchet distance of two curves. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 1011—1014 (1954).

Suite de l'article analysé ci-dessus. Définition d'une nouvelle structure uniforme sur $h(E)$, moins fine que la précédente, mais cependant encore séparée.

A. Revuz.

Jones, F. Burton: On a property related to separability in metric spaces. J. Elisha Mitchell sci. Soc. **70**, 30—33 (1954).

The author gives the construction of a metric space S in which the closure of each countable set is countable without that S be the union of countably many discrete sets. S is obtained by metrization of an appropriate model of an Aronszajn tree (Jones, this Zbl. **51**, 290). In connection with Alexandroff's results [Math. Ann. **92**, 294—301 (1924)] and his own ones (this Zbl. **12**, 37) the author puts this problem: Is every connected locally peripherally separable metric space separable?

G. Kurepa.

Toulmin, G. H.: Shuffling ordinals and transfinite dimension. Proc. London math. Soc., III. Ser. **4**, 177—195 (1954).

Let α , β and γ be finite or transfinite ordinals. If there are well-ordered sets A, B, C representing α, β, γ respectively, and such that $A = B' \cup C'$, $B' \cap C' = \emptyset$ where B' and C' are, with the induced ordering, ordinally similar to B and C respectively, then α is said to shuffle or to be a shuffling of β and γ . The lower sum, written $\beta \dot{+} \gamma$, is the least ordinal shuffling β and γ , and the upper sum, $\beta \ddot{+} \gamma$, is the least upper bound of the set of all ordinals shuffling β and γ . It is shown that the natural sum of β and γ is equal to $\beta \dot{+} \gamma$ and that $\alpha = \beta \ddot{+} \gamma$ holds in case α

shuffles β and γ such that if we put $\beta' = \{b_\lambda | 0 \leq \lambda < \beta\}$, $C' = \{c_\mu | 0 \leq \mu < \gamma\}$, then $b_\lambda \cdot c_\mu$ in A if and only if $\lambda \leq \mu$. The important facts in dealing with transfinite dimension are that the functions $\alpha \mapsto \beta$, $-1 \mapsto \{(x+1) \leq (\beta+1)\} = 1$ are the least which are strictly increasing with both, and with at least one (respectively) of α and β . The author defines a series $\{\mathfrak{D}_\alpha\}$ of families of completely normal T_1 -spaces by transfinite induction: \mathfrak{D}_0 contains only the empty space; \mathfrak{D}_α consists of those spaces having a base each of whose sets has as boundary a set belonging to $\bigcup \{\mathfrak{D}_\beta | \beta < \alpha\}$ and $\dim X$ is the least ordinal α (if any such exist) such that $X \in \mathfrak{D}_\alpha$. Then if $\dim X$ exists and X has a base of cardinal $\leq \aleph_\alpha$, $\dim X \leq \omega_{\alpha+1}$. The subset theorem holds but the closed-set sum theorem does not. However it is shown that if $\dim A$ and $\dim B$ exist, then $1 + \dim(A \cup B) \leq (1 + \dim A) + (1 + \dim B)$, and that if, in addition, A and B are closed, then $\dim(A \cup B) \leq (\max(\dim A, \dim B)) + (\dim(A \cap B) + 1)$; in the special case where there is a homeomorphism $f: A \rightarrow B$ such that $fA \cap B$ is the identity, $\dim(A \cup B) = \dim A = \dim B$ holds. The product theorem proved here is as follows: if X, Y are non-empty spaces having ordinal dimension, then $\dim(X \times Y) = (\dim X + \dim Y) + (\text{a finite ordinal depending on } \dim X \text{ and } \dim Y)$; in particular, if X is metric and I is the open interval of the real line, then $\dim(X \times I) = \dim X + 1$. For a definition of dimension, for which $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ holds for any spaces X, Y , cf. the author's paper, Quart. J. Math. 4, 498—203 (1953).

K. Morita.

Borovikov, V. A.: Konstruktion eines nulldimensionalen Kompaktums der metrischen Ordnung n . Mat. Sbornik, n. Ser. 34 (76), 279—288 (1954) [Russisch].

Sei F ein Kompaktum. Für jeden Punkt $p \in F$ und für jede endliche Untermenge $M \subset F$ bezeichne das Symbol $\sigma_p M$ die Zahl der Punkte $q \in M$ so, daß $2(p, q) = q(p, M)$. Die metrische Ordnung ωF des Kompaktums F ist die kleinste natürliche Zahl k mit der Eigenschaft: für jede Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es ein ε -Netz $M \subset F$ so, daß $k = \sup_{p \in F} \sigma_p M$. — Es ist bekannt, daß $\omega F \geq \dim F + 1$. Sitnikov

(dies. Zbl. 34, 108) hat bewiesen, daß jedes Kompaktum F einem Kompaktum $F' \subset R^{2n+1}$ [$= (2n+1)$ -dimensionaler Euklidischer Raum] mit der Eigenschaft: $\omega F' = \dim F' + 1$ homöomorph ist und daß $\omega P = \dim P + 1$ für jedes Polyeder P . Der Verf. beweist, daß die Gleichung $\omega P = \dim P + 1$ im allgemeinen falsch ist, wenn P ein krummes Polyeder bezeichnet. Er definiert ein 0-dimensionales Kompaktum $F_0 \subset R^n$ so, daß $\omega F = n$. Wenn ein Bogen I die Menge F_0 enthält, dann gilt $\omega I = n$.

R. Sikorski.

Keldyš, Ljudmila: Beispiel eines eindimensionalen Kontinuums, das sich null-dimensional und offen auf ein Quadrat abbilden läßt. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 201—204 (1954) [Russisch].

Verf. konstruiert im Raume R^3 ein eindimensionales Kontinuum X , das sich durch eine offene null-dimensionale Abbildung f auf ein Quadrat C abbilden läßt; C ist sogar eine orthogonale Projektion von X . X wird folgendermaßen erzeugt. Teilt man C in 4^n kongruente und gleichgelegene Quadrate, so konstruiert Verf. über jedem derselben die gleichseitige Pyramide der Höhe $1/4^n$; sei $Z = \lim Z_n$, wo Z_n die Vereinigungsmenge der Mantelflächen aller dieser Pyramiden bedeutet. Verf. definiert im 4-dim. Raum eine Folge X_n von 2-dim. Kontinua, deren orthogonale Projektion gerade Z ist; das aufzusuchende Kontinuum X stellt sich als $\lim X_n$ dar. Der Satz stellt eine Verschärfung einer Reihe von Sätzen dar, die durch Kolmogorov (dies. Zbl. 16, 81), Každan (dies. Zbl. 29, 323) und Anderson (dies. Zbl. 48, 411, 412) gefunden waren.

G. Kurepa.

Sitnikov, K.: Beispiel einer zweidimensionalen Menge im dreidimensionalen Euklidischen Raum, die kein Gebiet dieses Raumes zerlegt. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 1007—1010 (1954) [Russisch].

Es wird eine zweidimensionale Menge A im R^3 konstruiert, die kein Gebiet des R^3 zerlegt. Vielmehr gibt es zu jeder Kugel $U \subset R^3$ und jedem Punktepaar aus $U - A$ ein Kontinuum in $U - A$, das das Punktepaar enthält. Damit wird die schon von Urysohn gestellte Frage nach der Charakterisierung der $(n-1)$ -dimensionalen Mengen des R^n durch den mengentheoretischen Begriff der lokalen Zerlegung des R^n verneinend beantwortet. Andererseits zeigt der vom Verf. (dies.

Zbl. 46, 165) angegebene allgemeine Hindernissatz, daß das Homologie-Analogon dieser Charakterisierung gilt, wenn die Homologie-Begriffe im Sinne vom Verf. (dies. Zbl. 43, 383) verstanden werden. Aus dem konstruierten Beispiel folgt gleichzeitig, daß der genannte Hindernissatz nicht mehr richtig ist, wenn man in ihm die Homologie im Vietorissschen Sinne versteht.

E. Burger.

Granäs, A.: On local disconnection of Euclidean spaces. *Fundamenta Math.* 41, 42—48 (1954).

Cet article donne une estimation du nombre des composantes connexes du complémentaire $S^{n+1} - F$ d'un fermé F de S^{n+1} , au voisinage d'un point x de F ; l'A. transcrit sous forme locale le théorème classique de Borsuk liant le nombre des composantes connexes de $S^{n+1} - F$ au rang du groupe de cohomotopie $\pi^n(F)$.

R. Thom.

Curtis, M. L.: A note on monoton deformation-free mappings. *Proc. Amer. math. Soc.* 5, 437—438 (1954).

Soit M un continu localement simplement connexe de la sphère S , et $h: M \rightarrow I \rightarrow S$ une déformation de M dans S . M est dit libre par déformation, si pour tout t tel que $0 < t \leq 1$, $h(M, t) \cap M = \emptyset$. Si A est une composante connexe de $S - M$, et si M est libre dans \bar{A} par une déformation $h: M \rightarrow I \rightarrow \bar{A}$ qui est une application ouverte monotone, alors A est uniformément localement simplement connexe. L'objet de cette Note est de montrer qu'on peut, dans cet énoncé, abandonner l'hypothèse h ouverte.

R. Thom.

Keesee, John W.: Sets which separate spheres. *Proc. Amer. math. Soc.* 5, 193—200 (1954).

Le théorème classique de séparation de Jordan-Brouwer admet un raffinement qui s'énonce ainsi: soit X un sous-ensemble fermé de la $(n+1)$ -sphère S^{n+1} ; pour que le complémentaire $S^{n+1} - X$ se compose de deux ouverts disjoints de frontière X , il faut et il suffit que: 1) $H^n(X, G) = G$ pour tout groupe de coefficients G ; 2) $H^n(A) = 0$ pour tout vrai sous-ensemble fermé A de X . La démonstration repose sur un emploi réitéré de suites exactes.

R. Thom.

Fet, A. L.: Eine Verallgemeinerung des Satzes von Ljusternik-Schnirel'man über die Überdeckungen von Sphären und gewisser damit zusammenhängender Sätze. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 95, 1149—1151 (1954) [Russisch].

Es werden die folgenden Verallgemeinerungen bekannter Sätze von Lusternik-Schnirelmann bzw. Borsuk bewiesen: Sei θ eine involutorische stetige Abbildung der n -Sphäre S^n in sich. Satz 1: In jeder Überdeckung der S^n mit $n+1$ abgeschlossenen Mengen gibt es wenigstens ein Element, daß sein θ -Bild schneidet. Satz 2: Jede stetige Abbildung q von S^n in sich mit $q(a) \neq q\theta(a)$ für alle $a \in S^n$ ist wesentlich. — Der Beweis von Satz 1 beruht auf der Bestimmung der Kategorie des Raumes \hat{I}^{n+1} , der aus der Vollkugel T^{n+1} mit dem Rand S^n entsteht, wenn bei fixpunktfreiem θ die Punkte a und $\theta(a)$ von S^n identifiziert werden. Der Kürze halber wird dies nur durchgeführt für den Fall stetig-differenzierbarer θ , so daß keine Schwierigkeiten bezüglich der Triangulierbarkeit von \hat{I}^{n+1} entstehen. *E. Burger.*

Zarankiewicz, K.: On a problem of P. Turan concerning graphs. *Fundamenta Math.* 41, 137—145 (1954).

Bewiesen werden die folgenden zwei Sätze (i) und (ii): Man verbinde in der Ebene E_2 die Punkte a_1, a_2, \dots, a_p mit den Punkten b_1, b_2, \dots, b_q durch Jordانبögen $a_i b_j$ ($i = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, q$) derart, daß je 3 Bögen keine inneren Punkte gemeinsam haben. (i) Dann wird die kleinste Anzahl $K(p, q)$ der Schnittpunkte aller Bögen bei allen derartigen Verbindungen gegeben durch: $K(2k, 2n) = k(k-1)n(n-1)$, $K(2k, 2n+1) = k(k-1)n^2$, $K(2k+1, 2n+1) = k^2 n^2$. (ii) Die kleinste Anzahl $L(p, q)$ der Komponenten von $E^2 - \bigcup a_i b_j$ wird gegeben durch: $L(p, q) = K(p, q) + (p-1)(q-1) + 1$.

H. Terasaka.

Grace, Edward E.: A note on linear spaces and unicoherence. J. Elisha Mitchell sci. Soc. **70**, 33—34 (1954).

A non-degenerate connected locally connected Moore space (cf. this Zbl. **5**, 54) is homeomorphic with a linear set if and only if the space $X^2 = 1X^2$ is nonconnected (for separable topological spaces v. S. Eilenberg, this Zbl. **24**, 192; $1X^2 =$ the diagonal of X^2). In this connection the author proves: Each non unicoherent continuum X in a Moore space contains 3 points, no one of which separates the other two in X .

G. Kurepa.

Tatarkiewicz, K.: Les transformations unifoliées. Fundamenta Math. **41**, 122—136 (1954).

Considérons deux espaces euclidiens X et Y et convenons de désigner par x resp. par y les points de ces espaces. Un ensemble A contenu dans le produit topologique $X \times Y$ est dit ensemble à projection simple sur X , si pour tout $x \in X$ l'ensemble $S[A, x]$ contient un point au plus, $S[A, x_0]$ désignant l'intersection de l'hyperplan $x = x_0$ et de l'ensemble A . L'ensemble A est dit connexe sur X , si pour chaque $x \in X$ l'ensemble $S[A, x]$ est connexe ou vide. Une transformation $(1) x^* = g(x, y), y^* = h(x, y)$, définie dans un ensemble $M \subset X \times Y$, qui transforme biunivoquement chaque ensemble A à projection simple sur X , en un ensemble A^* à projection simple sur X , est dite transformation unifoliée dans M . On dit enfin que la transformation (1) remplit la condition W , lorsque $g(x, y)$ ne dépend pas de y , c.-à-d. $g(x, y) \equiv g(x)$, et $x^* = s \cdot x$ est une transformation biunivoque. La condition W est évidemment suffisante pour que la transformation (1) soit unifoliée. Or, l'A. démontre que lorsque M est connexe sur X et ouvert et la fonction $g(x, y)$ est continue, alors la condition W est aussi nécessaire. En particulier, lorsque M est un domaine et X est une droite, l'hypothèse de connexité sur X peut être omise. D'autres théorèmes sur ce sujet sont démontrés dans la suite. En voici l'énoncé d'un d'eux. La condition W est suffisante et nécessaire pour que la transformation continue et biunivoque (1) , définie dans un domaine M connexe sur X , transforme chaque arc simple, contenu dans M , à projection simple sur X , en un arc à projection simple sur X . Ce théorème constitue la réponse au problème posé par T. Wazewski, à savoir le problème de caractériser les transformations qui conservent l'univalence des intégrales d'une équation différentielle. J. Szarski.

Stein, S. K.: Homology of the two-fold symmetric product. Ann. of Math., II. Ser. **59**, 570—583 (1954).

K sei ein endlicher Komplex, x_i ein i -dimensionales Element von K , T der Automorphismus $T(x_i \times x_j) = (x_j \times x_i)$ des Produktkomplexes $K \times K$. Durch Identifizierung von $(x_i \times x_i)$ mit $(x_i \times x_i)$ erhält man aus $K \times K$ das zweifach symmetrische Produkt S . Die durch die Abbildungen $\sigma = 1 + T$ und $\tau = 1 - T$ erzeugten Bilder der Ketten von K ergeben K^σ und K^τ , die Ketten des Kerns von τ bilden K^τ . Die Homologiegruppen von K^σ, K^τ, K^τ seien H^σ, H^τ, H^τ ; für sie werden durch absteigende Induktion Basen aufgestellt, aus denen man dann eine Basis für die Homologiegruppe von S gewinnt.

H. Künneth.

Eilenberg, Samuel and Saunders MacLane: On the groups $H(H, n)$. II. Ann. of Math., II. Ser. **60**, 49—139 (1954).

Teil I, dies. Zbl. **50**, 393. Dort haben Verf. die Komplexe $K(H, n)$ durch äquivalente, allgemeiner durchsichtiger Komplexe $A(H, n)$ ersetzt. Im vorliegenden Teil wird gezeigt, wie mittels dieser Komplexe $A(H, n)$ die Homologiegruppen $H_q(H, n) = H_q(K(H, n)) = H_q(A(H, n))$ tatsächlich berechnet werden können. Dies wird explizit durchgeführt für die Homologiegruppen $H_{n-k}(H, n)$ mit $k \leq 5$, $n \geq 2$ (außer $H_1(H, 2)$) sowie für die Kohomologiegruppen $H^{n-k}(H, n, G)$ für $k \leq n$, $k = 2, 3, 4, 5$. Als wichtiges Beweismittel tritt das „Direkte-Summen-Theorem“ auf, das die Kettenäquivalenz der Komplexe $A(H_1 \times H_2, n)$ und $A(H_1, n) \otimes A(H_2, n)$ explizit angibt. Dieses folgt gemäß der induktiven Definition von $A(H, n)$ aus dem „Tensorprodukt-Theorem“, das die Kettenäquivalenz $B(G_1 \otimes G_2) \cong B(G_1) \otimes B(G_2)$ aussagt, wobei G_1, G_2 graded \mathbb{Z} -rings sind und B die Strichkonstruktion bezeichnet. Letzteres wieder folgt aus dem Äquivalenz- \mathbb{Z} -rings $K_1 \times K_2 \cong K_1 \otimes K_2$ von Eilenberg-Zilber (dies. Zbl. **50**, 173), das Verf. auf beliebige FD-Komplexe K_1, K_2 unter expliziter Angabe einer Kettenäquivalenz verallgemeinert. Weiter werden nun die Künnethschen Formeln, welche von Verf. in moderner Fassung unter Benützung einer neuen Definition des Tensorproduktes zweier Gruppen neu bewiesen werden, für die Homologie im Produktkomplex $A(H_1, n) \otimes A(H_2, n)$ herangezogen. Sie liefern im einfachsten Falle $q = 2n$ [d. i. der Fall, in dem $H_{q+1}(H, n)$ unter der Einhangung „stabil“ ist] die Additivität des Funktors $H_q(H, n)$ in H . In den nicht-stabilen Fällen ist das jedoch nicht mehr der Fall. Hier werden die zusätzlich auftretenden Summanden als „cross-effect“ bezeichnet, und diese cross-effects allgemein für beliebige Funktoren $T(H)$ untersucht, einschließlich der

höheren cross-effects, die auftreten, wenn der ursprüngliche cross-effect in seinen Argumenten nicht additiv ist. Mittels der Künnethschen Formeln werden nun die cross-effects für $H_q(\Pi, n)$ in den niedrigsten Fällen explizit bestimmt. Da ferner für zyklische Gruppen $\Pi = \mathbb{Z}_n$ der Komplex $A(\mathbb{Z}_n, n)$ durch einen einfacheren Komplex $M(h, n)$, der in allen Dimensionen endlich ist, ersetzt werden kann, so daß seine benötigten Homologiegruppen explizit berechnet werden können, ergibt sich schließlich die explizite Berechnung der oben genannten Homologie- und Kohomologiegruppen. — Als Nebenergebnis bei der Diskussion von $H^1(\Pi, 2; G)$ ergibt sich ein Beweis eines Satzes von Hughes (dies. Zbl. 44, 16). Ferner wird in diesem Zusammenhang für jede Primzahl p für die Gruppe Extabel $(\Pi/p \Pi, G)$ der abelschen Gruppenerweiterungen die Isomorphie mit $\text{Hom}(\Pi, G/pG)$ bewiesen. E. Burger.

Cartan, Henri: Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane $H(\Pi, n)$. I. Méthode des constructions. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 467—471 (1954).

Durch die vorliegende Arbeit werden die Methoden von Eilenberg-MacLane (dies. Zbl. 50, 393) zur Untersuchung der Komplexe $K(\Pi, n)$, insbesondere die Strichkonstruktion (bar construction), in neuer Weise beleuchtet. Verf. betrachtet allgemeine Konstruktionen folgender Art: Das Anfangselement der Konstruktion ist eine schiefkommutative gradierte ∂ -Algebra A , das Endelement eine schiefkommutative gradierte Algebra N , die in folgender Weise zusammenhängen: Auf dem tensoriellen Produkt $M = A \otimes N$ der Algebren A und N , das in naheliegender Weise zu einer gradierten Algebra gemacht wird, ist eine Operation ∂ , die mit der durch $a \rightarrow a \otimes 1$ gegebenen Einbettung von A in M verträglich ist, in solcher Weise definiert, daß M azyklisch ist. N läßt sich als Restklassenring von M auffassen und erhält dadurch ebenfalls eine ∂ -Operation. Die Frage nach der Existenz solcher Konstruktion (A, N, M) wird dadurch beantwortet, daß sich die Strichkonstruktion von Eilenberg-MacLane als eine solche Konstruktion auffassen läßt, wobei das Auftreten der vermittelnden azyklischen Algebra M neu hinzukommt. Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist nun die Tatsache, daß eine durch eine beliebige Konstruktion (A, N, M) aus A gewonnene Endalgebra N stets homologie-äquivalent zu der aus A durch Strichkonstruktion hervorgehenden Algebra $\bar{B}(A)$ ist. Da nun die aus dem ganzzahligen Grupperring der Gruppe Π durch Iteration der Strichkonstruktion entstehenden ∂ -Algebren ihrerseits zu den Komplexen $K(\Pi, n)$ homologie-äquivalent sind, erhält man die Möglichkeit zur Berechnung der Homologiegruppen der $K(\Pi, n)$ mittels einer beliebigen Konstruktion im Sinne des Verf. Auch die durch die Eilenberg-MacLanesche Einhängung $K(\Pi, n) \rightarrow K(\Pi, n+1)$ induzierten Homomorphismen der Homologiegruppen und die Multiplikation zwischen den Kohomologieklassen können in geeigneter Weise mittels beliebiger bzw. mittels gewisser spezieller Konstruktionen bestimmt werden. E. Burger.

James, I. M.: On the iterated suspension. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 5, 1—10 (1954).

Soit F_n l'espace des applications de degré 1 laissant fixe le pôle nord de la n -sphère S^n ; G_{n-1} le sous-espace de F_n formé des applications qui sont suspensions d'une application de l'équateur S^{n-1} sur lui-même. La suite exacte classique de G. Whitehead: $\cdots \rightarrow \pi_{r+n-1}(S^n) \xrightarrow{F} \pi_{r+n-1}(S^{n+1}) \xrightarrow{E} \pi_r(S^n) \xrightarrow{P} \pi_{r+n-1}(S^n) \rightarrow \cdots$ s'identifie, grâce à l'isomorphisme de Hurewicz $\zeta: \pi_r(F_n) \rightarrow \pi_{r+n}(S^n)$ à la suite: $\cdots \rightarrow \pi_r(F_n) \rightarrow \pi_r(F_{n+1}) \rightarrow \pi_r(G_n, F_n) \rightarrow \pi_{r-1}(F_n) \rightarrow \cdots$ pour $r \leq 2n-2$. Par comparaison avec la suite exacte d'homotopie de l'inclusion $F_n \hookrightarrow F_{n+1}$, on en déduit, que pour $r \leq 2n-2$, les groupes $\pi_r(F_n, F_n)$ et $\pi_r(F_{n+1}, F_n)$ sont isomorphes. Usant alors des isomorphismes: $\pi_r(G_n, F_n) \simeq \pi_r(S^n) \simeq \pi_r(SO(n+1), SO(n))$, on montre l'existence d'un isomorphisme $\varphi_m: \pi_r(SO(n+m), SO(n)) \rightarrow \pi_r(F_{n+m}, F_n)$. Soient $\partial_F: \pi_r(F_{n+m}, F_n) \rightarrow \pi_{r-1}(F_n)$, $i_F: \pi_r(F_{n+m}) \rightarrow \pi_r(F_{n+m}, F_n)$ les homomorphismes définis par l'inclusion $F_n \hookrightarrow F_{n+m}$. On pose $H_m = \varphi_m^{-1} \circ i_F \circ \partial_F^{-1}$. Dans ces conditions, la suite:

$$\pi_{3n-2}(S^n) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_{r+n}(S^n) \xrightarrow{E^m} \pi_{r+n+m}(S^{n+m}) \xrightarrow{B^m} \pi_r(SO(n+m), SO(n)) \xrightarrow{P^m} \pi_{r+n-1}(S^n) \rightarrow \cdots$$

est exacte. (Cette suite généralise la suite exacte citée plus haut de G. W. Whitehead). Viennent ensuite de nombreuses relations liant P^m, H^m, E^m . Grâce à un calcul fait par G. F. Paechter des groupes relatifs $\pi_r(SO(m+n), SO(n))$, qui sont ceux d'une variété de Stiefel, l'A. annonce: $\pi_{n+13}(S^{m+5}) \simeq E^m \pi_{13}(S^5) + J \pi_8(SO(m+5))$ où J est un isomorphisme. R. Thom.

Hilton, P. J.: A certain triple Whitehead product. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 189—197 (1954).

ι_n désignant un générateur de $\pi_n(S^n)$, on étudie dans ce papier les produits triples de Whitehead de la forme $[[\iota_n, \iota_n], \iota_n]$: il résulte immédiatement de l'identité de Jacobi que ces produits sont d'ordre 3; pour n impair, ils sont aussi d'ordre 2, donc nuls. On sait par ailleurs que $[[\iota_2, \iota_2], \iota_2] = 0$. L'A. démontre que de façon générale $[[\iota_n, \iota_n], \iota_n]$, $n \geq 2$, est une suspension; utilisant le fait que $\pi_{n+6}(S^n) \neq 0$,

il montre que $[[\iota_1, \iota_1], \iota_1]$ est un élément non nul de $\pi_{10}(S^4)$. Puis il se livre à une étude exhaustive des produits de Whitehead à valeurs dans $\pi_{11}, \pi_{12}, \pi_{13}(S^4)$, qui sont tous nuls. Le dernier paragraphe généralise une formule d'un article antérieur [M. G. Barratt and P. J. Hilton, Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 436–445 (1953)]. Les démonstrations font un large usage des méthodes de J. P. Serre (C -théorie, espaces de lacets), ainsi que des formules reliant H^* (invariant de Hopf généralisé), E , et la composition. En particulier, on prouve que si α , élément d'ordre impair de $\pi_r(S^n)$, n pair, est annulé par H^* , alors c'est une suspension.

R. Thom.

Whitehead, J. H. C.: On the $(n+2)$ -type of an $(n-1)$ -connected complex ($n \geq 4$). Proc. London math. Soc., III. Ser. 4, 1–23 (1954).

On étudie ici le $(n+2)$ -type d'un espace $(n-1)$ -connexe, c'est-à-dire les espaces connexes dont tous les groupes d'homotopie sont nuls à l'exception de π_n, π_{n+1} . On sait qu'alors le type d'homotopie d'un tel espace est déterminé par l'invariant d'Eilenberg-MacLane $k \in H^{n+2}(\pi_n; \pi_{n+1})$; partant du couple exact d'homotopie, l'A. préfère se donner l'homomorphisme $\eta: \pi_n \rightarrow \pi_{n+1}$ induit par l'application essentielle: $S^{n+1} \rightarrow S^n$. [Si on considère η comme une classe de $H^n(\pi_n; \pi_{n+1})$, alors $k = \text{Sq}^2 \eta$.] On trouve pour les groupes d'homologie: $H_{n+1} = \pi_{n+1} \eta \pi_n$; $H_{n+2} = \eta^{-1}(0) 2\pi_n$; enfin H_{r+3} est une extension de π_{r+1} par le quotient $\pi_{r+1} \eta^{-1}(2\pi_{n+1})$, dont l'A. détermine la classe. La méthode des complexes réduits permet d'ailleurs de construire explicitement cette extension.

R. Thom.

Moore, John C.: On homotopy groups of spaces with a single non-vanishing homology group. Ann. of Math., II. Ser. 59, 549–557 (1954).

Ce papier comporte dans une première section quelques résultats généraux sur les groupes de triade et groupes relatifs, interprétés comme des groupes absolus dans des espaces associés: application en est faite aux espaces connexes, qui, comme la sphère, ont tous leurs groupes d'homologie de dimension > 0 , nuls à l'exception d'un seul. Une seconde section est consacrée aux composantes p -primaires (p premier impair) des groupes d'homotopie de S^3 et S^{2p+1} , entre lesquels l'A. établit des relations dans les deux sens. Utilisant à peu près tous les procédés connus en homotopie (espaces de lacets, suites spectrales, théorème d'Hurewicz relatif, bisuspension etc.), l'A. détermine les composantes p -primaires de $\pi_q(S^n)$ (n impair), pour $q = n + 6p - 8$, et de $\pi_q(S^3)$ pour $q < 8p - 8$.

R. Thom.

Cockcroft, W. H.: On two-dimensional aspherical complexes. Proc. London math. Soc., III. Ser. 4, 375–384 (1954).

Soit L un complexe fini de dimension 2 tel que $\pi_2(L) \neq 0$. Ajoutons à L un nombre fini de 2-cellules (e_i), et soit $K = L \cup (e_i)$ le complexe obtenu. En généralisant une conjecture classique sur l'asphéricité du complémentaire d'un noeud, on peut penser qu'il est impossible d'avoir $\pi_2(K) = 0$. L'A. démontre cette conjecture lorsque (Théorème I) le groupe $\pi_1(L)$ est libre, ou abélien, ou fini, ou lorsque (Théorème II) le complexe L n'a qu'une seule 2-cellule. De plus, on démontre en passant que les seuls groupes fondamentaux non triviaux abéliens d'un complexe L asphérique sont Z et $Z + Z$; si $\pi_1(L)$ est libre, et si $H_2(L) = 0$, alors $\pi_2(L) = 0$. Les démonstrations utilisent les résultats classiques de Hopf qui lient $\pi_2(L)$ au 3^e groupe d'homologie du groupe $\pi_1(L)$; d'autres nécessitent la considération de l'algèbre du groupe π_1 et l'emploi des résultats fins de Lyndon sur les groupes définis par une seule relation. Remarque du Réf.: On peut étendre le Th. I de l'A. au cas où $\pi_1(L)$ contient un élément d'ordre fini dont l'image dans $H_1(L)$ n'est pas nulle.

R. Thom.

Uehara, Hiroshi: On a homotopy classification of mappings of a four-dimensional polyhedron into a simply-connected space with vanishing 3-rd homotopy group. J. London math. Soc. 29, 292–309 (1954).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 48, 415) hat Verf. zusammen mit N. Shimada

das Klassifikationsproblem für Abbildungen eines $(n-2)$ -dimensionalen Komplexes in einem Raum Y mit $\pi_i(Y) = 0$ für $i < n$ und $i = n+1$ behandelt für den Fall $n = 2$. Hier wird nun der Fall $n = 2$ besprochen. Die Methoden sind wie üblich. Es werden gewisse Cohomologieoperationen vom Typ $(2, 5)$, (Abbildung von 2-dimensionaler Cohomologie in 5-dimensionale Cohomologie), eingeführt. Wichtig ist ferner die Berechnung einiger Homotopiegruppen spezieller Komplexe. Hier verwendet Verf. Resultate von Blakers und Massey, *F. Hirzebruch*.

Miyazakai, Hiroshi: On generalizations of Hopf's classification theorems. Tôhoku math. J., II. Ser. 5, 284—289 (1954).

This paper deals with a generalization of S. Y. Hu's bridge theorems (this Zbl. 32, 432) and of Hopf's classification theorems. The author makes use of notions and constructions explained by him elsewhere [this Zbl. 47, 418, 421; Tôhoku math. J., II. Ser. 5, 83—103 (1953)]. A first section is devoted to several bridge theorems. If X_0 denotes a closed subset of a normal space X , α a covering of X , A its nerve with the weak topology, A_0 the nerve of $\alpha \cap X_0$ and Y an arbitrary space; if f denotes a mapping of X_0 into Y and Φ_α any canonical mapping $(X, X_0) \rightarrow (A, A_0)$, the mapping $\psi_\alpha: A_0 \rightarrow Y$ is called a bridge mapping for f if the mapping $\Phi_\alpha \Phi_\alpha^{-1} X_0$ is homotopic to f . Then α is called a bridge for f . It is proved that any locally finite refinement of a bridge is a bridge. However if Y is compact there is a similar theorem when α is a finite covering. Existence theorems follow concerning bridges — and, when Y is compact —, finite bridges. Finally, a bridge homotopy theorem is stated, its proof being only outlined. Homotopy of two bridges is studied by considering a common refinement. The application of this theory to Hopf's classification theorems is made by assuming that Y is a connected space dominated by CW-complex and whose homotopy groups are subject to a few conditions. Two such theorems are stated, their proof being outlined. The case of Y paracompact and normal yields two particular cases of these theorems. In an appendix, metric — and specially separable metric — spaces are considered, Y being an absolute neighbourhood retract. *C. Racine*.

Ehresmann, Charles: Structures locales. Ann. Mat. pura appl. IV. Ser. 36, 133—143 (1954).

Es handelt sich um den einleitenden Vortrag einer Serie von 8 Vorträgen, die Verf. im Jahre 1952 in Rom über das Thema „Structures locales, structures fibrées, structures infinitésimales“ gehalten hat. Verf. bespricht zunächst den Begriff des Typs mathematischer Strukturen (espèce de structures mathématiques im Sinne von N. Bourbaki) und behandelt dann die lokalen Strukturen (z. B. differenzierbare Struktur, komplexe Struktur usw.). Eine lokale Struktur vom festen Typ (λ) auf einem topologischen Raum E induziert auf jeder offenen Teilmenge von E eine lokale Struktur vom Typ (λ) . Es gilt das folgende „Axiome du recollement“. Wenn E eine Punktmenge ist, die mit Teilmengen E_i überdeckt ist, wenn ferner die E_i mit Topologien versehen sind, derart daß $E_i \cap E_j$ in E_i und E_j offen ist und E_i, E_j auf $E_i \cap E_j$ dieselbe Topologie induzieren und wenn schließlich auf allen E_i eine lokale Struktur vom Typ (λ) so vorgegeben ist, daß die lokalen Strukturen von E_i, E_j auf $E_i \cap E_j$ dieselbe lokale Struktur induzieren, dann gibt es in natürlicher Weise eine Topologie auf E mit den E_i als offenen Mengen und eine lokale Struktur vom Typ (λ) auf E , die in jeder Menge E_i die vorgegebene lokale Struktur induziert. — Zu jeder lokalen Struktur auf E gehört die Pseudogruppe der lokalen Automorphismen. Ein Element dieser Pseudogruppe ist eine topologische Abbildung einer offenen Menge von E auf eine offene Menge von E , die ein Isomorphismus bezüglich der lokalen Struktur ist. Entsprechend wird der Begriff des lokalen Isomorphismus für topologische Räume E, E' mit lokalen Strukturen des gleichen Typus definiert (— topologische Abbildung einer offenen Menge von E auf eine offene Menge von E' , die ein Isomorphismus bezüglich der lokalen Struktur ist). Identifiziert man zwei in Umgebungen des Punktes $x \in E$ definierte lokale Isomorphismen von E in E' miteinander, wenn sie in einer Umgebung von x übereinstimmen, dann gelangt man zum Begriff des lokalen „jet“ in x . Man kann die Menge $\pi(E, E')$ aller lokalen jets von E in E' zu einem topologischen Raum machen, der i. a. nicht hausdorffsch ist und natürliche Projektionen auf E und E' besitzt, die lokale Homöomorphismen sind. Wenn f ein in einer offenen Menge $U \subset E$ definierter lokaler Homöomorphismus von E in E' ist, dann bildet die Menge aller lokalen jets, die durch f in Punkten von U repräsentiert werden, eine offene Menge von $\pi(E, E')$. Die so erhaltenen offenen Mengen bilden eine Basis. (Vgl. die Theorie der faisceaux.) — Jeder homogener Raum E' einer Lieschen Gruppe ist in natürlicher Weise mit einer lokalen Struktur versehen. Für diese lokale Struktur sind die Operationen der Lieschen Gruppe Automorphismen. Nun sei E ein Raum mit einer lokalen Struktur, der zu E' lokal isomorph ist, d. h. für $(x, y) \in E \times E'$ gibt es immer einen lokalen jet in x , der x auf y abbildet. (E ist ein „espace localement homogène“.) Der Raum $\pi(E, E')$ ist hausdorffsch. Daraus kann man z. B. schließen, daß E zu der universellen Überlagerung von E' isomorph ist, wenn E kompakt und einfach-zusammenhängend ist. E ist dann selbst ein homogener Liescher Raum (vgl. Verf., dies. Zbl. 15, 394).

F. Hirzebruch.

Blanchard, André: Espaces fibrés kähleriens compacts. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2281—2283 (1954).

In dieser Note wird der folgende Satz bewiesen: „Soit E un espace fibré analytique complexe compact, de base B et de fibre F . On suppose de plus que le groupe de Poincaré de B opère trivialement sur le premier groupe de cohomologie réelle de F . Alors E kählerienn équivaut à la réunion des conditions suivantes: 1. Le groupe de Poincaré de B respecte une classe de cohomologie réelle de degré 2 de F correspondant à une métrique kählienne de F . 2. B admet une métrique kählienne. 3. L'application du groupe de cohomologie réelle $H^1(F)$ dans le groupe de cohomologie réelle $H^2(B)$ est nulle.“
F. Hirzebruch.

Kobayashi, Shōshichi: La connexion des variétés fibrées. II. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 443—444 (1954).

(Part I, ce Zbl. **55**, 166). En considérant la variété fibrée à connexion infinitésimale dans le sens de C. Ehresmann, l'A. peut associer à toute connexion une classe d'équivalence de la représentation d'un certain espace quotient \tilde{Q}_r de l'espace des lacets sur la variété originale dans le groupe de structure. Il est annoncé que deux variétés fibrées à connexion sont équivalentes, s'il existe dans chacune une connexion qui induit la même représentation de \tilde{Q}_r , et qu'il existe une variété fibrée à connexion pour toute représentation de \tilde{Q}_r .
H. Guggenheimer.

Kyle, R. H.: Branched covering spaces and the quadratic forms of links. Ann. of Math., II. Ser. **59**, 539—548 (1954).

Die Thesis des inzwischen verstorbenen Verf. enthielt u. a. Ergebnisse, die unabhängig davon durch D. Puppe (dies. Zbl. **46**, 168, getunden und durch D. Puppe und Ref. (dies. Zbl. **50**, 398, zitiert als PK) verschärft worden sind. R. H. Fox hat es daher in der vorliegenden Arbeit unternommen, den betreffenden Teil der Thesis umzuarbeiten und das herauszuheben, was gegenüber PK durch die Betrachtung von Verkettungen (mehrerer Knoten) neu hinzutritt. Es sind dies die Tatsachen, daß die quadratische Form einer Verkettung (1) ausgeartet sein, (2) gerade Determinante haben kann, was bei einem einzelnen Knoten nicht vorkommt. Das erste Ergebnis ist in Analogie zu PK das folgende. Sei \mathfrak{K} eine Verkettung, bestehend aus den einfach geschlossenen Kurven K_1, \dots, K_r ; weiter π die Wegegruppe des Komplements dieser Kurven und π_2 die Untergruppe der Wege, für welche die Summe der Verschlingungszahlen mit K_1, \dots, K_r gerade ist; schließlich \mathfrak{M}_2 der zu π_2 gehörige, in K_1, \dots, K_r verzweigte, zweiblättrige Überlagerungsraum. Dann bestimmen sich die eindimensionale Homologiegruppe von \mathfrak{M}_2 , aufgefaßt als Gruppe mit Verschlingung, und die quadratische Form von \mathfrak{K} gegenseitig eindeutig. Im Beweis wird von den Ergebnissen Gebrauch gemacht, die in PK angegeben und im Spezialfall ungerader Determinanten bewiesen worden sind. Im weiteren werden Invarianten der quadratischen Form betrachtet, die sich auf das Kongruenzverhalten nach Potenzen von 2 beziehen. Einige Beispiele beschließen die Arbeit.
M. Kneser.

Homma, Tatsuo: On the existence of unknotted polygons on 2-manifolds in E^3 . Osaka math. J. **6**, 129—134 (1954).

If P is a simple closed polygon and N an arbitrary set, then P will be called an N unknotted polygon, if P is the boundary of a polyhedral disk $D(P)$, whose interior is contained in N . An E_3 -unknotted polygon is called an unknotted polygon. It is proved, that (i) If M is a closed polyhedral 2-manifold of genus $p \neq 0$, then there exists an $(E^3 - M)$ -unknotted polygon on M not homotopic to 0 in M . (ii) If M is a closed polyhedral 2-manifold of genus p , there exist p mutually disjoint unknotted polygons, such that they are linearly independent in the homology group of M .
A. van Heemert.

Shanks, M. E. and Lyle E. Pursell: The Lie algebra of a smooth manifold. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 468—472 (1954).

Sei X eine unendlich differenzierbare Mannigfaltigkeit, D die Algebra aller unendlich differenzierbaren reellen Funktionen auf X , die gleich Null sind außerhalb kompakter Mengen. Sei \mathcal{L}_0 die Lie-Algebra aller Tangenten-Vektorfelder, deren Komponenten in D liegen. Dann ist die Mannigfaltigkeit X durch die Algebra \mathcal{L}_0 vollständig bestimmt, bis auf einen unendlich differenzierbaren Homöomorphismus.
E. Hewitt.

Tichomirova, E. S.: Infinitesimale Klassifikation der Flächen zweiter Ordnung Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 1 (59), 121—123 (1945) [Russisch].

In der vorliegenden Note wird untersucht, welche der verschiedenen affinen Typen von Flächen 2. Grades zueinander äquimorph sind. Dabei ist unter äquimorph offenbar zu verstehen, daß sie gleichmäßig stetig aufeinander beziehbar sind. Der Begriff stammt von Efremovič (s. dies. Zbl. **42**, 167; **46**, 163), an den sich diese Arbeit eng anschließt. Es erweisen sich vermittels einfacher Beziehungen durch Strahlenbündel als äquimorph: zweischaliges Hyperboloid und Paar paralleler Ebenen, hyperbolisches Paraboloid oder parabolischer Zylinder und Ebene, jedoch nicht das elliptische Paraboloid und die Ebene oder der elliptische Zylinder und das einschalige Hyperboloid. Unter Berücksichtigung aller Ausartungsfälle, also auch der Geraden als einzigen reellen Zuges einer Fläche ergeben sich damit im reellen affinen Raum 10 Klassen untereinander äquimorpher Flächen 2. Grades. W. Burau.

Homma, Tatsuo and Shin'ichi Kinoshita: On a topological characterization of the dilatation in E^3 . Osaka math. J. **6**, 135—143 (1954).

The theorem proved is: Let h be a homeomorphism of E^3 onto itself satisfying (i) for each $x \in E^3$ the sequence $h^n(x)$ converges to the origin O when $n \rightarrow \infty$, (ii) for each $x \in E^3$, except for O , the sequence $h^n(x)$ converges to the point at infinity when $n \rightarrow -\infty$. Then if h is sense preserving, h is topologically equivalent to the transformation $x' = x/2$, $y' = y/2$, $z' = z/2$ and if h is sense reversing, h is topologically equivalent to the transformation $x' = x/2$, $y' = y/2$, $z' = -z/2$ in Cartesian coordinates. A. van Heemert.

Katz, Leo and James H. Powell: The number of locally restricted directed graphs. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 621—626 (1954).

Jedem Punkt a_i eines gerichteten (schlingenfreen) Graphen wird ein Zahlenpaar (r_i, s_i) zugeordnet; r_i und s_i sind die Anzahlen der Kanten, die a_i zum Anfangs- bzw. Schlußpunkt haben. Gefragt wird nach der Zahl der verschiedenen Graphen mit n Punkten, wenn n solche Zahlenpaare gegeben sind. Dem Graph wird eine Matrix $|c_{ik}|$ zugeordnet; es ist $c_{ik} = 1$, wenn eine Kante von a_i nach a_k geht, sonst $c_{ik} = 0$. Die Summe der i -ten Zeile ist dann r_i , die der k -ten Spalte s_k . Die Zahl der verschiedenen Matrizen mit $c_{ik} = 0$ oder 1 bei gegebenen Zeilen- und Spaltensummen wurde von P. V. Sukhatme (dies. Zbl. **19**, 175) gegeben. Aus diesen Zahlen lassen sich die gesuchten Anzahlen der speziellen Matrizen gewinnen, bei denen noch $c_{ii} = 0$ erfüllt sein muß. H. Künneht.

Trent, Horace M.: A note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 1004—1007 (1954).

Es handelt sich um die Anzahl $A(G)$ der verschiedenen Bäume mit n Kanten, die in einem gegebenen zusammenhängenden Graphen G mit $n + 1$ Punkten enthalten sind. N sei die Matrix, die man aus der zugehörigen Poincaréschen Inzidenz-Matrix für irgendeine Orientierung von G erhält durch Streichung einer der $n + 1$ Spalten. N' die transponierte Matrix von N . $A(G)$ ist dann gleich der Anzahl der von Null verschiedenen n -reihigen Minoren von N und gleich dem Wert der Determinante $N'N$. Sind b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) die Bezeichnungen der Kanten von G und B die m -reihige Matrix $|c_{ik}|$ mit $c_{ik} = 0$ für $i \neq k$, $c_{ii} = b_i$, so ist $N'BN = \sum b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_m}$, wobei jeder Summand Produkt der Kanten eines Baumes ist. — Entsprechend erhält man aus der Kanten-Zyklen-Matrix von G die Anzahl und die Zusammensetzung der Komplemente zu den Bäumen. H. Künneht.

Angewandte Geometrie:

• **Haack, Wolfgang: Darstellende Geometrie I.** Sammlung Götschen Band 142. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1954. 110 S. 117 Abb. DM 2,40.

Nach der mit zahlreichen historischen Hinweisen versehenen Einleitung will Verf. in den ersten beiden Bänden „vornehmlich die Darstellungsmethoden behandeln, die die Maße der dargestellten Körper wiedergeben, während im dritten Band die unmittelbare Anschaulichkeit der Zeichnung hervorgehoben wird.“ — Ohne irgendwelche Vorkenntnisse vorauszusetzen, werden in Bd. I erst die verschiedenen Projektionsarten (Zentral-, Parallel- und Normalriß) kurz besprochen und dann ständig unter dem Gesichtspunkt der technischen Anwendungen das Grund- und Aufrißverfahren behandelt. Hierbei werden die wichtigsten Lagen- und Maßaufgaben (mit oder ohne Benützung von Spurelementen) gelöst, ebenflächige Körper, d. h. Prismen und Pyramiden dargestellt, ihre Netze gezeichnet und ebene Schnitte sowie Durchdringungen ausgeführt. Am Ende von Bd. I wird die perspektive Affinität besprochen, als Anwendung werden Eigenschaften der Ellipse aus solchen des Kreises gefolgert. Hierbei unterdrückt Verf., der praktischen Ausrichtung der Gesamtdarstellung folgend, den Beweis, daß das affine Bild eines Kreises tatsächlich eine Ellipse ist. Bemerkenswert erscheint der reichliche Gebrauch der Kavalierperspektive, um in einfacher Weise anschauliche Bilder zu erzielen. — Die klare und leicht verständliche Darstellung ohne Heranziehung höherer Gesichtspunkte im Verein mit zahlreichen, anschaulichen Figuren wird sicherlich zur weiten Verbreitung dieses handlichen Lehrbuches unter Technikern beitragen.

H. R. Müller.

● **Haack, Wolfgang:** *Darstellende Geometrie II. Körper mit krummen Begrenzungsflächen. Kottierte Projektionen.* (Sammlung Götschen Band 143.) Berlin: Walter de Gruyter 1954. 129 S. 86 Abb. DM 2,40.

(Teil I, s. vorsteh. Referat.) Auch der zweite Teil ist ganz den Bedürfnissen der technischen Praxis angepaßt und bringt daher im wesentlichen nur die Darstellung von Drehzylindern, Drehkegeln und Kugeln in zugeordneten Normalrissen, sowie die Durchführung der wichtigsten Aufgaben an ihnen (ebene Schnitte, Durchdringungen u.f.). Auch in diesem Band bekundet Verf. seine Vorliebe für die Kavalierperspektive. Als Vertreter der Drehflächen wird nur der Torus behandelt und kurz auf die Darstellung von Schraublinien und Schraubflächen in einfachster Lage zu den Bildebenen eingegangen. Schattenkonstruktionen werden an krummen Flächen — da für den Praktiker unwichtig — nicht durchgeführt. Der letzte Abschnitt ist der kottierten Projektion gewidmet. Nach Darlegung der Grundbegriffe werden die technisch wichtigsten Aufgaben an Geländeflächen besprochen.

H. R. Müller.

Jeger, M.: *Zur Erzeugung ebener Figuren durch Projektion.* *Elemente Math.* 9, 101—111 (1954).

Verf. wendet die „allgemeine stereographische Projektion“, bei der die Punkte einer Fläche zweiter Ordnung Φ aus einem ihrer Punkte S auf eine beliebige Ebene π projiziert werden, in dem Sonderfall an, daß Φ eine Drehfläche und π ihre Kehlkreisebene ist. Schneiden die Flächenerzeugenden e, f durch S den Kehlkreis in den Punkten B_1, B_2 , so werden die durch diese Punkte gehenden Kegelschnitte von π auf die Kegelschnitte unserer Fläche und damit auf die Ebenen des Raumes abgebildet. Kegelschnittbüschel von π , von deren vier Grundpunkten zwei in B_1, B_2 liegen, entsprechen Ebenenbüscheln des Raumes. Verf. leitet mit dieser Abbildung insbesondere Sätze über Kegelschnittbüschel her und betrachtet hierbei auch den Grenzfall, daß B_1 und B_2 zusammenfallen, was zu Krümmungskreis-konstruktionen von Kegelschnitten führt. Der Beweis eines Satzes von Sturm über Kegelschnittbüschel ergibt sich mühelos. Zum Schluß stellt Verf. zahlreiche Konstruktionsaufgaben, die sich mit den abgeleiteten Sätzen leicht erledigen lassen. Die Ausführungen des Verf. stellen ein hübsches Beispiel für „räumliche Deutungen“ in der Darstellenden Geometrie dar.

H. R. Müller.

Lenz, H.: *Die Kernstrahlen in der darstellenden Geometrie.* *Z. angew. Math. Mech.* 34, 296—297 (1954).

Krames, Josef: *Graphische Lösung der Hauptaufgabe der Luftphotogrammetrie im Sinne der Ausgleichsrechnung.* *Z. angew. Math. Mech.* 34, 254—261 (1954).

In dieser Abhandlung wird vom Verf. ein einfaches graphisches Verfahren für die Wiederherstellung der gegenseitigen Orientierung zweier aus verschiedenen Luftstandpunkten aufgenommenen Geländebilder (oder der mit ihnen verbundenen Zielstrahlbüschel) abgeleitet, ein Verfahren, welches sich auf die geometrische Theorie jener „gefährlichen Geländeflächen“ gründet, für welche diese Aufgabe in der Praxis nur eine ungenaue Bestimmung zuläßt.

M. Piazzolla Boloch.

Krames, J.: *Zur Geometrie der gegenseitigen Orientierung von Luftaufnahmen eines gebirgigen Geländes.* Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anzeiger 1954, 54—58 (1954).

Hazay, I.: Mathematische Grundlage zur einheitlichen Tabelle verschieden angeordneter, winkeltreuer Zylinderprojektionen. Acta techn. Acad. Sci. Hungar. 8, 369—386 u. russ., französ. und engl. Zusammenfassg. 387—388 (1954).

Die Berechnung rechtwinkliger ebener Koordinaten aus geographischen Koordinaten gestaltet sich an Hand der für die betreffende Landesvermessung maßgebenden Abbildungsgleichungen bekanntlich besonders einfach, wenn die in den Abbildungsgleichungen auftretenden Koeffizienten als Funktionen der geographischen Breite tabuliert vorliegen. Um bei den drei Projektionsstreifen der schiefachsigen winkeltreuen Zylinderprojektion Ungarns mit nur einer derartigen Tabelle auskommen zu können, transformiert Verf. die Grundgleichung der konformen Abbildung auf einen Meridian als Grundkreis. Da als Originalfläche nicht ein Ellipsoid sondern eine Kugel dient, ergeben sich Reihen, die für jede beliebig angeordnete winkeltreue Zylinderprojektion, bei der die beiden Koordinatenachsen Abbild eines größten Kugelkreises und des dazu lotrechten Meridians sind, die Aufstellung einer einheitlich benutzbaren Koeffiziententabelle ermöglichen. *W. Hofmann.*

Tárczy-Hornoch, A.: Über die Ausgleichung von Streckennetzen. Acta techn. Acad. Sci. Hungar. 8, 399—423 u. russ., französ. und engl. Zusammenfassg. 423—424 (1954).

Verf. gibt, gestützt auf die Arbeiten verschiedener Autoren, eine eingehende Darstellung der Methoden, die sich im Zuge der weiteren Vervollkommenung der elektrischen Entfernungsmessung für die Ausgleichung von Triangulierungsnetzen mit direkt gemessenen Seitenlängen bieten. Ein eigener Vorschlag, die recht komplizierten Bedingungsgleichungen mit Hilfe logarithmischer Tafeldifferenzen linear zu machen, wird durch ein vollständig durchgerechnetes Beispiel illustriert.

W. Hofmann.

Theoretische Physik.

Quantentheorie:

Morel-Viard: Les opérateurs α -correspondants en mécanique ondulatoire. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 992—994 (1954).

Deux „fonctions d'onde α -correspondantes“ ne diffèrent que par un facteur de phase $\exp i \chi$, $\chi = \chi(x, t)$. Définition corollaire des „opérateurs α -correspondants“. Application à la définition de l'impulsion et de l'énergie cinétique, compte tenu du principe de relativité galiléenne.

O. Costa de Beauregard.

Gould, R. N. and A. Cunliffe: An extended use of perturbation theory. Philos. Mag., VII. Ser. 45, 818—822 (1954).

Zur Auflösung von (inhomogenen) Randwertproblemen erster Art wird ein formaler Störungskalkül (unter Verwendung mehrerer Störungsparameter) benutzt und am Beispiel einer gewöhnlichen Differentialgleichung explizit durchgerechnet.

H. O. Cordes.

Abramowitz, Milton and H. A. Antosiewicz: Coulomb wave functions in the transition region. Phys. Review, II. Ser. 96, 75—77 (1954).

Es werden Entwicklungen der Funktionen F und G , welche bei der Lösung der Diracgleichungen mit Coulombpotential auftreten, angegeben, die Airy-Integrale enthalten. Dann untersuchen die Verff. die Konvergenz dieser Reihen und geben einen Konvergenzradius an.

P. Urban.

Abramowitz, Milton and Philip Rabinowitz: Evaluations of Coulomb wave functions along the transition line. Phys. Review, II. Ser. 96, 77—79 (1954).

Die Verff. geben asymptotische Darstellungen der regulären und irregulären Coulombwellenfunktionen und ihrer Ableitungen an. Die Ergebnisse werden in einer Tabelle übersichtlich zusammengestellt. Am Schlusse wird auch noch auf die Ermittlung höherer Ableitungen hingewiesen.

P. Urban.

Miller jr., S. C.: Normalization of WKB-type approximations. Phys. Review, II. Ser. **94**, 1345—1346 (1954).

Es wird eine Methode zur näherungsweise Normierung von WKB-Wellenfunktionen entwickelt. Die Methode gibt die Korrektur gegenüber dem Normierungsfaktor für ein bereits exakt gelöstes Problem mit nahe verwandtem Potential an.

W. Humbach.

Winter, Clasine van: The asymmetric rotator in quantum mechanics. Physica **20**, 274—292 (1954).

Im Falle eines symmetrischen Rotators kommutiert der Hamiltonoperator H mit der Komponente des Drehimpulses P_z , welche durch die Symmetrieachse des Rotators gegeben ist. Die Eigenfunktionen des Operators H erweisen sich als identisch mit den simultanen Eigenfunktionen von P^2 , P_z und P_x (P^2 Quadrat des Drehimpulses, P_z Drehimpuls um eine feste Achse). Im Falle eines unsymmetrischen Rotators kommutiert H mit keiner Komponente des Drehimpulses in einer festen Richtung des Rotators. In diesem Falle verwendet Verf. an Stelle der Eigenfunktionen Φ damit eng verwandte Funktionen q^2 , die gruppentheoretisch bestimmt sind. Die Säkulargleichung zerfällt dann in vier Faktoren entsprechend den vier Symmetrieklassen der Eigenfunktionen. Weiterhin werden gewisse algebraische Eigenschaften des Rotators behandelt, die für die Berechnung der Eigenwerte der Energie von Wichtigkeit sind. Die Lage der Energierterme wird graphisch dargestellt unter Verwendung von Tafeln, die man King, Hainer und Gross verdankt. Die Symmetrieklassifikation kann aus der Anordnung der Eigenfunktionen abgeleitet werden, was für praktische Anwendungen bedeutungsvoll ist. Schließlich werden noch die Auswahlregeln für die Dipolstrahlung angegeben.

M. Pinl.

Maslov, V. P.: Über das Verhalten gewisser quantenmechanischer Größen beim Grenzübergang. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 623—626 (1954) [Russisch].

Verf. betrachtet die Schrödingergleichung $(h^2/2m)y'' + [\lambda - u(x)]y = 0$ für ein Teilchen mit einem Freiheitsgrad und der stetigen potentiellen Energie $u(x)$, einer endlichen Anzahl von Maxima und Minima und der Randbedingung $u(+\infty) = u(-\infty) = \infty$. Das Spektrum der Differentialgleichung ist unter den getroffenen Einschränkungen ein reines Punktspektrum. Setzt man jedoch $h \rightarrow 0$, so ergibt sich an Stelle des Operators $-(h^2/2m)d^2/dx^2 + u(x)$ der Operator $u(x)$, dessen Spektrum kontinuierlich verläuft. Verf. behandelt jetzt diesen Übergang vom Punktspektrum zum kontinuierlichen Spektrum, wie dies im einfachen Falle $u(x) = x^2$ bereits von H. A. Kramers [vgl. Z. Phys. **39**, 828 (1926)] durchgeführt worden ist. Verf. gewinnt drei Sätze und damit das folgende Bild für das Verhalten der Eigenfunktionen und Eigenwerte des Operators $-(h^2/2m)d^2/dx^2 + u(x)$ bei $h \rightarrow 0$. Alle Eigenfunktionen und Eigenwerte dieses Operators können nach den einzelnen Minima („Einbuchtungen“) der potentiellen Energie $u(x)$ klassifiziert werden. Innerhalb jeder Einbuchtung kann man die Eigenwerte und Eigenfunktionen in zwei Klassen teilen, solche mit geradem Index n , die bei $h \rightarrow 0$ zur Bildung von Summen von δ -Funktionen führen und solche mit ungeradem Index n , die bei $h \rightarrow 0$ zur Bildung von Differenzen von δ -Funktionen führen. Der Operator kann bei kleinem h als der durch den Operator $-(h^2/2m)d^2/dx^2$ gestörte Operator der Multiplikation mit $u(x)$ betrachtet werden, indessen genügt die Störungstheorie nicht, um die Ergebnisse des Verf. zu gewinnen, der vornehmlich die Asymptotik eines Fundamentalsystems der Lösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung mit kleinem Parameter zur Beweisführung benutzt.

M. Pinl.

Moses, H. E.: Canonical transformation for an electron-positron field coupled to a time-independent electromagnetic field. II. Phys. Review, II. Ser. **95**, 237—242 (1954).

Als Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **50**, 223) wird die dort entwickelte Methode verwendet, um Erwartungswerte von Feldoperatoren und die S -Matrix zu diskutieren.

G. Källén.

Ling jr., Daniel S.: Expansion of wave packets. Phys. Review, II. Ser. **96**, 216—217 (1954).

Es wird gezeigt: Bilden die $\psi_f(r)$ ein Orthogonalsystem und ist $\psi_f(r) \sim e^{i\mathbf{f} \cdot \mathbf{r}}$, $\mathbf{f}_f(\theta, q) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$, so sind die Entwicklungskoeffizienten eines durch seine Schwerpunkte $\mathbf{r}_0, \mathbf{f}_0$ im Orts- und im Impulsraum charakterisierten Wellenpakets nach den ψ_f gleich den entsprechenden gewöhnlichen Fourierkoeffizienten.

F. Penzlin.

Hack, M. N.: Bound states and the formal theory of scattering. Phys. Review, II. Ser. **96**, 196—198 (1954).

Verf. beweist mit Hilfe der formalen Streutheorie die Äquivalenz der stationären und der zeitabhängigen Definition der S -Matrix, ohne dabei von einem adiabatischen

Einschalten Gebrauch zu machen. Voraussetzung ist nur, daß das Punktspektrum der gebundenen Zustände nicht in das kontinuierliche Spektrum hineinfällt. Zu dem Zweck wird zunächst eine formale Herleitung der Übergangswahrscheinlichkeiten für Wellenpakete gegeben, so daß auch kein zeitlicher Mittelungsprozeß nötig ist.

F. Penzlin.

Kikuta, Takashi: Superstationary variational method. Progress theor. Phys. **12**, 10—16 (1954).

Der Verf. gibt ein Variationsverfahren an, bei welchem die Ausgangs-Funktion selbst stationären Charakter besitzt. An Hand von Anwendungen dieses „Superstationären“ Variationsverfahrens auf Probleme gebundener Zustände und auf Streuprobleme (kontinuierliche Zustände) wird das Verfahren diskutiert und mit den bekannten Methoden von Hulthén und den numerisch ermittelten Werten verglichen.

P. Urban.

Schiff, L. I.: On an expression for the total cross section. Progress theor. Phys. **11**, 288—290 (1954).

Es wird ein bekannter Ausdruck für den totalen Streuquerschnitt (siehe etwa M. Lax, dies. Zbl. **36**, 279) auf Grund der Wellentheorie in einfacher Weise hergeleitet und der über den tatsächlichen Schatten hinausgehende „Restschatten“ diskutiert. Auf Grund der Unschärferelation gelingt es, diesen Restschatten qualitativ zu verstehen.

P. Urban.

Corinaldesi, E.: Construction of potentials from phase shift and binding energies of relativistic equations. Nuovo Cimento, Ser. IX **11**, 468—478 (1954).

Bei der praktischen Anwendung der von E. Guth und Th. Seixl entwickelten Theorie der Streuung von Nukleonen an Atomkernen handelt es sich darum, aus den experimentellen Daten mit Hilfe der theoretischen Formeln rückwärts Potentiale zu berechnen, die die experimentell gefundenen Streukurven hervorrufen können. In dieser Hinsicht wurden kürzlich innerhalb der üblichen Theorie, welche die Schrödingergleichung als Wellengleichung der Nukleonen zugrunde legt, große Fortschritte von R. Jost und W. Kohn (dies. Zbl. **47**, 224) erzielt. In der vorliegenden Arbeit wird die von den letztgenannten Autoren verwendete Methode auf die Klein-Gordonsche Wellengleichung übertragen und eine Verallgemeinerung für die Diracsche Wellengleichung in Aussicht gestellt.

Th. Seixl.

Kinoshita, Teichiro: Families of spinor fields. Phys. Review, II. Ser. **96**, 199—201 (1954).

Der Verf. zeigt, daß sich ein System von Spinorfeldern in mehrere Familien unterteilen läßt, wenn die Wechselwirkung zwischen diesen Feldern vorgeschrieben ist. Dies rührt daher, daß die Wechselwirkungsansätze den möglichen Vertauschungsrelationen gewisse zusätzliche Bedingungen auferlegen. Die in der Natur vorkommenden Fermionengruppen (Leptonengruppen, Nukleonengruppe) lassen sich in diese Familien in natürlicher Weise einordnen.

F. Cap.

Rayski, Jerzy: On a regular field theory. III. Acta phys. Polon. **13**, 95—114 (1954).

(Teil II, dies. Zbl. **55**, 246). Der erste Teil der vorliegenden Arbeit enthält eine sehr ausführliche und klare Diskussion des Zusammenhanges zwischen den verschiedenen formalen Lösungen der Operatorgleichungen einer Feldtheorie. Die Rechnungen sind so ausgeführt worden, daß sie sowohl für eine gewöhnliche, lokale Theorie wie für eine Theorie mit einem Formfaktor verwendet werden können. Als Beispiel wird dann in dem zweiten Teil eine nicht-lokale Quantenelektrodynamik mit einigen speziellen Formfaktoren diskutiert. Es wird gezeigt, daß gewisse, wohl-bekannte Singularitäten in erster nicht-trivialer Näherung der Störungstheorie mit Hilfe der Formfaktoren vermieden werden können.

G. Källén.

Rzewuski, Jan: Differential structure of nonlocal theories. I. Acta phys. Polon. **13**, 135—144 (1954).

It is shown that a (one dimensional) linear integro-differential equation is equivalent to an ordinary differential equation. In this way the (one dimensional) theory of non-local interaction is reduced to the local form. Under certain conditions about the kernel, the equation is reduced to the Sturm-Liouville type and canonical quantization is performed.

J. Rayski.

Hayashi, Chushiro: On field equations with non-local interaction. Progress theor. Phys. **11**, 226—227.

This note clarifies the reason of a controversy between a) several authors who claimed that it is possible to construct a unitary S-matrix in the non-local theory by using the fact that ingoing and outgoing waves should satisfy the (same) commutation relations for free fields, and b) some other authors who found that the resulting „S-matrix“ is not unitary when computed explicitly up to the fourth order of approximation. The reason of this discrepancy is due to the fact that the non-local field equations (in the form postulated by C. Bloch, and Kristensen & Møller) are not properly symmetrized. If, on the other hand, products of field quantities appearing in the integro-differential equations are symmetrized, and if one uses a symmetrical formfactor $\Phi(123) = \Phi(321)$ invariant with respect to reflections $\Phi(-1, -2, -3) = \Phi(1, 2, 3)$, then the discrepancy disappears.

J. Rayski.

Minardi, E.: Quantizzazione della massa e formalismo non locale. Nuovo Cimento, Ser. IX **11**, 694—696 (1954).

The generalized bilocal Schrödinger-Gordon or Dirac equation is separated into the usual (local) wave equation in terms of the „external“ variables of Yukawa, and an eigenequation for the mass parameter in terms of the „internal“ variables. The mass eigenequation is solved under a boundary condition: vanishing of the (internal) field quantity on a sphere with the radius equal to a fundamental length. An interesting mass spectrum is obtained.

J. Rayski.

Zumino, B.: Evaluation of the collision matrix for Dirac particles in an external potential. Phys. Review, II. Ser. **96**, 202—207 (1954).

Es wird eine Methode zur Auswertung der Stoßmatrix für ein quantisiertes Diracfeld in einem äußeren elektromagnetischen Feld angegeben, die sich an die enge Beziehung zwischen Positronentheorie und Einpartikel-Diractheorie anlehnt. Dabei bedient sich der Verf. eines Theorems von Baker und Hausdorff über Exponentialfunktionen von nicht-kommutierbaren Größen. Im Anhang wird das Verfahren an Hand einer reellen skalaren Feldtheorie, in Wechselwirkung mit einer gegebenen Quellenverteilung, demonstriert.

P. Urban.

Lipps, F. W. and H. A. Tolhoek: Polarization phenomena of electrons and photons. II. Results for Compton scattering. Physica **20**, 395—405 (1954).

(Part I, this Zbl. **55**, 218). Complete formulae for Compton scattering of polarized light by polarized electrons are given in a form which may be readily compared with experimental results on linearly or circularly polarized beams.

J. Rayski.

Fradkin, E. S.: Über die Renormierung in der Quantenelektrodynamik. Žurn. eksper. teor. Fiz. **26**, 751—754 (1954) [Russisch].

Ioffe, B. L.: Über die Divergenz einer Reihe der Störungstheorie in der Quantenelektrodynamik. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 437—438 (1954) [Russisch].

Der Verf. studiert ein Elektron in einem äußeren, homogenen Magnetfeld und bemerkt, daß die wohlbekannten Zusatzglieder in der Lagrangefunktion, die wegen der Löchertheorie auftreten, sich nicht in eine konvergente Potenzreihe in dem äußeren Feld entwickeln lassen, obgleich eine Lösung der Differentialgleichungen der Theorie existiert. Deshalb vermutet der Verf., daß eine ähnliche Situation in der vollständigeren Theorie mit einem quantisierten Strahlungsfeld vorhanden sein könnte. Ohne zu verneinen, daß diese Möglichkeit sehr wohl besteht,

will der Ref. aber betonen, daß die mathematische Struktur der zwei Theorien (d. h. die Theorie mit und ohne quantisiertem Strahlungsfeld) so verschieden sind, daß man aus der Existenz einer Lösung in der einfacheren Theorie (mit äußerem Feld) keine Schlüsse auf die Existenz von Lösungen in der komplizierteren Theorie mit quantisiertem Feld ziehen kann. *G. Källén.*

Kothari, L. S.: Riesz potential and the elimination of divergences from quantum electrodynamics. II. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 201—205 (1954).

[Teil I: Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 17—24 (1954)]. An Stelle der Greenschen Funktionen verwendet der Verf. die von M. Riesz z (vgl. dies. Zbl. **33**, 276) eingeführten Potentiale, die durch analytische Fortsetzung in der β -Ebene nach $\beta = 0$ auf die Greenschen Funktionen führen. Diese Fortsetzung wird jedoch erst an den Matrixelementen vorgenommen. Das hier durchgerechnete Beispiel der Photonselbstenergie führt auf das (nicht eichinvariante) Resultat von Wentzel [Phys. Review. II. Ser. **74**, 1070—1075 (1948)]. *F. Penzlin.*

Achiezer, A. I.: Die Ausstrahlung von Photonen bei Beugung an Teilchen mit dem Spin 1/2. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 651—654 (1954) [Russisch].

Die Ausdehnung einer Arbeit von Landau und Pomerančuk [Žurn. eksper. teor. Fiz. **24**, 505 (1953)] auf Teilchen mit Spin 1/2. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung an Spinorteilchen unter Aussendung eines Photons wird berechnet, wobei eine Art Huygenssches Prinzip verwendet wird. Eine Formel wird für kleine Streuwinkel, kleine Abstrahlungswinkel und große Teilchenenergien angegeben. Zum Landauschen Resultat tritt ein Spinfaktor hinzu. Die Winkelintegration läßt sich bis auf ein Integral durchführen. Das Resultat ist einer anschaulichen Deutung zugänglich. *P. Urban.*

Chew, Geoffrey F.: Renormalization of meson theory with a fixed extended source. Phys. Review, II. Ser. **94**, 1748—1754 (1954).

Die für eine kovariante lokale Feldtheorie von Dyson, Ward u. a. abgeleitete Methode der Massen- und Ladungsrenormierung wird auf den Fall angewendet, in welchem die Wechselwirkung nicht lokal ist. In den am Schluß auftretenden Renormalisierungsgleichungen werden die Nukleonselbstenergie und die ursprüngliche Kopplungskonstante vollständig eliminiert. Es werden Gründe angegeben, welche darauf hinweisen, daß die Ladungsrenormierung selbst bei nicht divergenter Theorie eine sehr empfindliche Methode darstellt. *P. Urban.*

Chew, Geoffrey F.: Method of approximation for the meson-nucleon problem when the interaction is fixed and extended. Phys. Review, II. Ser. **94**, 1755—1759 (1954).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (vgl. vorsteh. Referat) schlägt Verf. eine Methode zur Behandlung des Problems einer ausgedehnten Mesonenquelle vor. Dieses Verfahren ist ähnlich aber nicht identisch mit der Näherung nach Tamm-Dancoff. Als Anwendung des Verfahrens behandelt er noch abschließend das Pion-Nukleon-Streuproblem. *P. Urban.*

Tani, Smio: Reformulation of Brueckner-Watson method by means of canonical transformations. Progress theor. Phys. **12**, 104—105 (1954).

Yoshimura, Tetz: On the renormalization of Salpeter-Bethe kernel of meson-nucleon system in the state $T = 1/2$. Progress theor. Phys. **11**, 224—225 (1954).

Jean, Maurice: Théorie mésique pseudoscalaire et couplage intermédiaire. J. Phys. Radium **15**, 694—696 (1954).

Da die von Matthews und Salam (dies. Zbl. **46**, 218) nach der Methode der mittelstarken Kopplung von Tomonaga durchgeführten Rechnungen zwar den Nukleonenrückstoß erfassen, aber die Unterscheidung der Drehimpulse der Mesonen nicht ermöglichen, wendet Verf. die Methode von Tomogana auf die sich nach der Dysonsehen Transformation ergebende Hamiltonfunktion der pseudoskalaren Theorie an. Unter Beschränkung auf ein freies Nukleon vom Gesamtdrall 1/2 ergeben sich für die Abhängigkeit der reduzierten Energie dieses Zustandes von einem (im wesentlichen die Kopplungskonstante enthaltenden) Parameter b Kurven, die für kleine Energien in $|E| = 3b^2$, den Grenzfall der schwachen Kopplung und die für große Energien in $|E| = b^2 + 1$, den Grenzfall der starken Kopplung übergehen. *F. Cap.*

Askarjan, G. A.: Über den Einfluß der Pulsation der Mesonenhülle eines Nukleons auf die Wahrscheinlichkeit der Wechselwirkung von Teilchen. *Žurn. eksper. teor. Fiz.* **26**, 751(1954) [Russisch].

Sugie, Atsushi: The effect of the mass difference between charged and neutral pions on the nuclear force. *Progress theor. Phys.* **11**, 333–334 (1954).

Ogawa, Shuzo, Hisaichiro Okonogi and Sadao Ōneda: On the weak universal Boson-Fermion interaction. *Progress theor. Phys.* **11**, 330–332 (1954).

Hayakawa, Satio, Masaaki Kawaguchi and Shigeo Minami: Kinematical studies on pion-nucleon interactions. *Progress theor. Phys.* **11**, 332–333 (1954).

Ishida, Kin-ichi and Atsushi Takahashi: Pion-nucleon scattering by Tamm-Dancoff method. *Progress theor. Phys.* **11**, 611–613 (1954).

Itabashi, Kiyomi: On a covariant generalization of Tamm-Dancoff approximation for pion-nucleon scattering. *Progress theor. Phys.* **11**, 227–228 (1954).

Itabashi, Kiyomi: Renormalization in generalized Tamm-Dancoff approximation for pion-nucleon scattering. *Progress theor. Phys.* **11**, 228–230 (1954).

Taylor, J. G.: A covariant non-adiabatic equation for nucleon-pion scattering. *Nuovo Cimento*, **IX**, Ser. **12**, 148–149 (1954).

Chew, Geoffrey F.: Improved calculation of the P -wave pion-nucleon scattering phase shifts in the cut-off theory. *Phys. Review*, **II**, Ser. **95**, 285–286 (1954).

Fukuda, Nobuyuki, Shigeo Goto, Susumu Okubo and Katurō Sawada: Theoretical analysis of pion-nucleon scattering. *Progress theor. Phys.* **12**, 79–93 (1954).

Die Verf. leiten im Rahmen der PS - ps -Theorie nach einer Foldy-Transformation die Phasen für die Pion-Nukleon-Streuung ab. S -, P - und D -Wellenstreuung werden ausführlich diskutiert, und das magnetische Nukleonmoment wird in seiner Abhängigkeit von der Kopplungskonstanten besprochen. Das Mesonenspektrum wird bei einer bestimmten Frequenz abgeschnitten. Auf die Bedeutung von Strahlungskorrekturen wird hingewiesen. *F. Cap.*

Gammel, John L.: Elastic scattering of pions by nucleons and pion production in nucleon-nucleon collisions. *Phys. Review*, **II**, Ser. **95**, 209–216 (1954).

Der Verf. löst die von Chew mit Hilfe der zweiten Näherung der Tamm-Dancoff-Methode gefundene Integralgleichung für die Pion-Nukleon-Streuung durch numerische Integration und vergleicht die so gefundenen Phasen mit den von Chew mit Hilfe von Näherungsmethoden gefundenen Werten. Auch die Genauigkeit der von Watson u. a. gefundenen Näherungslösung einer sehr ähnlichen Integralgleichung für die Erzeugung von Pionen in Nukleon-Nukleon-Stößen wird diskutiert. Es zeigt sich, daß zwar die Phasen von Chew eine ganz gute Näherung darstellen, daß aber eine Entscheidung über die Chewsche Pion-Nukleon-Wechselwirkung erst nach Berechnung der Tamm-Dancoff-Korrekturen vierter Ordnung gefällt werden kann. *F. Cap.*

Minami, Shigeo: An invariance theorem for cross sections of meson-nucleon scattering. *Progress theor. Phys.* **11**, 213–218 (1954).

Der Verf. macht darauf aufmerksam, daß die Phasenanalyse von Pion-Nukleon-Streudaten mit einiger Vorsicht vorgenommen werden muß, da stets zwei Lösungen möglich seien. Diese Zweideutigkeit sei von ganz fundamentalem Charakter und hänge mit gewissen Eigenschaften der Kugelfunktionen und der Spineigenfunktionen zusammen; sie sei bei der numerischen Analyse von Fermi und Yang übersehen worden. Durch die Untersuchung der Energieabhängigkeit der Phasen sei es aber eventuell möglich, zwischen diesen beiden Lösungen zu unterscheiden. *F. Cap.*

Aitken, A., H. Mahmoud, E. M. Henley, M. A. Ruderman and K. M. Watson: Some possible relationships between π -meson nucleon scattering and π -meson production in nucleon-nucleon collisions. *Phys. Review*, **II**, Ser. **93**, 1349–1355 (1954).

Bei Nukleon-Nukleon-Stößen, die ein Pion erzeugen, kommt es vor, daß das erzeugte Pion mit einem der beiden Nukleonen in Wechselwirkung tritt. Diese (starke) Wechselwirkung, die von der Pion-Nukleon-Streuung bekannt ist, hat auf den Pionerzeugungsprozeß Einfluß: Die Verff. zeigen durch ausführliche Rechnungen, daß z. B. der Wirkungsquerschnitt für den Prozeß $p + p \rightarrow \pi^-$ viel größer ist als der für den Prozeß $n + p \rightarrow \pi^+$. Es wird so der Einfluß des Zustandes (3,2, 3,2) [isotoper und gewöhnlicher Spin] des Pion-Nukleon-Systems auf die Erzeugung von Nukleopionen untersucht. Die Rechnungen schließen sich an Chew [Phys. Review, II. Ser. 89, 591 (1953)] und an die Tamm-Dancoff-Methode von Brueckner und Watson (dies. Zbl. 51, 213) an.

F. Cap.

Akiba, Tomoya and Katuro Sawada: On the effective Hamiltonian for pseudo-scalar meson with pseudoscalar coupling with nucleon. Progress theor. Phys. 12, 94—98 (1954).

Wendet man kanonische Transformationen auf die Hamiltonfunktion der PS - ps -Theorie an, so zeigt sich, daß die Transformation von Tani und Foldy die zweckmäßigste ist vom Standpunkt der Variationsrechnung. Die so erhaltene Hamiltonfunktion wurde nun von den Verff. umgeordnet und der Massenrenormalisierung sowie einem Abschneideverfahren im Impulsraum unterzogen. Es zeigt sich, daß dieser Hamiltonoperator für die S -Phase der Pion-Nukleon-Streuung verantwortlich gemacht werden könnte. Die großen Unterschiede zum Ergebnis der Störungsrechnung werden diskutiert.

F. Cap.

Thirring, Walter: Zur Meson-Meson-Wechselwirkung. Z. Naturforsch. 9a, 804—805 (1954).

Cap, Ferdinand: Nonlinear meson theory of nuclear forces. Phys. Review, II. Ser. 95, 287—288 (1954).

Bocchieri, P. and G. Feldman: Double pion production and the nature of pseudo-scalar coupling. Philos. Mag., VII. Ser. 45, 1145—1153 (1954).

Die Verff. führen im Rahmen der pseudoskalaren ladungssymmetrischen Mesonentheorie Rechnungen zur einfachen und doppelten Pionerzeugung durch Nukleonenstöße bei der Energie von 1000 MeV durch. Es zeigt sich, daß die Matrix γ_5 die doppelte Erzeugung nicht begünstigt und daß sehr große Kopplungskonstanten notwendig wären, um eine (experimentell wahrscheinliche) starke Zweifacherzeugung zu erklären. Wichtig scheint die von den Verff. ausgesprochene Warnung zu sein, man könne nicht einfach behaupten, daß eine Reaktion mit einer geraden Anzahl von Vertex-parts vor einer mit einer ungeraden Anzahl durch die γ_5 -Kopplung begünstigt wird.

F. Cap.

Temkin, A. Ja.: Verwandlung zweier Photonen in ein π^0 -Meson und Bildung von π^0 -Mesonen beim Compton-Effekt. Žurn. eksper. teor. Fiz. 26, 645—648 (1954) [Russisch].

Galanin, A. D. und V. G. Soloŭev: Strahlungskorrektur für die Lebensdauer des π^0 -Meson. Žurn. eksper. teor. Fiz. 27, 112—114 (1954) [Russisch].

Havas, Peter: Multipole singularities of classical scalar and pseudoscalar meson fields. Phys. Review, II. Ser. 93, 1400—1411 (1954).

Die allgemeine Form der Bewegungsgleichungen eines Teilchens, das Multipol-Singularitäten eines neutralen skalaren oder pseudoskalaren Mesonfeldes besitzt, wurde von Harish-Chandra auf Grund der Methode von Dirac gefunden. In der vorliegenden Arbeit wird die allgemeine Form des Multipol-Moments aufgestellt, die mit diesen Gleichungen vereinbar ist, unter der Annahme, daß der Spin und die 2^n -Pol-Momente des Teilchens von konstantem Absolutbetrage sind und im Ruhesystem des Teilchens nur räumliche Komponenten haben. Danach wird die allgemeine Form der Bewegungsgleichungen und des mit ihnen vereinbaren Multipol-Moments aufgestellt für punktförmige Teilchen, die mit einem ladungssymmetrischen skalaren oder pseudoskalaren Felde in Wechselwirkung stehen. Es zeigt sich, daß 2^n -Pol-Momente verschiedener Arten für beliebiges n möglich sind, und daß ein Teilchen eine beliebige Kombination solcher Momente tragen kann.

Zusammenfassung des Autors.

Flint, H. T. and E. M. Williamson: A theory of the electron. *Nuovo Cimento*, Ser. IX **11**, 568—569 (1954).

Gatto, R.: Sulla indipendenza dalla carica nella produzione di particelle Λ . *Nuovo Cimento*, Ser. IX **11**, 445—457 (1954).

Verf. untersucht die Konsequenzen, die sich aus der Ladungsunabhängigkeits-hypothese für die Produktion von Λ -Teilchen ergeben. Es zeigt sich, daß sich für die Wirkungsquerschnitte der $\Lambda^0, \Lambda^+, \Lambda^-$ -Produktion durch Pion-Nukleon-Stöße gewisse Relationen ergeben. — je nach der Annahme über den isotonen Spin der Λ . Diese Relationen sollten der experimentellen Überprüfung zugänglich sein, doch zeigt eine Sichtung bisheriger Daten, daß sich gemäß deren derzeitiger Deutung Schwierigkeiten für die Annahme der Ladungsunabhängigkeit ergeben. *F. Cap.*

Kaempffer, F. A.: On a two-fluid model of matter. *Canadian J. Phys.* **32**, 430—434 (1954).

Verf. formuliert die Theorie des komplexen, skalaren Mesonfeldes so, daß sie in Analogie zur Quantenhydrodynamik quantisiert werden kann. Der Hamilton-operator wird für einen Spezialfall diskutiert. *G. Höhler.*

Enatsu, Hiroshi, Hiroichi Hasegawa and Pong Yul Pac: Theory of unstable heavy particles. *Phys. Review*, II. Ser. **95**, 263—270 (1954).

Ginsburg, V. L. und V. P. Silin: Einige Bemerkungen über die relativistischen Wellengleichungen mit Massenspektrum. *Žurn. eksper. teor. Fiz.* **27**, 116—118 (1954) [Russisch].

Finkelstein, R., S. G. Gasiorowicz and P. Kaus: Description of a composite particle in terms of a functional potential well. *Canadian J. Phys.* **32**, 480—491 (1954).

Les AA. étudient les caractères du corpuscule représenté par une fonction d'onde covariante solution d'une équation de la forme $[D_1 + D_2 + gF(\psi)] \Psi_{\alpha a}(x^{(1)}, x^{(2)}) = 0$, où $D_k = \gamma_{\mu}^k p_{\mu}^k - i m^k$, ($k = 1, 2$) est un opérateur de Dirac. $\Psi_{\alpha a}(x^{(1)}, x^{(2)})$ est une fonction des huit coordonnées $x_{\mu}^{(1)}, x_{\mu}^{(2)}$ et se transforme comme un spineur de Dirac par rapport aux deux indices spinoriels α, a . $F(\psi)$ est un invariant fonctionnel de ψ ne dépendant que de $x_{\mu}^{(1)} - x_{\mu}^{(2)}$. Cette équation a déjà été étudiée par M. Louis de Broglie (*Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci.: Particules fondamentales et noyaux*, Paris 1950, p. 11—25). La discussion de solutions particulières dans le système propre conduit à un problème de valeurs et fonctions propres résolu par intégration numérique. *G. Petiau.*

Czyzak, S. J.: Interpretation of the variable mass in Wessel's theory of the electron. *Amer. J. Phys.* **22**, 335—340 (1954).

Kernphysik:

Brueckner, K. A., C. A. Levinson and H. M. Mahmoud: Two-body forces and nuclear saturation. I. Central forces. *Phys. Review*, II. Ser. **95**, 217—228 (1954).

Die Frage nach der Absättigung der Kernkräfte wird auf der Grundlage der Zweikörperkräfte behandelt. Dabei wird von den Zweikörperpotentialen der pseudoskalaren Mesontheorie Gebrauch gemacht, wo die Mehrkörperkräfte in erster Näherung verschwinden. Eine spezielle Näherungsrechnung behandelt die Bewegung der Nukleonen einmal als kohärent und einmal als inkohärent, wobei die letztere Bewegung als kleine Störung angesehen wird. Auf diese Weise lassen sich auch kompliziertere Potentiale handhaben und die Unzulänglichkeit der üblichen Variationsmethode vermeiden. Mit dieser Methode werden die potentielle und kinetische Energie der Nukleonen mit den zu dem betrachteten Potential gehörenden Streuamplituden verknüpft, und es läßt sich zeigen, daß ein reines Zweikörperpotential zur Absättigung führen kann unter Bedingungen, die den Streuexperimenten bei niederen und mittleren Energien nicht widersprechen. *R. Hagedorn.*

Florian, A., P. Urban und K. Wildermuth: Zu den höher angeregten Zuständen leichter Kerne. *Z. Naturforsch.* **9a**, 748—757 (1954).

Mit Hilfe einfacher, aus Einteilchenfunktionen des Oszillatorpotentials kombinierten Hartreeschen Näherungsfunktionen und des Ritzschen Variationsverfahrens werden der Grundzustand und der 1. angeregte Zustand von O^{16} sowie der Grundzustand von N^{16} berechnet. Dabei wird die Variation der Parameter in verschiedener

Weise durchgeführt und gezeigt, daß nur dann qualitative vernünftige Energieniveaus herauskommen, wenn man den Kernradius vorgibt und nicht mitvariiert. Das wird als Hinweis auf die Wichtigkeit der Mehrkörperkräfte gedeutet. Mit dieser Einschränkung ergibt sich immerhin für die drei Niveaus die richtige Reihenfolge und Abweichungen von den experimentellen Werten um 10 bis 20%. *R. Hagedorn.*

Wild, Wolfgang und Karl Wildermuth: Kernbindungsenergien und Zweikörperkräfte. *Z. Naturforsch.* **9a**, 799—800 (1954).

Gatha, K. M., G. Z. Shah and N. J. Patel: Approximate nuclear density distributions in light elements. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 773—779 (1954).

Die Verf. finden, daß die experimentellen Winkelverteilungen für die Streuung von Nukleonen an leichten Elementen durch eine charakteristische Verteilung gut dargestellt werden können. Dabei wird eine entsprechende Transformation der Parameter verwendet und noch gezeigt, daß im Gültigkeitsbereich der ersten Bornschen Näherung die radiale Verteilungsmethode benutzt werden kann, um die entsprechende charakteristische Kerndichteverteilung für leichte Elemente zu bestimmen. *P. Urban.*

Smordinskij, Ja. A.: Die Polarisation bei Streuung von Protonen an Protonen. *Žurn. eksper. teor. Fiz.* **27**, 123—124 (1954) [Russisch].

Basu, D.: Pseudoscalar interaction and proton-proton scattering. *Indian J. Phys.* **28**, 201—204 (1954).

Der Verf. zeigt, daß bei Kernwechselwirkungen das Auftreten von Nahwirkungspotentialen vom Deltatypus die Streuung isotrop macht, wie es zur Erklärung der p - p -Streuung bei hohen Energien erforderlich ist. Dieses Potential kann als Analogon zum „hard core“-Potential angesehen werden, welches Jastrow für den Singulettzustand allein angenommen hat. *P. Urban.*

Branden, B. H. and J. S. C. McKee: The elastic scattering of neutrons by alpha particles. *Philos. Mag., VII. Ser.* **45**, 869—880 (1954).

Die Phasenänderungen bei der Streuung von Neutronen an Alphateilchen werden mit Hilfe von Variationsmethoden berechnet. Dabei wird in dem Wechselwirkungspotential zweier Nukleonen die Spin-Bahn-Kopplung berücksichtigt und das nichtzentralsymmetrische Tensorpotential durch ein äquivalentes zentralsymmetrisches Potential ersetzt. Detaillierte numerische Rechnungen werden ausgeführt für die Phasenänderungen der Streuwellen mit verschwindendem Drehimpuls ($l = 0$; S -Wellen) bei Energien bis 7 MeV, wobei in dem Zweinukleonenpotential gewöhnliche, Majorana-, Heisenberg- und Serberkräfte verwendet werden, und die Spin-Bahn-Wechselwirkung (für $l = 0$) verschwindet. Ein Vergleich mit den experimentellen Daten weist auf das Vorhandensein von Kräften vom Heisenberg-Majorana-Typus als für die Wechselwirkung zweier Nukleonen verantwortlich hin. *Th. Seel.*

Kikuta, Takashi: A variation principle in deuteron problem. *Progress theor. Phys.* **11**, 493—494 (1954).

Sato, Iwao and Kiyomi Itabashi: Electromagnetic properties of deuteron. *Progress theor. Phys.* **12**, 100—102 (1954).

Robinson, W. J.: A mixture of central, tensor, and two-particle spin-orbit interactions for N^4 and D^2 . *Phys. Review, II. Ser.* **93**, 1296—1297 (1954).

Florian, A. und P. Urban: Matricelemente und Integrale für das Schalenmodell der leichten Kerne. *Acta phys. Austr.* **8**, 338—345 (1954).

Für leichte Kerne werden die Zustände durch kombinierte Slaterdeterminanten beschrieben, deren Elemente die aus einem Oszillatorpotential folgenden Einteilchenfunktionen sind. In dieser Näherung werden Matricelemente der Energie (ohne kinetische) ausgerechnet (Ritzsches Verfahren) wobei der Hamiltonoperator in Wigner-, Heisenberg-, Bartlett-, und Majoranaanteil sowie Spin-Bahn-Anteil aufgespalten und die Matricelemente für jeden einzeln berechnet werden. Für die radiale Abhängigkeit der Kernkräfte wird Gaußsches Potential angenommen. Berechnet werden die Elemente für abgeschlossene $1s$ - sowie $(1s$ und $2p)$ -Schale, ferner für die Wechselwirkung einzelner Nukleonen mit abgeschlossenen Schalen. Schließlich wird noch eine Reihe von Integralen zusammengestellt, die bei der Berechnung solcher Matricelemente auftreten. Im Anhang werden die normierten Einteilchenwellenfunktionen für jj -Kopplung in den drei untersten Schalen des Oszillatorpotentials explizit angegeben. *R. Hagedorn.*

Lang, J. M. B. and K. J. Le Couteur: Statistics of nuclear levels. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 586—600 (1954).

Die Termlichkeiten nicht zu leichter Kerne sind über statistisch-thermodynamische Beziehungen in einfacher Weise mit der Anregungsenergie und der Kern„temperatur“ verknüpft (wobei letztere hier nur statistisch definiert werden kann). Die Verf. tragen eine große Menge experimentellen Materials zusammen, das im wesentlichen unter den Stichworten Kernverdampfung (relativ hohe Anregung) und Neutroneneinfang (Anregung ~ 8 MeV) zusammengefaßt werden kann, und vergleichen mit den theoretischen Formeln, die man aus dem Fermigasmodell und aus Fermigasmodell mit gleichzeitiger Anregung von Oberflächenwellen erhält, wobei im letzten Fall beide Energien einfach addiert werden. Dabei gewinnt das zweite Modell mit knappem Vorsprung (wie übrigens seit den Erfolgen des kollektiven Kernmodells (A. Bohr und B. R. Mottelson, dies. Zbl. **51**, 443; Hill und Wheeler, dies. Zbl. **50**, 440) kaum anders zu erwarten war).

R. Hagedorn.

Vajsman, I. A.: Über Berechnungen der magnetischen Kernmomente auf Grund einer j - j -Bindung zwischen Protonen und Neutronen. Žurn. eksper. teor. Fiz. **26**, 754—756 (1954) [Russisch].

Ito, Takashi, Yukito Tanabe and Masataka Mizushima: Line width of rotational spectra of some symmetric top molecules due to nuclear quadrupole moments. Phys. Review, II. Ser. **93**, 1242—1248 (1954).

Enthalt ein Molekül, das die Eigenschaften des symmetrischen Kreisel hat, mehrere Kerne mit Quadrupolmomenten und mit großem Drehimpuls, so kann im allgemeinen die HFS nicht mehr aufgelöst werden. In der Arbeit wird ein Ergebnis von Van Vleck verwendet, wonach die Linienbreite der unaufgelösten Struktur ein unmittelbares Maß für die Quadrupolkopplungskonstante ist. Es handelt sich im wesentlichen um die Auswertung der Van Vleckschen Methode mittels der Darstellungstheorie.

W. Humbach.

Woesté, K.: Bindungsenergie und Einteilchen-Modell der Atomkerne. Z. Phys. **137**, 228—237 (1954).

Beim Einbau eines weiteren Nukleons in einen Kern, den man sich als Fermigas vorstellt, wird dieses Nukleon auf das niedrigste noch freie Niveau gesetzt und man wird als Bindungsenergie in diesem Modell den Abstand dieses Niveaus vom Rand des Potentialtopfes ansehen. Dieses Bild führt nicht zu quantitativ richtigen Aussagen. Im Anschluß an diese Tatsache wird untersucht, welchen Einfluß die Änderung des Kernvolumens auf die Niveaus hat, und festgestellt, daß durch die geringfügige Änderung des Niveaus insgesamt eine Energieänderung auftritt, die im allgemeinen größer ist als der Abstand der Fermikante vom Potentialtopfrand. — Weiter ergibt sich die Möglichkeit, da das Kernvolumen der Zahl der Fermigaspartikel proportional ist, aber natürlich die Fermikante von der Nukleonenzahl auch noch direkt (außer über das Volumen) abhängt, daß die Fermikante den Potentialrand erreicht, wodurch der Einbau weiterer Nukleonen unmöglich wird. Die Bedingungen hierfür werden diskutiert, liefern aber Stabilitätsgrenzen, die schon praktisch nicht mehr zur Wirkung kommen, da sie im β - bzw. α -instabilen Gebiet verlaufen.

R. Hagedorn.

Rabi, I. I., N. F. Ramsey and J. Schwinger: Use of rotating coordinates in magnetic resonance problems. Reviews modern Phys. **26**, 167—171 (1954).

Verwendet man ein Koordinatensystem, das mit dem im Magnetfeld präzedierenden Atomkern mitrotiert, so werden die Bewegungsgleichungen klassisch und quantenmechanisch vereinfacht. Die an sich bekannte Methode und ihre wesentlichen Eigenschaften werden sehr klar herausgearbeitet.

W. Humbach.

Jean, Maurice et Jacques Prentki: Sur l'excitation électromagnétique des noyaux par des particules chargées. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2290—2292 (1954).

In dieser kurzen Notiz werden die Multipolentwicklung der Wechselwirkung $\int j \mathcal{A} d\tau$ und die auf halbklassische Weise berechneten Anregungsquerschnitte für magnetische Anregung in Abhängigkeit von der Multipolordnung angegeben. Keine expliziten Rechnungen.

R. Hagedorn.

Fairbairn, W. M.: The D-D reaction. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 990—995 (1954).

Verf. untersucht die Reaktionen $H^2(d, p) H^3$ und $H^2(d, n) He^3$ unter der Voraussetzung, daß sie als stripping-Prozeß ablaufen. Elektrostatische Kräfte werden nicht

berücksichtigt. Die Winkelverteilung der Protonen aus der ersten Reaktion und die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes in Vorwärtsrichtung von der Energie des eingeschossenen Deuterons werden benutzt, um einen Vergleich zwischen den theoretischen Ergebnissen und den Beobachtungen durchzuführen. Man schließt, daß die Reaktionen zum Teil über den stripping-Prozeß ablaufen. Dieser wird vorherrschend bei Energien oberhalb 5 MeV.

K.-H. Höcker.

Grant, I. P.: Theory of (d, p) and (d, n) reactions. I. General theory ignoring Coulomb effects. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 981—989 (1954).

Man versucht, die Differenzen in den verschiedenen Theorien, die für diese Reaktion entwickelt sind, aufzuklären. Daher wird der Wirkungsquerschnitt für den (dp) -Prozeß mit Hilfe Greenscher Funktionen berechnet. Die Wechselwirkung des wegfliegenden Teilchens mit dem Kern wird in Rechnung gestellt, geschlossene Ausdrücke lassen sich für ein streuendes Oszillatorpotential angeben. Den Ergebnissen werden Konsequenzen aus der Behandlung des Problems mit Hilfe des Verbundkerns gegenübergestellt. Die wichtige Berücksichtigung der Coulombkräfte soll in Teil II erfolgen.

K.-H. Höcker.

Yoccoz, J.: Coulomb effects in stripping reactions. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 813—820 (1954).

Man zeigt für leichte Kerne, daß bei geringen Energien des einfallenden Deuterons der Einfluß des Coulomb-Potentials gering ist. Er bringt eine Verkleinerung des Wirkungsquerschnittes und eine etwas ausgeglichene Winkelverteilung. Er trägt zur Polarisation der Spins bei.

K.-H. Höcker.

Rose, M. E.: Spherical tensors in physics. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 239—247 (1954).

Es werden irreduzible Tensoren in Kugelkoordinatendarstellung mit Hilfe der Clebsch-Gordon-Koeffizienten definiert und ihre Eigenschaften besprochen. Es wird gezeigt, daß die Verwendung solcher Tensoren besonders in der Anwendung auf physikalische Probleme, in denen sich Partikel oder Strahlungsquanten in definierten Drehimpulszuständen befinden, zu eleganten und einfachen Ausdrücken führt. Als Beispiel für die Verwendung solcher Tensoren wird kurz auf die Theorie des β -Zerfalls, der γ -Emission, der Winkelkorrelation und der statischen Wechselwirkung von Multipolfeldern mit Spinsystemen oder Feldern eingegangen.

B. Stech.

Beresteckij, V. B.: Die Winkelverteilung der von polarisierten Nukleonen gebildeten π -Mesonen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 421—423 (1954) [Russisch].

Die gemessene Winkelverteilung von π^+ -Mesonen, die sich beim Zusammenstoß von Protonen mit Protonen bilden, zeigt, daß die S - und P -Zustände der Mesonen bei kleinen Energien überwiegen. Der Verf. zeigt nun, daß die Winkelverteilung der von polarisierten Nukleonen gebildeten Pionen einen wesentlichen $S - P$ -Interferenzeffekt enthält, der zur charakteristischen azimutalen Asymmetrie führt.

F. Cap.

Satchler, G. R.: Radiative transitions in $j-j$ -coupling. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 1024—1025 (1954).

Wick, G. C.: The scattering of neutrons by systems containing light nuclei. Phys. Review, II. Ser. **94**, 1228—1242 (1954).

Der allgemeine Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt bei der Streuung langsamer Neutronen an Molekülen wird derart umgeformt, daß es möglich ist, die Annahme zu berücksichtigen, daß die Stoßdauer klein ist verglichen mit den verschiedenen Eigenperioden des Moleküls. Dadurch werden frühere Resultate von G. Placzek (dies. Zbl. **46**, 227) auch für den Fall anwendbar, daß die Moleküle aus Kernen bestehen, deren Masse mit der Neutronenmasse vergleichbar ist.

Th. Seel.

Hochberg, S., H. S. W. Massey and L. H. Underhill: The scattering of nucleons by alpha particles — the s-phases. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 957–966 (1954).

Die Verf. berechnen die s-Phasenverschiebungen für die Streuung von Neutronen und Protonen an Alphapartikeln im Energiebereich von 0 bis 4 MeV. Dabei wird eine zentrale Wechselwirkung von Gaußscher Form vorausgesetzt, deren Konstanten, mit der Bindungsenergie des Deuterons und Alphapartikels verträglich, angenommen werden. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist als gut zu bezeichnen.

P. Urban.

Kolos, Włodzimierz: The influence of hindered rotation on the scattering of slow neutrons by bound protons. *Acta phys. Polon.* **13**, 67–75 (1954).

Solange die Energie eines einfallenden Neutrons klein ist gegenüber der Schwingungsenergie eines in einem Molekül gebundenen Protons, kann das Proton als frei betrachtet werden und man erhält denselben Wirkungsquerschnitt wie für die Streuung von Neutronen an freien Protonen. E. Fermi (dies. Zbl. **15**, 90) hat als erster den Einfluß der Schwingungsenergie des gebundenen Protons auf den Wirkungsquerschnitt bei der Streuung von Neutronen an Protonen berechnet, indem er das Wechselwirkungspotential in Form einer δ -Funktion ansetzte und sich auf die erste Näherung beim Bornschen Näherungsverfahren beschränkte. Eine genauere Berechnung des gleichen Problems durch G. Breit (dies. Zbl. **34**, 280) u. a. auf Grund einer Integralgleichungsmethode bestätigte im wesentlichen das Fermische Ergebnis, da sich nur kleine Korrekturen von der Größenordnung 0,3% als Rechnungsergebnis ergaben. R. G. Sachs und E. Teller (dies. Zbl. **26**, 185) berücksichtigten auch die Rotationsniveaus der streuenden Moleküle, indem sie annahmen, daß die Energie des einfallenden Neutrons groß sei gegenüber den Energiedifferenzen der Rotationsniveaus. Für den Streuquerschnitt erhielten sie im Grenzfall sehr kleiner Neutronenenergien ein sehr einfaches Resultat, welches sich aber experimentell nur bei ganz einfach gebauten Molekülen (H_2 , H_2O) als korrekt erwies. Bei komplizierteren Molekülen (z. B. Methylalkohol H_2OH) muß man, um mit dem Experiment in Übereinstimmung zu kommen, nach dem Verf. einen weiteren Freiheitsgrad des Moleküls in Betracht ziehen, und zwar die Rotationsmöglichkeiten um die C—O-Achse des Methylalkoholmoleküls. Zur Abschätzung des Effekts wird der Fermische Rechnungsgang verwendet. Es zeigt sich in Einklang mit dem Experiment eine Abhängigkeit des Streuquerschnitts von der Energie des einfallenden Neutrons und von der thermischen Energie des streuenden Moleküls.

Th. Seel.

Tamura, Taro: On the neutron He^4 scattering. *Progress theor. Phys.* **11**, 335–336 (1954).

Smith, J. H.: Nuclear scattering of high-energy electrons. *Phys. Review*, **II**, Ser. **95**, 271–276 (1954).

Der Verf. berechnet mit Hilfe der Bornschen Methode Matrixelemente für die elastische und unelastische Streuung von hochenergetischen Elektronen an Kernen. Es werden Kurven und einfache Beziehungen angegeben, welche die Abhängigkeit der Streuamplituden von den charakteristischen Kerngrößen zum Ausdruck bringen. Die Untersuchungen gelten nur für sehr leichte Kerne, es wird aber eine Erweiterung der Methode auf schwere Kerne in Aussicht gestellt.

P. Urban.

Parzen, G. and T. Wainwright: Relativistic Coulomb scattering of electrons and positrons. *Phys. Review*, **II**, Ser. **96**, 188–189 (1954).

Die Verf. geben die numerischen Tabellen für die relativistische Coulombstreuung von Elektronen und Positronen an einem Kern der Ladung Z durch eine analytische Funktion wieder. Die Genauigkeit der letzteren entspricht jener der anfangs erwähnten Tabellen.

P. Urban.

Biswas, S. N.: On Born's approximation and its connection with covariant perturbation theory. *Indian J. Phys.* **28**, 119–128 (1954).

Der Verf. behandelt den Zusammenhang zwischen der gewöhnlichen Störungsrechnung nach Born und der neueren kovarianten Methode von Feynman und Dyson an Hand der Streuung schneller Elektronen in einem statischen Feld.

P. Urban.

Falk-Vairant, Paul: Contribution à l'étude des schémas de désintégration de quelques émetteurs α . *Ann. de Physique*, **XII**, Sér. **9**, 524–581 (1954).

Fowler, G. N.: Note on the relation between certain forbidden beta transitions and the nuclear spin orbit interaction. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 1005—1009 (1954).

Redlich, Martin G. and Eugene P. Wigner: A β -decay matrix element for a deformed core model. *Phys. Review, II. Ser.* **95**, 122—126 (1954).

Von den A Teilchen eines Atomkernes mögen $A - 1$ einen geschlossenen Rumpf darstellen, in dessen Feld sich das A -te Teilchen bewegt. Zwei verschieden hoch angeregte Kernzustände werden durch verschiedene Asymmetrie des Rumpfes dargestellt (starke Kopplung der Einteilchenfunktion an die Form der Rumpfoberfläche). Die Matrixelemente dieses Modells für den β -Zerfall werden zunächst mittels der Darstellungstheorie der Symmetriegruppen allgemein und dann in einem vereinfachten Beispiel explizit berechnet.

W. Humbach.

Zweifel, P. F.: Second-order corrections to beta spectra. *Phys. Review, II. Ser.* **95**, 112 (1954).

Zweifel, P. F. and H. Hurwitz jr.: Transformation of scattering cross sections. *J. appl. Phys.* **25**, 1241—1245 (1954).

Es wird eine einfache Umrechnung der Entwicklungskoeffizienten nach Legendreschen Polynomen eines Streuungsquerschnittes von dem Labor- in das Schwerpunktsystem angegeben. Die entsprechende Transformationsmatrix wird durch Annäherungswerte dargestellt und diskutiert, wie dieser Formalismus sich auf praktische Transportprobleme anwenden läßt. Es werden für die Streuung von Neutronen an Sauerstoff der Streuwinkel im Laborsystem und der mittlere logarithmische Energieverlust bestimmt.

R. Schulten.

Vineyard, George H.: Multiple scattering of neutrons. *Phys. Review, II. Ser.* **96**, 93—89 (1954).

Es wird die elastische Mehrfachstreuung von Neutronen an amorphem Material oder Kristallpuder berechnet, bei dem keine Interferenz zwischen den verschiedenen Streuzentren berücksichtigt zu werden braucht. Die Streuung zweiter Ordnung wird für eine planparallele Streuschicht für bestimmte Winkel unter Annahme einer „quasiisotropen“ Streuung berechnet. Kriterien zur Abschätzung der Güte dieser Näherung werden angegeben. Es wird darauf hingewiesen, daß eine derartige Streuung unter Erfassung aller Ordnungen nach Rechnungen und Tabellierungen von Chandrasekhar genauer berechnet werden kann. Lediglich für den Fall Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel bietet das hier vorgelegte Verfahren Vorteile.

H. Gaus.

Davison, B. and M. E. Mandl: On the neutron spectrum for $v^{-\alpha}$ -absorption cross section. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 967—972 (1954).

Es wird die Bremsung von Neutronen in einer unendlich ausgedehnten Substanz betrachtet, in der pro cm^3 und sec eine bestimmte Zahl von Neutronen mit der Energie E_0 erzeugt wird. Vorausgesetzt wird dabei, daß $\sigma_{\text{abs}}, \sigma_{\text{streu}}$ proportional $v^{-\alpha}$ ist (v Neutronengeschwindigkeit, α positiv). Ausgerechnet wird die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron eine bestimmte Energie $E < E_0$ erreicht ohne absorbiert zu werden. Diese für Kernreaktoren wichtige Größe kann leichter einigermaßen genau bestimmt werden, als das Energiespektrum selbst.

H. Gaus.

Ramanna, R. and S. B. D. Iyengar: On the distribution of thermal neutrons from a fast neutron source placed at the interface of two media. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **40**, 8—21 (1954).

Es wird die Verteilung thermischer Neutronen berechnet, die sich ergibt, wenn eine punktförmige Quelle schneller Neutronen an der Grenzfläche von zwei Medien (sogenannten Moderatoren) mit verschiedenen Bremsseigenschaften liegt. Dabei wird die „Zwei-Gruppen-Theorie“ benutzt, bei der angenommen wird, daß ein Moderator-kern ein Neutron mit einem gewissen „Bremsquerschnitt“ vom schnellen in den thermischen Bereich streut. Hiermit kann das Diffusionsproblem einfach gelöst werden. Durch Integration ergibt sich die von einer flächenförmigen Quelle herrührende

Neutronen-Verteilung. Es zeigt sich, daß die Neutronendichte an der Grenzfläche im Fall Paraffin-Graphit beträchtlich geringer als im Fall Graphit-Graphit ist, so daß man bei einem Kern-Reaktor den Graphit-Reflektor nicht durch Paraffin oder Wasser ersetzen kann. Es werden experimentelle Anordnungen beschrieben und die Meßergebnisse diskutiert.

H. Gaus.

Ramakrishnan, Alladi: Counters with random dead time. *Philos. Mag.*, VII. Ser. 45, 1050—1052 (1954).

Roederer, Juan G.: Zur Theorie des Breiteneffektes der Nukleonenkomponente der kosmischen Strahlung. *Z. Naturforsch.* 9a, 740—747 (1954).

Die Rechnungen von P. Budini und G. Molière in Heisenberg, Kosmische Strahlung, (dies. Zbl. 50, 444), werden insofern ergänzt, als das primäre Nukleonenspektrum nach unten abgeschnitten wird. Damit wird die Berechnung der Nukleonenkomponente mit den Ansätzen von Budini und Molière für äquatoriale Breiten möglich. Man berechnet die Absorption der Nukleonen verschiedener Energien, die Abhängigkeit der Absorptionslänge von der atmosphärischen Tiefe, den integralen Breiteneffekt für Protonen und Neutronen sowie die integrale Intensität als Funktion der geomagnetischen Breite. Innerhalb der spärlich zur Verfügung stehenden experimentellen Daten stimmt die Rechnung mit der Erfahrung überein.

K.-H. Höcker.

Spencer, L. V. and U. Fano: Energy spectrum resulting from electron slowing down. *Phys. Review*, II. Ser. 93, 1172—1181 (1954).

Bau der Materie:

Jahn, H. A. and J. Hope: Symmetry properties of the Wigner 9j-symbol. *Phys. Review*, II. Ser. 93, 318—321 (1954).

Die Symmetrieeigenschaften des Wignerschen Neunersymbols werden durch eine Untergruppe der Ordnung 72 der Symmetriegruppe von 9 Elementen beschrieben. Die daraus entspringenden Identitäten sind zur Auswertung der Neunersymbole, insbesondere bei der Berechnung der Matrixelemente von Racahschen Tensoroperatoren nützlich. In einem Anhang wird ein Zwölfersymbol definiert, das im Zusammenhang mit den ausreduzierenden Koeffizienten der „fractional parentage“ $\langle n|n-2, 2 \rangle$ auftritt.

F. L. Bauer.

Suryanarayana, V. and V. Ramakrishna Rao: Multiplet separation factors in the spectrum of chromium. II. *Indian J. Phys.* 28, 285—296 (1954).

Guy, Jean, Monique Harrand et Jacques Tillieu: Remarques sur le calcul des polarisabilités des orbitales atomiques du type 2s. *Ann. de Physique*, XII. Sér. 9, 373—381 (1954).

Boys, S. F. and V. E. Price: Electronic wave functions. XI. A calculation of eight variational wave functions for Cl, Cl⁻, S and S⁻. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* 246, 451—462 (1954).

[Teil X, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 217, 235—251 (1953).] Zur Lösung des Vielelektronenproblems werden zunächst die Einelektronenwellenfunktionen als Summe von Slaterfunktionen dargestellt und dann als Summe von Determinanten zu Vielelektronenfunktionen zusammengefaßt. Durch Variation der Parameter werden die besten Funktionen ausgesucht. Die Programmgestaltung für die Rechenmaschine wird dadurch erleichtert, daß verschiedene der vorkommenden Integrale durch Rekursion auseinander hervorgehen und daß für gewisse Paare von Wellenfunktionen gemeinsame Maßstabsfaktoren gefunden werden können. Relativistische Effekte werden berücksichtigt.

W. Humbach.

Boys, S. F. and R. C. Sahni: Electronic wave functions. XII. The evaluation of the general vector coupling coefficients by automatic computation. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* 246, 463—479 (1954).

(Teil XI, s. vorangeh. Referat). Mit im wesentlichen gruppentheoretischen Hilfsmitteln werden die in der Theorie der Vektorkopplung auftretenden Koeffizienten rekursiv aufeinander zurückgeführt. Die Rekursionsformeln werden zur maschinellen Berechnung an die Möglichkeiten der EDSAC angepaßt.

W. Humbach.

Rothenstein, W.: The second Born approximation in inelastic collisions of electrons with atoms. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 673—683 (1954).

Der Verf. ermittelt die zweite Bornsche Näherung für die Anregung des $2p$ -Zustandes von H und des 2^1P -Zustandes von He durch Elektronenstoß aus den entsprechenden Grundzuständen. Die Methode ist nicht brauchbar, wenn die Elektronenenergien zu dicht an den Schwellwert herankommen. Die Korrektur kommt mit dem richtigen Vorzeichen und der ungefähren Größe im Energiebereich unserer Anwendung heraus.

P. Urban.

Sil, N. C.: Electron capture by ions passing through gases. *Indian J. Phys.* **28**, 232—238 (1954).

Der Stoß eines Ions der Ladung $Z'e$ mit einem wasserstoffähnlichen Atom der Ladung Ze wird untersucht und der Wirkungsquerschnitt für Übergänge $1s - ns$ ermittelt. Die Berechnungen, welche das Bornsche Näherungsverfahren zugrunde legen, bauen auf einer früheren Arbeit von Brinkmann und Kramers auf. Das Ergebnis läßt sich als Reihe darstellen, deren erstes Glied mit den angenäherten Resultaten von B. und K. übereinstimmt. Es zeigt sich, daß bei großen Energien der einfallenden Teilchen dieses erste Glied überwiegt. Bei geringen Energien sind jedoch die übrigen Terme der Reihe keinesfalls zu vernachlässigen.

G. Ecker.

Massey, H. S. W. and C. B. O. Mohr: Gaseous reactions involving positronium. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 695—704 (1954).

Es wird der Idealfall eines Wasserstoffgases zugrunde gelegt, um das Verhalten von Positronen zu studieren, die in einem Gas zur Ruhe kommen. Die Vorgänge führen zur Bildung und zum Zerfall von Positronium, ebenso wie zur Abbremsung eines Positroniumpaares in einem Gas und zur Umwandlung von Ortho- in Para-Positronium.

P. Urban.

Samuel, Isaac: Propriétés de certaines dérivées partielles des équations séculaires. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 2422—2424 (1954).

If y_i are diagonal terms in the secular determinant, the secular equation is $F(y_i) = 0$. It is shown what significance is to be attached to the partial derivatives of F , which enter the secular equations of derived molecules.

J. Jacobs.

● **Hartmann, Hermann:** Theorie der chemischen Bindung auf quantentheoretischer Grundlage. (Struktur und Eigenschaften der Materie in Einzeldarstellungen. Bd. 21.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1954. VII, 357 S. 53 Abb. DM 46,80, Ganzleinen DM 49,80.

The book should be welcomed by Chemists as a serious introduction to Quantum Chemistry. There is a clear if condensed account of those mathematical parts of quantum mechanics to be applied later, and an up-to-date review of the theories on which the subject now rests. In the 3rd part a number of recent applications to chemical problems are discussed, including behaviour of radicals, aromatic compounds, reactivity, metal lattices. An excellent advanced text book.

J. Jacobs.

Manning, P. P.: The molecular orbital theory of chemical valency. XVII. Higher approximations. XVIII. Localized orbitals in conjugated molecules. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **225**, 136—146, 244—251 (1954).

XVII. A generalization of the single determinant theory alternative to that of Hurley, Lennard-Jones, and Pople, part XVI, this Zbl. **52**, 235. Equations determining the optimum combinations of determinants constructed out of one-electron orbitals are discussed. The wave functions are invariant under arbitrary unitary transformations. Additional degrees of freedom compared with the single determinant theory are thus introduced, enabling one to construct localized orbitals for conjugated systems. XVIII. Hitherto equivalent

orbitals have been used which are optimum for a standard excited state in which all mobile electrons have the same spin. Now localized orbitals are introduced without approximation, by transforming molecular and virtual orbitals. *J. Jacobs.*

Manneback, C. and A. Rahman: Computation of intensities of vibrational spectra of electronic bands in diatomic molecules. II. *Physica* **20**, 497—500 (1954).

Singh, K.: The structure of hydrazoic acid. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **225**, 519—534 (1954).

Gunther-Mohr, G. R., C. H. Townes and J. H. Van Vleck: Hyperfine structure in the spectrum of $N^{14}H_3$. II. Theoretical discussion. *Phys. Review, II. Ser.* **94**, 1191—1203 (1954).

[Teil I *ibid.* **94**, 1184—1190 (1954)]. Im Ammoniak-Molekül treten die drei Protonen als Gesamtheit mit dem durch die Rotation des Moleküls erzeugten Magnetfeld und mit dem Stickstoffkern in Wechselwirkung. Dadurch wird die Entartung gewisser sonst entarteter Zustände aufgehoben und neue Linien werden erzeugt. Die Matrixelemente und ihre Eigenschaften werden im wesentlichen aus den Symmetrieeigenschaften des Moleküls abgeleitet. *W. Humbach.*

Dewar, M. J. S. and H. C. Longuet-Higgins: The electronic spectra of aromatic molecules. I. Benzenoid hydrocarbons. *Proc. phys. Soc., Sect A* **67**, 795—804 (1954).

The L.C.A.O. molecular orbital theory is used with interaction only of those configurations which are degenerate when overlap is neglected. For the lower polyacenes the frequencies and intensities predicted by Clar are interpreted.

J. Jacobs.

Premaswarup, D.: Calculation of perturbations in certain molecular electronic terms. I. $^2\Sigma - ^4\Pi$. *Indian J. Phys.* **28**, 256—262 (1954).

Fraser, P. A.: A method of determining the electronic transition moment for diatomic molecules. *Canadian J. Phys.* **32**, 515—521 (1954).

Boer, J. de and R. B. Bird: Quantum corrections to the transport coefficients of gases at high temperatures. *Physica* **20**, 185—198 (1954).

Weber, Sophus: Über den Zusammenhang zwischen der laminaren Strömung der reinen Gase durch Rohre und dem Selbstdiffusionskoeffizienten. *Danske Vid. Selsk. mat.-fis. Medd.* **28**, Nr. 2, 138 S. (1954).

Die stationären Strömungen von idealen Gasen durch kreiszylindrische Rohre vom Radius R können in den beiden Grenzfällen $\lambda R \ll 1$ und $\lambda R \gg 1$ (λ = mittlere freie Weglänge) theoretisch exakt behandelt werden. Im ersten Fall handelt es sich um die Poiseuillesche Schichtenströmung mit Gleitungskorrektur, deren Gesetzmäßigkeiten auf Grund der Stokes-Navierschen Gleichungen der Hydrodynamik exakt hergeleitet werden können, im zweiten um die Knudsen'sche Molekularströmung, deren Gesetzmäßigkeiten aus den Grundannahmen der kinetischen Gastheorie streng folgen. Für das Übergangsgebiet zwischen den beiden Extremfällen, also für $\lambda R \sim 1$ hat sich eine empirische, von M. Knudsen aufgestellte Interpolationsformel bewährt. Verf. zerlegt nun die Knudsen'sche Interpolationsformel in drei Strömungsanteile, von denen der erste als die rein laminare Poiseuillesche Strömung, der zweite als „Gleitungsströmung“ und ein dritter als eine „Diffusionsströmung“ gedeutet wird. Die Diffusionsströmung ergibt für $\lambda R \gg 1$ selbstverständlich die Molekularströmung, während sie für $\lambda R \ll 1$ in eine „Selbstdiffusionsströmung“ übergeht, die es ermöglicht, den Selbstdiffusionskoeffizienten eines reinen Gases experimentell durch Durchströmungsversuche zu bestimmen. *Th. Seel.*

Bernstein, Ira B. and T. Holstein: Electron energy distributions in stationary discharges. *Phys. Review, II. Ser.* **94**, 1475—1482 (1954).

Die Berechnung der Elektronen-Energieverteilung in einer Gleichstrom- oder niederfrequenten Mikrowellenentladung vernachlässigt im allgemeinen den Einfluß der Raumladungsfelder, wie sie durch den Vorgang der ambipolaren Diffusion bedingt sind. Die vorliegende Untersuchung gibt die allgemeinen Beziehungen an und berechnet die Energieverteilung für den Grenzfall, in dem die Verteilung wesentlich durch die Raumladungsfelder bestimmt ist. Das Ergebnis wird zeichnerisch dargestellt und es zeigt sich, daß der wesentliche Einfluß des ambipolaren Feldes in einer Verstärkung der energiereichen Anteile der Elektronenverteilung und damit in einer erhöhten spezifischen Ionisierung besteht. Die Berechnungen werden für verschiedene Formen der Ladungsverteilung ausgeführt. Die Erhöhung der Ionisierungsrate ist jedoch in allen Fällen für die Deutung der Ionisierungsschwierigkeiten der positiven Edelgas-säule unzureichend. *G. Ecker.*

Gordeev, G. V.: Plasmaschwingungen niedriger Frequenz. Žurn. eksper. teor. Fiz. **27**, 19—23 (1954) [Russisch].

Es werden die Plasmaschwingungen niedriger Frequenz untersucht. Die Ableitung der Streuungsgleichung der Schwingungen des Plasmas im konstanten elektrischen Feld wird angegeben. Es wird gezeigt, daß beim Vorhandensein eines konstanten äußeren elektrischen Feldes stabile ungedämpfte Plasmaschwingungen möglich sind. Autoreferat.

Gordeev, G. V.: Die Erregung von Plasmaschwingungen. Žurn. eksper. teor. Fiz. **27**, 24—28 (1954) [Russisch].

Es wird die Frage über die Erregung von Plasmaschwingungen hoher und niedriger Frequenz durch ein Büschel geladener Teilchen unter Berücksichtigung der thermischen Zerstreuung der Geschwindigkeiten dieser Teilchen untersucht. Es wird gezeigt, daß der stationäre Zustand des Plasmas und des Teilchenbüschels instabil ist. Beim Fehlen eines äußeren Feldes zerstreut sich das Büschel, und der Zustand des Systems geht in den Gleichgewichtszustand des Plasmas über. Beim Vorhandensein eines konstanten äußeren elektrischen Feldes ist ein stabiler Zustand des Systems mit ungedämpften hoch- und niederfrequenten Plasmaschwingungen möglich. Autoreferat.

Fürth, R. and C. L. Williams: Opalescence and concentration fluctuations in binary liquid mixtures near the critical mixing point. II. Theoretical. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **224**, 104—119 (1954).

[Teil I *ibid.* **224**, 90—103 (1954).] Verf. wendet die entwickelte Molekulartheorie der Streuung von Röntgenstrahlen in Flüssigkeiten auf die Phänomene der kritischen Opaleszenz in binären Gemischen an. Die Abhängigkeit der Intensität der Streustrahlung vom Winkel und der Wellenlänge läßt sich aus den abgeleiteten Formeln angeben, wenn die Korrelationsfunktion der Konzentrationsschwankungen in benachbarten Volumenelementen bekannt ist. Aus den gemessenen Streuintensitäten im Teil I dieser Abhandlung bestimmt nun umgekehrt der Verf. die Korrelationsfunktionen für eine Anzahl von Gemischen in der Nähe des kritischen Lösungspunktes. Er kommt zu dem Resultat, daß Mischungen der Klasse I durch Korrelationsfunktionen ausgezeichnet sind, die in einem Bereich negative Werte haben, während dieselben Funktionen für Gemische der Klasse II eine Gaußsche Gestalt besitzen. *H. Falkenhagen-G. Kellg.*

Gejlikman, B. T.: Über die Kondensation eines idealen Bose-Gases im Schwerfeld. Žurn. eksper. teor. Fiz. **27**, 118—120 (1954) [Russisch].

Widom, B.: The virial series of the ideal Bose-Einstein gas. Phys. Review, II. Ser. **96**, 16—17 (1954).

Lidiard, A. B.: Distance correlations in an ideal Fermi-Dirac gas. Philos. Mag., VII. Ser. **45**, 202—207 (1954).

Die Antisymmetrie der Wellenfunktion eines Fermi-Dirac-Gases sorgt dafür, daß die Wahrscheinlichkeit, zwei Teilchen im Abstände r voneinander zu finden, von eben diesem Abstand abhängt. Nachdem diese „Paarverteilungsfunktion“ $D(r)$ von Uhlenbeck und Gropper (dies. Zbl. **5**, 41) für den Fall hoher Temperaturen und geringer Dichte, von Wigner und Seitz (dies. Zbl. **7**, 41) für den Fall sehr tiefer Temperaturen und hoher Dichte bestimmt worden war, untersucht Verf. den dazwischenliegenden Bereich. Dabei stützt er sich unter Beachtung einer Minimaleigenschaft der freien Energie auf ein Variationsverfahren. Die Paarverteilungsfunktion wird für mehrere Temperaturen graphisch dargestellt. *H. Haken.*

Kaempffer, F. A.: On the concept of field quantization. Canadian J. Phys. **32**, 259—263 (1954).

Es werden die Beziehungen zwischen der Zimanschen Quantenhydrodynamik (dies. Zbl. **51**, 227) und Ansätzen zur Elementarteilchentheorie von Takabayasi [Progress theor. Phys. **9**, 187—222 (1953)] und Verf. (dies. Zbl. **51**, 191, 192) diskutiert. *G. Höhler.*

Kaempffer, F. A.: Note on the self-energy of single roton states in quantum hydrodynamics. Canadian J. Phys. **32**, 264—266 (1954).

Der Hamiltonoperator in Zimans Quantenhydrodynamik (dies. Zbl. **51**, 227) enthält neben Termen für freie Phononen und freie Rotonen noch Wechselwirkungsterme. Verf. zeigt, daß diese in 2. störungstheoretischer Näherung Beiträge zu den Energien der tiefsten Zustände liefern, die von derselben Größe wie die Energien 0. Näherung sind. Die unter Vernachlässigung der Wechselwirkungsterme gefundenen Ergebnisse sind daher fragwürdig. *G. Höhler.*

Tyabji, S. F. B.: A quantum theory for non-viscous fluids in the Lagrange variables. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **50**, 449—453 (1954).

Während Ziman (dies. Zbl. **51**, 227) und andere Autoren zur Quantisierung der Gleichungen der Hydrodynamik reibungsfreier Flüssigkeiten von der Eulerschen Form ausgingen, verwendet Verf. die Lagrangesche Form. Da in dieser die Koordinaten und Impulse der „Teilchen“ der Flüssigkeit vorkommen, ist der Weg zur Quantisierung hier vorgezeichnet. Näherungsweise findet Verf. vektorielle Phononen, den transversalen Anteil identifiziert er mit den Rotonen. (Anm. d. Ref.: Diese „Rotonen“ unterscheiden sich wesentlich von den von Landau und Ziman eingeführten. Sie führen nicht zu dem gemessenen Verlauf der spezifischen Wärme.)

G. Höhler.

Cohen, E. G. D., M. J. Offerhaus and J. de Boer: The transport properties and equation of state of gaseous mixtures of the helium isotopes. *Physica* **20**, 501—515 (1954).

Mikura, Ziro: Further considerations regarding liquid helium II at high pressures. *Progress theor. Phys.* **11**, 503—504 (1954).

Daunt, J. G. and R. S. Smith: The problem of liquid helium. Some recent aspects. *Reviews modern Phys.* **26**, 172—236 (1954).

Ausführlicher Bericht über das He II-Problem. Festes He und He³ werden nicht behandelt.

G. Höhler.

Fröhlich, H.: On the theory of superconductivity. The one-dimensional case. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **223**, 296—305 (1954).

Die Wechselwirkung zwischen Elektronen und Gitterschwingungen wird an einem eindimensionalen Modell untersucht. Nach Verf. spielt dabei für einen gewissen Bereich des Wechselwirkungsparameters eine ganz bestimmte Gitterwelle eine entscheidende Rolle, deren Wellenlänge so beschaffen ist, daß im Einzelelektronenspektrum eine Energielücke geschaffen wird, und zwar derart, daß unterhalb von ihr alle Zustände mit Elektronen besetzt, alle Zustände oberhalb unbesetzt sind. Die Wechselwirkung dieser Gitterwelle mit den Elektronen wird mit Hilfe eines self-consistent-field-Verfahrens berechnet, die Berücksichtigung der anderen Gitterwellen soll dann mittels Störungsrechnung möglich sein. Die Energielücke ist (im Gegensatz zum üblichen Isolatormodell) so beschaffen, daß sie stromführende Zustände nicht verhindert, sondern sogar dafür sorgt, daß sich die Elektronen als Gesamtheit durch den Kristall bewegen und keinerlei Streuungen erleiden. Als weitere Folge der Energielücke ergibt sich ein exponentielles Gesetz für die Abnahme der spezifischen Wärme mit abnehmender Temperatur. Die Isotopie-Verschiebung des Sprungpunktes ist in dem eindimensionalen Fall noch nicht enthalten.

H. Haken.

Gejlikman, B. T.: Zur Theorie der Supraleitfähigkeit. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **94**, 659—662 (1954) [Russisch].

Im Anschluß an eine frühere Arbeit [ibidem **94**, 199—202 (1954)], in der Verf. die Gleichungen für eine Quantenhydrodynamik einer ungeladenen Flüssigkeit hergeleitet hatte, wird hier die geladene Quantenflüssigkeit im elektromagnetischen Feld behandelt. Wie Verf. kurz darlegt, folgen auch bei Fermistatistik für die „hydrodynamischen“ Operatoren die Bose-Vertauschungsrelationen. Die hydrodynamischen Gleichungen werden näherungsweise gelöst. Verf. zeigt, daß die Londonschen Gleichungen immer dann erfüllt sind, wenn eine ganz bestimmte Zustandsentartung vorliegt derart, daß ein nochmals gequantelter Operator des Systems gleich einer klassischen Größe ist.

H. Haken.

Fester Körper:

Secrest, E. L.: Normal coordinates. *Amer. J. Phys.* **22**, 17—19 (1954).

Rhodes jr., J. Elmer: Thermal energy in almost normal modes. *Phys. Review, II. Ser.* **93**, 1—3 (1954).

Bhatia, A. B. and G. E. Tauber: On the evaluation of characteristic temperatures for cubic crystals. *Philos. Mag., VII. Ser.* **45**, 1211—1213 (1954).

Roy, S. K.: On the evaluation of certain lattice series. *Canadian J. Phys.* **32**, 509—514 (1954).

Es werden Vorschriften zur Aufsummation von Gittersummen, insbesondere solchen vom Madelung'schen Typ angegeben. *W. Brenig.*

Dugdale, J. S. and D. K. C. MacDonald: Vibrational anharmonicity and lattice thermal properties. *Phys. Review*, II. Ser. **96**, 57—62 (1954).

Das thermische Verhalten einer linearen Kette wird untersucht. Vorausgesetzt wird Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn allein. Das Potential zwischen den benachbarten Atomen wird durch ein Morse-Potential beschrieben. Die Diskussion zeigt, daß man eine Art von Übergang zwischen einem Gitter und einem Gas erhält. Die Ergebnisse werden auf das Raumgitter, speziell für die Alkalien, übertragen. (Es muß aber betont werden, daß die Übertragung von Ergebnissen am linearen Gitter auf räumliche Gitter nur mit Vorbehalt erfolgen darf, denn die Zusammenhänge-Verhältnisse, z. B. die thermischen Schwankungen, sind in beiden Fällen qualitativ verschieden.) *G. Leibfried.*

Dugdale, J. S. and D. K. C. MacDonald: The influence of zero-point energy on the thermodynamic properties of the low boiling point elements. *Philos. Mag.*, VII. Ser. **45**, 811—817 (1954).

Eine Näherung für die Nullpunktsenergie in Abhängigkeit von den Gitterdaten führt zur Aufstellung einer Zustandsgleichung für die Edelgase, festes H_2 und D_2 bei tiefer Temperatur. Benutzt wird ein Lennard-Jones-Potential zwischen den Atomen. In reduzierten Einheiten hat die Zustandsgleichung die gleiche Form (korrespondierende Zustände). Ein Vergleich mit experimentellen Daten fällt befriedigend aus. *G. Leibfried.*

● Houwink, R.: Elasticity, plasticity and structure of matter. With a chapter on the plasticity of crystals by W. G. Burgers. 2nd ed. Cambridge: At the University Press 1954. XVIII, 368 p. 6 plates. 45 s net.

Laval, Jean: Théorie atomique de l'élasticité cristalline excluant les forces centrales. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **238**, 1773—1775 (1954).

Salter, L.: The ideal crystal at absolute zero. *Philos. Mag.*, VII. Ser. **45**, 360—368 (1954).

Die Nullpunktsschwingungen eines Kristallgitters liefern ebenso wie die thermischen Schwingungen Beiträge zu den elastischen Konstanten. Diese Beiträge können die Cauchy'schen Relationen zwischen den elastischen Konstanten zerstören. Die Größe der Nullpunktsenergie und ihr Einfluß auf die elastischen Moduln wird abgeschätzt. Ein wesentlicher Teil der Näherung besteht darin, daß die für die Nullpunktsenergie benötigte mittlere Frequenz durch die Wurzel aus dem quadratischen Mittel ersetzt wird, weil sich die letztere Größe leicht ausrechnen läßt. Die Verhältnisse bei Edelgasgittern werden diskutiert. Danach können selbst bei Annahme von Zentralkräften in diesen (flächenzentrierten) Gittern die Abweichungen von den Cauchy-Relationen beträchtlich sein. *G. Leibfried.*

Bullough, R. and B. A. Bilby: Uniformly moving dislocation in anisotropic media. *Proc. phys. Soc.*, Sect. B **67**, 615—624 (1954).

Es werden Oberflächenwellen in anisotropen elastischen Medien betrachtet, bei denen der Spannungszustand nur von zwei Raumkoordinaten abhängt. Als Anwendung werden mit konstanter Geschwindigkeit gleitende Versetzungen in Kristallen betrachtet. Die expliziten Rechnungen beschränken sich jedoch auf den Fall, daß die Versetzungslinie parallel zu einer geradzähligen Kristallachse verläuft und somit Stufen- und Schraubenversetzungen getrennt behandelt werden dürfen. Mit Hilfe des sog. Peierls'schen Modells (mit einfachem Sinusgesetz) wird die Abhängigkeit der Versetzungsweite von Stufen- und Schraubenversetzungen des Basisgleitsystems einiger hexagonaler Metalle von der Versetzungsgeschwindigkeit untersucht. Es ergeben sich charakteristische, von der elastischen Anisotropie herrührende Unterschiede zwischen diesen Metallen sowohl in der Versetzungsweite als auch in der sog. Grenzgeschwindigkeit (bei der die Versetzungsweite Null und die kinetische Energie der Versetzung unendlich würde). *A. Seeger.*

Eshelby, J. D.: Distortion of a crystal by point imperfections. *J. appl. Phys.* **25**, 255—261 (1954).

Verf. diskutiert die Volumenänderung durch Dilatationszentren („Fremdatome“ usw.) und ihren Einfluß auf die Röntgenstreuung. Es ist dabei wesentlich, daß die Spannungsfreiheit der Oberfläche des betrachteten Volumens berücksichtigt wird.

G. Leibfried.

Leibfried, G.: Versetzungsverteilung in kleinen plastisch verformten Bereichen. Z. angew. Phys. **6**, 251—253 (1954).

Die von Verf. gegebene Behandlung [Z. Phys. **130**, 214—226 (1951)] der Gleichgewichtsverteilung paralleler gerader Versetzungslinien auf einer Gleitebene mit Hilfe einer Dichtefunktion der Versetzungen wird auf den Fall konzentrischer Versetzungslinien in derselben Gleitebene erweitert. Eine einfache Formulierung des Problems ist jedoch nur möglich, wenn die Querkontraktionszahl des isotropen elastischen Mediums $\nu = 0$ gesetzt wird, da nur dann Stufen- und Schraubenversetzungen das gleiche Spannungsfeld in der Gleitebene haben. Unter einer homogenen äußeren Schubspannung ergeben sich konzentrische Kreise als Gleichgewichtslösung. Die Dichteverteilung der Versetzungen unterscheidet sich in diesem Falle von derjenigen des entsprechenden Problems mit geraden Versetzungslinien nur um einen konstanten Faktor $2/\pi$.

A. Seeger.

Leibfried, G. und P. Haasen: Zum Mechanismus der plastischen Verformung. Z. Phys. **137**, 67—88 (1954).

Seeger, Alfred und Hubert Blank: Sprünge in Versetzungslinien. Z. Naturforsch. **9a**, 262—263 (1954).

Donth, Hans: Über eine Methode zu einer Statistik der Versetzungen. Z. Naturforsch. **9a**, 264—265 (1954).

Stroh, A. N.: Constriction and jogs in extended dislocations. Proc. phys. Soc., Sect. B **67**, 427—436 (1954).

Vineyard, G. H. and G. J. Dienes: The theory of defect concentration in crystals. Phys. Review, II. Ser. **93**, 265—268 (1954).

Waller, I. and S. O. Lundqvist: Some remarks on the rôle of overlapping in the X-ray scattering by crystals. Ark. Fys. **7**, 221—224 (1954).

Asselmeyer, Fritz: Der Einfluß des Glanzwinkels auf die Abbildung von Achsenpunkten bei dem Kugelzonenspiegel für monochromatische Röntgenstrahlung. Z. angew. Phys. **6**, 272—275 (1954).

Joynson, R. E.: Elastic spectrum of zinc from the temperature scattering of X-rays. Phys. Review, II. Ser. **94**, 841—855 (1954).

Experimentelle Werte für die Frequenzen der Gitterschwingungen in Zink werden mit theoretischen Daten verglichen. Bei den kurzwelligen Schwingungen kommt man mit nächster Nachbar-Wechselwirkung nicht aus. Von den 8 Kopplungskonstanten zwischen nächsten Nachbarn können 7 aus den vorliegenden experimentellen Daten bestimmt werden.

G. Leibfried.

Vajnstejn, B. V.: Quantitative Beziehungen in den Fourierreihen der Elektronendichte von Kristallen. Žurn. eksper. teor. Fiz. **27**, 44—61 (1954) [Russisch].

Die Konstruktion der Fourierschen Synthese nach röntgenographischen Daten ergibt die Verteilung der Elektronendichte im Kristallgitter, deren Maxima (Spitzen) den Atomen entsprechen. Unter Berücksichtigung der Wärmebewegung wird die Abhängigkeit der Größen, die die Elektronendichte der Atome charakterisieren, von der Atomzahl gefunden. Fragen der Normierung und der Genauigkeit der F - und F^2 -Reihen werden untersucht.

Autoreferat.

Laval, Jean: Diffusion des électrons par les ondes élastiques d'agitation thermique dans les cristaux. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2068—2070 (1954).

Marshall, W.: Inelastic magnetic scattering of neutrons from a ferromagnetic crystal. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 85—91 (1954).

Direkte Verallgemeinerung einer Arbeit von Moorhouse (dies. Zbl. **44**, 450) über den genannten Gegenstand. Wesentlicher Punkt ist, daß Verf. ein Modell des Ferromagnetikums mit zwei Valenzelektronen pro Atom zugrunde legt und in einer gewissen Näherung die Spinwellentheorie hierfür benutzt. Moorhouse (l. c.) hatte nur ein Valenzelektron pro Atom vorausgesetzt.

G. Heber.

Placzek, G. and L. van Hove: Crystal dynamics and inelastic scattering of neutrons. *Phys. Review*, II. Ser. **91**, 1207—1214 (1954).

Es wird die Energie- und Winkelverteilung von unelastisch an Kristallen gestreuten Neutronen untersucht, unter besonderer Berücksichtigung der Dynamik des Kristallgitters. Während bei der unelastischen Streuung von Röntgenstrahlen die relative Energieübertragung sehr klein ist, hat man bei Neutronenstreuung die Möglichkeit, dieselbe durch direkte Energiemessung der gestreuten Teilchen zu bestimmen. Das gibt die Möglichkeit einer viel direkteren Ermittlung des Spektrums der Gitterschwingungen als aus dem thermischen Röntgenstreulicht, bei dem die Frequenz (indirekt über die Intensität des Streulichtes) aus der thermischen Anregungsstärke der Gitterwellen bestimmt werden muß.

W. Brenig.

Kittel, C.: Effective mass of electrons in crystals. *Amer. J. Phys.* **22**, 250—252 (1954).

Coulson, C. A.: Note on the applicability of the free-electron network model to metals. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 608—614 (1954).

Das bei der Behandlung von komplizierteren Molekülen mit Erfolg angewandte „Netzwerkmodell“ [Scherr, *J. Chem. Phys.* **21**, 1582 (1953)] der Valenzelektronen wird auf Metalle übertragen. (Es wird angenommen, daß die Elektronen sich frei längs der Verbindungslinien der nächsten Nachbarn bewegen können.) Die Bandstruktur dieser Näherung ist eng verwandt mit der der Näherung fester Bindung.

W. Brenig.

Slater, J. C. and G. F. Koster: Simplified LCAO method for the periodic potential problem. *Phys. Review*, II. Ser. **94**, 1498—1524 (1954).

Es wird gezeigt, wie die Näherung fester Bindung (Linearkombination von Atomfunktionen) zur Bestimmung von Einelektronenbandfunktionen als Interpolation zwischen besseren Näherungsverfahren dienen kann: Man beschränkt sich bei der Näherung fester Bindung auf die Berücksichtigung von Zweizentrenintegralen. Diese werden jedoch nicht direkt ausgerechnet, sondern als Parameter betrachtet, und so bestimmt, daß die Energiewerte für bestimmte Stellen im \mathbf{k} -Raum mit denen übereinstimmen, welche von komplizierteren und genaueren Verfahren (z. B. Zellenmethode) geliefert werden. Mit der Methode wird behandelt: Das kubisch raumzentrierte Gitter, der Cs-Cl-Typ, das Diamantgitter.

W. Brenig.

Jenkins, D. P. and L. Pincherle: A variation principle for electronic wave functions in crystals. *Philos. Mag., VII. Ser.* **45**, 93—99 (1954).

Das Variationsprinzip von Kohn (dies. Zbl. **47**, 235) wird für die Behandlung mehratomiger Gitter verallgemeinert, und zu einer Verbesserung der Zellenmethode benutzt. Das Verfahren wird zur Bestimmung der Energiebänder in Bleisulfid angewandt.

W. Brenig.

Kohn, W. and N. Rostoker: Solution of the Schrödinger equation in periodic lattices with an application to metallic lithium. *Phys. Review*, II. Ser. **94**, 1111—1120 (1954).

Die Schrödingergleichung für das Elektron im periodischen Potential wird mit Hilfe der zugehörigen Greenschen Funktion in eine Integralgleichung verwandelt, welche nach dem bekannten Variations-Iterationsverfahren behandelt werden kann. Es wird gezeigt, daß die Rechnung sich außerordentlich vereinfacht, wenn das Potential kugelsymmetrisch in geeignet gewählten Kugeln um die Gitterpunkte, und konstant außerhalb dieser Kugeln ist. Das Verfahren wird zur Bestimmung des Valenzbandes von metallischem Lithium angewandt.

W. Brenig.

March, N. H.: Momentum distribution of electrons in solids. Results for some metals using the Thomas-Fermi method. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 9—16 (1954).

Die Impulsverteilungen und Comptonprofile der Elektronen von Li, Na, K, Rb und Be werden nach dem Thomas-Fermi-Modell bestimmt, und zwar nicht ausgehend von den Verteilungen der isolierten Atome, sondern direkt für die Elektronen im Metall.

W. Brenig.

Friedel, J.: Mouvement d'un électron dans un réseau périodique perturbé. *J. Phys. Radium* **15**, 433—438 (1954).

Die Gültigkeitsgrenzen verschiedener Näherungsmethoden zur Behandlung eines Elektrons in einem schwach gestörten periodischen Potential werden genauer untersucht. Die Näherung der „effektiven Masse“ in der Nähe der Brillouin-Zonenmitte wird kritisiert und eine etwas andere Lösung vorgeschlagen. Autoreferat.

Schiff, B.: A calculation of the eigenvalues of electronic states in metallic lithium by the cellular method. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 2—8 (1954).

Das Potential für die Valenzelektronen in Li wird neu bestimmt und die Bindungsenergie von Li nach der verbesserten Zellenmethode von Howarth und Jones (dies. Zbl. **46**, 237) berechnet. W. Brenig.

Elcock, E. W., P. Rhodes and A. Teviotdale: Effects of band shape on the magnetic and thermal properties of metals and alloys. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **221**, 53—77 (1954).

Es wird die Temperaturabhängigkeit für den elektronischen Beitrag zur paramagnetischen Suszeptibilität und der spezifischen Wärme von Metallen für verschiedene Formen der Energiebänder der Elektronen berechnet. Bei der Auswahl der verschiedenen Formen wurde darauf geachtet, daß die Bandformen physikalisch vernünftig [also mit der theoretischen Bestimmung der Bandform nach bekannten Verfahren (etwa Blochscher Näherung) verträglich sind] und daß sie bei den Rechnungen einen nicht zu großen Aufwand erfordern. Während sich bei einem Typus von Bandformen ein monotoner Abfall der Suszeptibilität mit wachsender Temperatur ergibt, was bei vielen stark paramagnetischen Metallen ein geläufiges experimentelles Ergebnis ist, führt ein anderer Typus auf einen Kurvenverlauf mit einem Maximum, wie es etwa bei Palladium gefunden wurde. Die Arbeit schließt mit einer kurzen Diskussion der Methode der kollektiven Behandlung der Elektronengesamtheit, die dieser Arbeit zugrunde liegt, und einem kurzen Vergleich der theoretischen und experimentellen Ergebnisse. H. Haken.

Bell, D. G., R. Hensman, D. P. Jenkins and L. Pincherle: A note on the band structure of silicon. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 562—563 (1954).

Winston, Harvey: Studies on localized orbitals. *Phys. Review, II. Ser.* **94**, 328—336 (1954).

Es werden einige Eigenschaften der Wannierfunktionen untersucht: Wannierfunktion des freien Elektrons in einer Dimension, ihre Abhängigkeit von der Wahl der Phasen der Blochschen Bandfunktionen und der Größe der Elementarzelle, ihre Symmetrieeigenschaften in dreidimensionalen Gittern usw. W. Brenig.

Lax, Melvin: Localized perturbations. *Phys. Review, II. Ser.* **94**, 1391—1392 (1954).

Horton, G. K. and E. Phibbs: Perturbation theory with Sommerfeld-Maue wave function. *Phys. Review, II. Ser.* **94**, 1402—1403 (1954).

Raimes, S.: Energy band shapes and band widths in metals. *Philos. Mag., VII. Ser.* **45**, 727—734 (1954).

Verf. diskutiert die Termdichte für ein entartetes Elektronengas bei Berücksichtigung der Elektronenwechselwirkung nach der Theorie von Bohm und Pines (Bohm-Pines, *Phys. Review, II. Ser.* **92**, 609—625 (1953); Pines, *ibid.* **92**, 626—636 (1953)). Die aus Emissionsspektren weicher Röntgenstrahlen gewonnenen Ergebnisse werden mit der Theorie verglichen. G. Höhler.

Raimes, S.: Correlation energy in metals and the cohesive energy of metallic sodium. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 52—56 (1954).

Die Methode von Löwdin [*J. Chem. Phys.* **19**, 1579—1591 (1951)] zur Berechnung von metallischen Wellenfunktionen wird verglichen mit den Rechnungen von Wigner und Seitz. Es zeigt sich, daß die Energie des Grundzustandes der Valenzelektronen von Na bei Löwdin etwa 25% tiefer liegt als bei Wigner und Seitz. Dies ist eine Folge der Tatsache, daß die Löwdinsche Wellenfunktion nicht die richtige Anzahl von Knoten hat. Die Bestimmung der Wellenfunktion von Valenzelektronen aus Linearkombinationen orthogonalisierter Atomfunktionen stellt daher keine gute Näherung dar. W. Brenig.

Tredgold, R. H.: On the exchange interaction in the collective electron approximation. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 221—224 (1954).

An einem Spezialfall wird gezeigt, daß das Austauschintegral J_{if} für zwei Bandfunktionen mit den Wellenzahlen f und f' in der Näherung fester Bindung ähnliche Singularitäten besitzt wie in der Näherung freier Elektronen und nicht, wie oft angenommen wird, mit f und f' nur wenig variiert. *W. Brenig.*

Zubarev, D. N.: Berechnung der Konfigurationsintegrale für ein System von Teilchen mit Coulombscher Wechselwirkung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 757—760 (1954) [Russisch].

Die Konfigurationsintegrale über die Coulombsche Wechselwirkung, die zur Bestimmung der freien Energie etwa eines Elektrolyten nötig sind, werden berechnet. Als wesentliches Hilfsmittel wird dabei die Zerlegung des Dichte-Operators, der eine Summe Diracscher δ -Funktionen ist, in seine Fourierkomponenten benutzt. *H. Haken.*

March, N. H.: Cohesion of the alkali metals in the Thomas-Fermi-Dirac theory. Philos. Mag., VII. Ser. **45**, 325—328 (1954).

Meyerott, R. E.: Approximate Hartree-type wave functions and matrix elements for the K and L shells of atoms and ions. Phys. Review, II. Ser. **95**, 72—82 (1954).

Donovan, B.: The magneto-resistance effect in metals at high frequencies. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 305—314 (1954).

Böer, K. W.: Einige Bemerkungen zur Gissolfischen Theorie der Elektronenschwankungserscheinungen von Halbleitern. Ann. der Physik, VI. F. **14**, 87—96 (1954).

Swanson, John A.: Diode theory in the light of hole injection. J. appl. Phys. **25**, 314—323 (1954).

Visvanathan, S. and J. F. Battey: Some problems in the diffusion of minority carriers in a semiconductor. J. appl. Phys. **25**, 99—102 (1954).

Bei Halbleitern erfolgt der Stromtransport bekanntlich durch Elektronen und Defektelektroden, wobei man, je nachdem welche Ladungsträgerart dominiert, von einem n - oder p -Halbleiter spricht. Durch aufgesetzte Metallspitzen und dgl. kann man die in der Minderheit befindliche Ladungsträgerart künstlich injizieren. Diese Ladungsträger diffundieren in den Halbleiter hinein und werden allmählich durch Rekombinationsprozesse aufgezehrt, wobei man eine Volumrekombination und eine besondere, nur an der Halbleiteroberfläche erfolgende Oberflächenrekombination unterscheidet. Für den Fall einer unendlich ausgedehnten Halbleiterplatte endlicher Dicke werden exakte Lösungen des Diffusionsproblems hergeleitet, wenn die Injektion durch eine Punkt- oder Strichquelle erfolgt. Näherungslösungen werden diskutiert, die für die Berechnung der Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeit aus experimentellen Daten geeignet sind. Der störende Einfluß der Oberflächenrekombination bei der Ermittlung der Volumrekombination wird abgeschätzt. *W. Oldekop.*

Abeles, B. and S. Meibom: Theory of the galvanomagnetic effects in germanium. Phys. Review, II. Ser. **95**, 31—37 (1954).

Unter der Annahme, daß die Energiefläche als Funktion des Impulses eine Anzahl von Extrema besitzt, wird eine Theorie der galvanomagnetischen Effekte in Germanium entwickelt. Es wird die Abhängigkeit der Koeffizienten von der magnetischen Feldstärke berechnet, wobei also auch ein starkes Magnetfeld behandelt wird. Der Quotient aus Hall-Beweglichkeit und Leitungs-Beweglichkeit wird bestimmt. Der Vergleich der berechneten Werte für den magnetischen Widerstand mit Messungen von Pearson und Suhl zeigt beim n -Germanium eine befriedigende Übereinstimmung, bei p -Germanium jedoch nicht. *H. Haken.*

Tewordt, Ludwig: Zur Theorie der strahlungslosen Rekombination in nicht-polaren Halbleitern. Z. Phys. **137**, 604—616 (1954).

Es wird die von K. Huang und A. Rhys (dies. Zbl. **38**, 416) vorgenommene Behandlung der strahlungslosen Übergänge in polaren Medien auf den Fall homöopolarer Medien übertragen. Zu diesem Zwecke wird die Wechselwirkung mit den akustischen (statt wie bei Huang und Rhys mit den optischen) Gitterschwingungen betrachtet, das Gitter als Diskontinuum behandelt und — wenigstens in den allgemeinen Formeln der hier verwendeten Born-Oppenheimer-Näherung

(einschließlich Condonscher Näherung) ein System von Vielelektronenwellenfunktionen verwendet. Unter Spezialisierung auf ein kubisches Gitter und weiteren vereinfachenden Annahmen wird die Wahrscheinlichkeit des strahlungslosen Überganges in Abhängigkeit von der Zahl der erzeugten Schallquanten und einem charakteristischen Kopplungsparameter berechnet, wobei die Übergangswahrscheinlichkeit in der angegebenen Tabelle in einem Bereich bis zu 13 Zehnerpotenzen variiert. Ein Vergleich der theoretischen mit der beobachteten Übergangswahrscheinlichkeit wird nicht vorgenommen.

H. Haken.

Kümmel, Hermann: Zur feldtheoretischen Beschreibung des festen Körpers. *Z. Naturforsch.* **9a**, 331—335 (1954).

Die Theorie freier Elektronen in Wechselwirkung mit Schallquanten wird als Feldtheorie im Ortsraum geschrieben. Es wird mit Hilfe der „Leiternäherung“ der Bethe-Salpeter-Gleichung gezeigt, daß keine gebundenen Zweielektronenzustände existieren können, wenigstens insofern man die Wechselwirkung in der üblichen (Blochschen) Näherung der Theorie der Leitfähigkeit verwendet. Doch ist dieses Ergebnis zweifelhaft, da die „Leiternäherung“ hier wegen der Kleinheit der Schallgeschwindigkeit schlecht ist.

M. R. Schafroth.

Höhler, G.: Zur Theorie des Polarons. *Z. Naturforsch.* **9a**, 801—802 (1954).

Morita, Akira: Some generalization of the theory of scattering with application to slow electrons in polar crystals. *Progress theor. Phys.* **11**, 609—611 (1954).

Klemens, P. G.: Thermoelectric power of monovalent metals at high temperature. *Philos. Mag.*, VII. Ser. **45**, 881—882.

Appel, J.: Die transversalen galvanomagnetischen Effekte in Halbleitern. *Z. Naturforsch.* **9a**, 167—174 (1954).

March, N. H. and B. Donovan: Free electron diamagnetism and susceptibilities of the alkali metals. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 464—465 (1954).

Brovetto, P. and S. Ferroni: High nuclear polarizations in paramagnetic substances. *Nuovo Cimento*, IX. Ser. **12**, 90—98 (1954).

Kriessman, C. J. and Herbert B. Callen: The magnetic susceptibility of the transition elements. *Phys. Review*, II. Ser. **94**, 837—844 (1954).

Verff. weisen auf gewisse Regelmäßigkeiten der Temperaturabhängigkeit der paramagnetischen Suszeptibilitäten der Übergangsmetalle hin. Zur Erklärung ziehen sie die etwas vereinfachte Paulische Theorie des Elektronen-Paramagnetismus heran (die Vereinfachung betrifft die Fermische Verteilungsfunktion der Elektronen). Die Suszeptibilität wird dann wesentlich bestimmt durch die Dichte der Elektronenzustände in der Umgebung der Fermigrenze. Aus den empirischen Daten kann auf gewisse Feinheiten dieser Zustandsdichten geschlossen werden; im großen und ganzen aber kommt man mit den theoretisch ermittelten Zustandsdichten aus. Antiferromagnetische Erscheinungen werden explizit nicht betrachtet.

G. Heber.

Lacroix, Roger: Sur la forme des courbes de résonance paramagnétique. *Helvet. phys. Acta* **27**, 283—308 (1954).

Die Abhängigkeit der paramagnetischen Resonanz von der Frequenz des Magnetfeldes wird von einem formalen, phänomenologischen Standpunkt aus diskutiert. Und zwar werden verschiedene, ohne weitere Begründung eingeführte mathematische Gesetze für diese Abhängigkeit mit der Erfahrung verglichen.

G. Heber.

Haar, D. ter and E. Dempsey: The three-dimensional face centred cubic ferromagnet. *Physica* **20**, 437—439 (1954).

Felsenfeld, Gary: A refinement of the Pauling theory of ferromagnetism. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **40**, 145—149 (1945).

Tredgold, R. H.: A modified form of Heisenberg's theory of ferromagnetism. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 148—152 (1954).

Verf. untersucht eine modifizierte Heisenbergsche Theorie des Ferromagnetismus. Er geht aus von orthogonalen Wannier-Funktionen und berücksichtigt auch Austauschintegrale zwischen entfernten als nächsten Nachbarn. Ferner sind die Rechnungen bis zur 3. Näherung im Sinne der Heisenbergschen Arbeit [*Z. Phys.* **49**, 619—636 (1928)] durchgeführt. Es wird wahrscheinlich gemacht, daß es eine bestimmte Abhängigkeit des Austauschintegrals vom Abstand der Zentren der beiden

beteiligten Wannier-Funktionen gibt, bei welcher die empirisch beobachtete Abhängigkeit der Suszeptibilität von der Temperatur oberhalb des Curie-Punktes auch von der hier entwickelten Theorie geliefert wird. *G. Heber.*

Bader, F., K. Ganzhorn und U. Dehlinger: Ferromagnetismus und Bandstruktur der Übergangsmetalle. Z. Phys. **137**, 190—199 (1954).

Es handelt sich um eine halbempirische Theorie. Vorausgesetzt werden ohne strengere Begründung eine Energiebänderstruktur der Übergangsmetalle sowie gewisse Regeln über die Anordnung der Spins der 3d-Elektronen relativ zueinander. Eine Reihe von charakteristischen Eigenschaften der Übergangsmetalle läßt sich dann halbquantitativ verstehen. *G. Heber.*

Naya, Shigeo: On the spontaneous magnetizations of Honeycomb and Kagomé Ising lattices. Progress theor. Phys. **11**, 53—62 (1954).

Die spontane Magnetisierung bei kleinem äußeren Magnetfeld wird für die genannten Gittertypen durch Transformation des entsprechenden Ergebnisses für das Dreieck-Gitter gewonnen. Die Resultate für die verschiedenen Flächengitter werden zusammengestellt und diskutiert. *G. Heber.*

Lucas, Ilse: Zur Spinpräzession in einer schwingenden Bloch-Wand bei kleinen Amplituden. Z. Naturforsch. **9a**, 373—376 (1954).

Verf. bestimmt die Eigenfrequenz einer schwingenden Blochwand unter Benutzung des mikroskopischen Modells dieser Wand. Dabei wird die resultierende Wirkung der Austausch- und Anisotropiekräfte auf die einzelnen Spins durch ein äquivalentes inneres Magnetfeld ersetzt, also eine Art Molekularfeldtheorie der Blochwand eingeführt. Die Spinbewegung stellt Verf. mittels der klassischen Bewegungsgleichung dar. *G. Heber.*

Heber, G.: Zur Ausdehnung der Spinwellentheorie der Ferromagnetica auf höhere Temperaturen. Z. Naturforsch. **9a**, 91—97 (1954).

Es wird eine halbphänomenologische Erweiterung der Spinwellentheorie der Ferromagnetika auf höhere Temperaturen vorgeschlagen. Die exakte Hamiltonfunktion H wird durch eine andere, $H(f)$, approximiert, welche noch gewisse Parameter, f , enthält, die die Bedeutung thermischer Mittelwerte gewisser Größen F haben. Die f werden aus der Bedingung bestimmt, daß die Mittelwerte der F über die mit $H(f)$ gebildete kanonische Gesamtheit gerade f sein müssen; eine Art Selbstkonsistenz-Bedingung. Die Parameter f und damit das Energiespektrum werden dadurch temperaturabhängig. Es zeigt sich, daß auf diese Weise ein Gesetz für die spontane Magnetisierung $M(T)$ erhalten wird, das qualitativ recht gut mit dem experimentellen Verhalten übereinstimmt. Bei tiefen Temperaturen allerdings gehen die Abweichungen vom Blochschen Gesetz $M = a \cdot T^{3/2}$ gerade in der falschen Richtung. *M. R. Schafroth.*

Schafroth, M. R.: Self-consistent spin-wave theory for the ferromagnetic exchange problem. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 33—38 (1954).

Die spontane Magnetisierung wird für tiefe Temperaturen berechnet. Dabei wird die übliche Form des Hamiltonoperators für an den Gitteratomen lokalisierte Spins angenommen und eine Näherung entwickelt, die das Blochsche $T^{3/2}$ -Gesetz der Magnetisierung umfaßt. Die Näherung liefert auch weitere additive Glieder, die mit höheren Potenzen von T verknüpft sind, aber auch schon bei relativ tiefen Temperaturen berücksichtigt werden müssen. *G. Leibfried.*

Néel, Louis: Anisotropie magnétique superficielle et surstructures d'orientation. J. Phys. Radium **15**, 225—239 (1954).

Verf. stellt die magnetische Kristallenergie und die magnetoelastische Energie ferromagnetischer Substanzen dar als Summe von Termen, deren jeder der Wechselwirkungsenergie zwischen zwei benachbarten Atomen entspricht. Auf dieser Grundlage werden die Magnetostriktion und die Kristallenergie behandelt; durch Vergleich mit dem Experiment lassen sich die maßgebenden atomaren Konstanten ermitteln. — Aus obigen Ansätzen folgt auch, daß eine gewisse magnetische Oberflächenanisotropie auftreten sollte, deren Größenordnung mit der der bekannten Anisotropie infolge des entmagnetisierenden Feldes für ferromagnetische Partikel von weniger als 100 Å Durchmesser vergleichbar wird. — Ferner wird gezeigt, daß bei Anwendung des obigen auf binäre ferromagnetische Legierungen die Entstehung einer gewissen Überstruktur beim Glühen des Materials im Magnetfeld und anschließendem Abschrecken verständlich wird.

Verf. diskutiert Einzelheiten dieser Erscheinung z. T. an Hand konkreter Beispiele. — Schließlich zeigt er, daß dieselbe Überstruktur auch durch Warmwalzen gewisser Legierungen und anschließendes Abschrecken erzielt werden kann. Auch dieser Effekt wird unter Angabe verschiedener Beispiele genauer diskutiert.
G. Heber.

Néel, Louis: Surstructures d'orientation dues aux déformations mécaniques. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 305—308 (1954).

Nochmalige Diskussion des im letzten Teil der vorstehenden Arbeit behandelten Gegenstandes: Erzeugung einer magnetisch wirksamen, einachsigen Überstruktur durch mechanische Deformation binärer Legierungen.
G. Heber.

Fletcher, G. C.: Calculations of the first ferromagnetic anisotropy coefficient, gyromagnetic ratio and spectroscopic splitting factor for nickel. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 505—519 (1954).

Die genannten Größen werden mit Hilfe des Stonerschen Kollektivmodells des Ferromagnetismus berechnet. Dabei legt Verf. die von ihm in Blochseher Näherung ermittelte Struktur der Energiebänder des Ni zugrunde (dies. Zbl. **46**, 456). Störungsmäßig (Schrödingersche Störungstheorie) werden die Kristallenergie und die Spin-Bahn-Wechselwirkung berücksichtigt. Der Anisotropiekoeffizient kommt um fast 2 Größenordnungen zu groß heraus, während die beiden g -Faktoren mit den beobachteten Werten besser übereinstimmen. Mögliche Ursachen der Diskrepanzen werden diskutiert.
G. Heber.

Young jr., J. A. and Edwin A. Uehling: The tensor formulation of ferromagnetic resonance. Phys. Review, II. Ser. **94**, 544—554 (1954).

Verf. diskutieren die Abhängigkeit der Erscheinung der ferromagnetischen Resonanz von dem Winkel zwischen der Oberfläche der ferromagnetischen Probe und dem konstanten Magnetfeld genauer. Hierbei benutzen sie die bekannte phänomenologische Grundgleichung [Kittel, Phys. Review, II. Ser. **73**, 155 (1948)] zur Erfassung der Bewegung der Magnetisierung, arbeiten aber bei der Beschreibung des Verhaltens der elektromagnetischen Wellen mit den Maxwell'schen Gleichungen. Die Resultate der Theorie bewahren sich beim Vergleich mit entsprechenden Experimenten an Nickel und Superalloy bei etwa 9200 MHz.
G. Heber.

Reich, K. H.: Die Theorie der ferromagnetischen Resonanz und die Ergebnisse ihrer experimentellen Untersuchung. Z. angew. Phys. **6**, 332—338 (1954).

Lee, E. W.: The approach to saturation magnetostriction. Proc. phys. Soc. Sect. A **67**, 381—383 (1954).

Vautier, Roger: Contribution à l'étude du phénomène de magnétostriction. Ann. de Physique, XII. Sér. **9**, 322—372 (1954).

Im ersten Teil der Arbeit stellt Verf. ausführlich die phänomenologische Theorie der Magnetostriction dar. Er geht dabei besonders auf die spontane Deformation des Gitters und die Abhängigkeit des Effektes von der Form der Probe ein. — In den weiteren Teilen der Arbeit werden experimentelle Resultate mitgeteilt und diskutiert von: Eisen- und Nickel-Einkristallen, Kobalt-Ferriten und Mangan-Zink-Mischferriten.
G. Heber.

Katsura, Shigetoshi: On the theory of cooperative phenomena. Progress theor. Phys. **11**, 476—492 (1954).

Verf. berechnet die Zustandssumme einiger (auch 3-dimensionaler) Isingscher Gitter, die nur aus wenigen Atomen bestehen. Die Resultate werden mit denen für die zugehörigen unendlichen Gitter verglichen. Verf. verwendet seine Ergebnisse zur Diskussion der spontanen Magnetisierung, des Curie-Punktes und der spezifischen Wärme dieser Gitter sowie für Überlegungen zur Theorie der Kondensation.
G. Heber.

Vlasov, K. B. und B. Ch. Ismuchametov: Ferromagnetismus eines Stoffes vom Typus der Ferrite und Antiferromagnetismus. Žurn. eksper. teor. Fiz. **27**, 75—86 (1954) [Russisch].

In der Arbeit wird die quantenmechanische Berechnung der freien Energie und der magnetischen Zustandsgleichung (der Abhängigkeit der Eigenmagnetisierung von der Stärke des Magnetfeldes und der Temperatur, der Suszeptibilität von der

Temperatur) nach der Methode des energetischen Schwerzentrums für Stoffe vom Typus der Ferrite und Antiferromagnetika durchgeführt. Autoreferat.

Lidiard, A. B.: Antiferromagnetism in metals. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 224, 161—176 (1954).

Es wird eine Erklärung des Antiferromagnetismus von Chrom und Mangan im Rahmen des Bändermodells versucht: Die Elektronen mit $+$ -Spin bewegen sich in einem Potential mit der Periode des $+$ -Spin-Untergitters und sind etwas stärker konzentriert bei den Atomen, welche einen $+$ -Spin besitzen, entsprechend sind die $-$ -Spinelektronen stärker bei den Atomen mit $-$ -Spin konzentriert. Die thermischen Eigenschaften der Antiferromagnetika können dann mit Hilfe der vom Ferromagnetismus her bekannten Stonerschen Theorie berechnet werden (dies. Zbl. 20, 277). Insbesondere wird gezeigt, wieso Cr und Mn keine merklichen Anomalien in der spezifischen Wärme und der Suszeptibilität am Curiepunkt zeigen. W. Brenig.

Niira, Kazuo and Takahiko Oguchi: On the magnetic anisotropy energy of FeF_2 . Progress theor. Phys. 11, 425—436 (1954).

Neuere Experimente haben gezeigt, daß die magnetische Anisotropieenergie des FeF_2 (und auch des CoF_2) etwa 100 mal größer ist als die des MnF_2 . Dieser Unterschied wird in der vorliegenden Arbeit dadurch erklärt, daß beim MnF_2 vor allem die magnetische Dipol-Dipol-Wechselwirkung, bei FeF_2 aber überwiegend die Spin-Bahn-Wechselwirkung die erwähnte Anisotropie erzeugt. Genauer diskutieren die Autoren das Zusammenwirken von Spin-Bahn-Wechselwirkung innerhalb der einzelnen Fe-Ionen mit dem Kristall-Stärkeffekt des Grundzustandes dieser Ionen mittels der üblichen Störungstheorie. Auch die Spin-Spin-Wechselwirkung wird in Betracht gezogen, aber als unwesentlich erkannt. G. Heber.

Neugebauer, H. E. J.: Clausius-Mosotti equation for certain types of anisotropic crystals. Canadian J. Phys. 32, 1—8 (1954).

Für ein Kristallgitter aus gleichen Bausteinen wird die Beziehung zwischen Dielektrizitätstensor und dem Tensor der Polarisierbarkeit abgeleitet. Diese Beziehungen werden am Beispiel eines künstlichen Dielektrikums aus parallel angeordneten Metallscheibchen diskutiert. G. Leibfried.

Smart, J. Samuel: Cation distributions in mixed ferrites. Phys. Review, II. Ser. 94, 847—850 (1954).

Verf. benutzt die Boltzmann-Statistik, um die Gleichgewichtsverteilung der Kationen auf die Oktaeder- und Tetraeder-Plätze als Funktion der Temperatur bei Mischferriten zu bestimmen. In Betracht gezogen werden Mischferrite, die entweder zwei Arten von 2-wertigen oder zwei Arten von 3-wertigen Kationen enthalten. Zur Prüfung der Methode wird die Reihe $\text{NiO} \cdot \text{Fe}_{2-2x}\text{Al}_x\text{O}_3$ genauer diskutiert. G. Heber.

Elcock, E. W.: Collective electron antiferromagnetism. Proc. phys. Soc., Sect. A 67, 295—297 (1954).

Morin, F. J.: Lattice scattering mobility in germanium. Phys. Review, II. Ser. 93, 62—63 (1954).

Forsbergh jr., P. W.: Effect of a two-dimensional pressure on the Curie point of barium titanate. Phys. Review, II. Ser. 93, 686—692 (1954).

Turner, C. H. M.: Birefringence in crystals and in the ionosphere. Canadian J. Phys. 32, 16—34 (1954).

Auch nach Einführung einer „effektiven Verschiebung“ \tilde{D} (entsprechend der Summe von Ladungs- und Verschiebungsstrom) ist der Dielektrizitätstensor im Plasma noch keine Diagonalmatrix, wie im Kristall. Diese Schreibweise wird jedoch erreicht, wenn die Felder (statt nach ihren kartesischen Komponenten) nach einer linearen Komponente parallel zum Magnetfeld und zwei zirkularen in der dazu senkrechten Ebene zerlegt werden; die Diagonal-Matrix wird dann komplex. Aus der Normalenfläche ergeben sich die bekannten Zusammenhänge von Brechungsindex und Elektronendichte (statt des vom Verf. benutzten Ausdrucks „critical frequency“ wäre genauer „Plasmafrequenz“ zu schreiben). K. Rauer.

Hittmair, Otto: Das Spektrum von Kristallionen. Acta phys. Austr. 8, 225—233 (1954).

Die vorliegende Arbeit stellt eine Zusammenfassung der Anwendungen gruppen-theoretischer Methoden zur Behandlung des Spektrums von Kristallionen dar, wie sie auf Grund der Arbeiten von H. A. Bethe [Ann. der Physik, V. F. 3, 133 (1929)] und W. Opechowski (dies. Zbl. 23, 302) entwickelt wurden. Dabei findet die Entartung nach Kramers [Nederl. Akad. Wet., Proc. 33, 959 (1930)] Berücksichtigung, die zur Aufstellung der Auswahlregeln auch bei rein elektrischen Feldern wichtig ist. Der Zusammenhang mit der Operation der Zeitumkehr wird übersichtlich klar-gestellt.

P. Urban.

Wolfe, R.: On the theory of optical absorption in metals and semiconductors. Proc. phys. Soc., Sect. A 67, 74—84 (1954).

Verf. berechnet den Absorptionskoeffizienten zunächst „halbklassisch“, indem er ihn klassisch durch die Leitfähigkeit ausdrückt und für diese eine quantenmechanische Formel einsetzt, die Mott für den Fall abgeleitet hat, daß die Streuung lediglich durch Fremdatome mit abgeschirmtem Coulombpotential erfolgt. Dann berechnet er den Absorptionskoeffizienten quantenmechanisch aus dem Ansatz, daß bei Einwirkung des Lichtes Elektronenübergänge im Feld der Fremdatome auftreten. (Im idealen Gitter sind bekanntlich Elektronenübergänge innerhalb eines Bandes verboten.) Die Ergebnisse beider Methoden stimmen für Metalle weitgehend überein. Zur Anwendung auf Halbleiter müßte man bei der Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten an Stelle ebener Wellen genauere Eigenfunktionen verwenden.

G. Höhler.

Reichardt, W.: Modellmäßige Behandlung optischer Elektronenübergänge in Störstellenhalbleitern. I. Z. Phys. 137, 503—515 (1954).

Meyer, H. J. G.: Theory of radiationless transitions of *F* centers. Physica 20, 181—182 (1954).

Brenig, W.: Die Kräfte zwischen den Atomen des festen Körpers. Z. Naturforsch. 9a, 560—561 (1954).

Oldekop, W. und F. Sauter: Zur Theorie der Austrittsarbeit aus Metallen. Z. Phys. 136, 534—546 (1954).

Es wird nachgewiesen, daß die gegenseitige Elektronenpolarisation im Metall notwendig ist für die Existenz einer von Null verschiedenen Austrittsarbeit. Analog zum Debye-Hückelschen Verfahren wird der Polarisationsanteil der Austrittsarbeit mittels Thomas-Fermischer Methode berechnet. Numerische Auswertungen ergeben recht gute Übereinstimmung mit experimentellen Daten.

W. Brauer.

Gunn, J. B.: The theory of rectification and injection at a metal-semiconductor contact. Proc. phys. Soc., Sect. B 67, 575—581 (1954).

Die bisherige Theorie des ebenen Halbleiter-Metall-Kontakts wird durch Berücksichtigung des Einflusses der in der Minderheit befindlichen Ladungsträgerart erweitert. Die Behandlung der Vorgänge folgt dem Vorbild der Shockleyschen Theorie des *p-n*-Kontakts. Gleichrichtercharakteristik und Ladungsträgerinjektion werden diskutiert. Die Ergebnisse können nur in qualitativer Weise auf Punktkontakte übertragen werden.

W. Oldekop.

Lewis, T. J.: The work function of irregular metal surfaces. Proc. phys. Soc., Sect. B 67, 187—200 (1954).

Befindet sich ein Elektron vor einer Metalloberfläche, so erfährt es bekanntlich durch Influenzeffekte eine auf die Metalloberfläche hin gerichtete Kraft, die sogenannte Bildkraft. Es wird gezeigt, daß die Oberflächenrauigkeit einen wesentlichen Einfluß auf die Größe der Bildkraft besitzt. Insbesondere wird der Fall kugel- oder ellipsoidförmiger Höcker auf einer sonst ebenen Oberfläche untersucht und festgestellt, daß durch diese das Bildkraftpotential gegenüber der ideal ebenen Oberfläche leicht bis zu 50% erniedrigt werden kann. Da die Austrittsarbeit der Elektronen wesentlich von der Größe der Bildkräfte abhängt, ist bei rauen Oberflächen eine Erniedrigung der Austrittsarbeit zu erwarten. Die sich ergebenden Konsequenzen für die Theorie der Elektronenemission aus Metalloberflächen werden kurz diskutiert.

W. Oldekop.

Klemens, P. G.: The thermal conductivity of monovalent metals. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 194—196 (1954).

Makinson, R. E. B.: The thermal conductivity of metals. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 290—291 (1954).

Homilius, J. und W. Franz: Räumliche Verallgemeinerung der Zenerschen Formel für die innere Feldemission. Z. Naturforsch. **9a**, 5—14 (1954).

Hunter, L. P.: Graphical representation of the semiconductor Hall effect. Phys. Review, II. Ser. **94**, 1157—1160 (1954).

Laplume, Jaques: Calcul du courant de recombinaison en surface dans le transistor à jonction obtenu par fusion. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1107—1109 (1954).

Scott, Allen B.: The surface energy of sodium. Philos. Mag., VII. Ser. **45**, 1173—1176 (1954).

Wick, R. F.: Solution of the field problem of the germanium gyrator. J. appl. Phys. **25**, 741—756 (1954).

Unter einem Gyrator wird eine Anordnung verstanden, in der sich zwischen zwei Magnetpolen senkrecht zur Nord-Süd-Achse ein (Germanium-) Plättchen befindet, an dessen vier Schmalseiten je eine Elektrode angebracht ist. Die Arbeit gibt eine Lösung für das hier auftretende Halleffekt-Problem für eine beliebige Größe der Elektroden und eine beliebige Feldstärke. Dabei wird nur ein Typ von Ladungsträgern vorausgesetzt und von einer Oberflächenrekombination abgesehen. Da bei der Lösung die konforme Abbildung benutzt wird, muß vorausgesetzt werden, daß das ganze Problem stets zweidimensional bleibt, also etwa die Stromdichte nicht in der z -Richtung variiert. Die Behandlung erstreckt sich auf verschiedene, nicht nur rechteckige Begrenzungen des Plättchens. Einige der Resultate wurden experimentell mit Feldern bis zu 22000 Gauß geprüft. *H. Haken.*

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

Rasmusen, H. Q. and O. K. Hesselberg: An appropriate method for integration of the motion of periodic comets. Danske Vid. Selsk., mat., fys. Medd. **28**, Nr. 19, 40 p. (1954).

Bei der exakten Berechnung von Kometenbahnen durch numerische Integration macht die Berücksichtigung der Störungen durch die vier inneren Planeten einige Schwierigkeiten, da die mittlere Bewegung dieser Planeten so groß ist, daß man keine Integrationsintervalle > 20 Tage benutzen kann, solange die Entfernung des Kometen von der Sonne < 4 —5 astronomische Einheiten ist. Nur die Merkurstörungen kann man genau genug berechnen, indem man die Merkurmasse zur Sonnenmasse addiert und die Bewegung auf den Schwerpunkt Sonne-Merkur bezieht. Das gleiche Verfahren kann man auch auf Venus, Erde und Mars ausdehnen, wenn der Komet die Jupiterentfernung überschritten hat. Bei Kometen mit stark exzentrischen Bahnen muß man während der Rechnung das Verfahren von Zeit zu Zeit wechseln, wodurch leicht Unstetigkeiten in den Differenzen auftreten können. Verf. schlägt ein neues Verfahren vor, in dem generell der Koordinatenanfangspunkt des Systems in den Schwerpunkt Sonne + innere Planeten verlegt wird, die Störungen von Venus, Erde und Mars auf die Sonne stets und die auf den Kometen nur dann vernachlässigt werden, wenn der Komet genügend weit entfernt ist. Auch hier ist der wechselseitige Gebrauch zweier Formelsysteme nötig, der aber nur in seltenen Ausnahmefällen den glatten Verlauf der Differenzen beeinträchtigen wird. Ein Rechenbeispiel und eine umfangreiche Tabelle der negativ genommenen Sonnenkoordinaten bezüglich des Schwerpunktes Sonne + innere Planeten von 1920—1960 in zehntägigen Intervallen sind der Abhandlung beigegeben. *K. Stumpff.*

Gremillard, Jean: Sur les racines d'une équation de la théorie des solutions périodiques de la troisième sorte. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 153—155 (1954).

Von Zeipel hat (1904) einen Satz aufgestellt, der die Anfangswerte der mittleren Längen betrifft, die periodischen Lösungen des Dreikörperproblems von der dritten Gattung entsprechen. Verf. gibt für diesen Satz, der bei von Zeipel ungenügend begründet wurde, einen exakten und vollständigen Beweis. *K. Stumpff.*

Radsijewski, W. W.: Der räumliche Fall des begrenzten Problems dreier strahlender und gravitierender Körper. (Übersetzt von F. Bartels.) Sowjetwiss., naturw. Abt. **7**(1954), 397—406 (1954).

Das Schema dieser Übersetzung ist erschienen in *Astron. Žurn.* **30**, 265—273 (1953). Eine Variante des restringierten Dreikörperproblems (unendlich kleine Masse im Felde zweier endlicher Massen, die in Kreisbahnen umeinander laufen) ergibt sich, wenn die beiden großen Massen oder eine von ihnen Photogravitationswirkung (Strahlungsdruck) aufeinander ausüben. Verf. untersucht die Gestalt der Hillschen Grenzfällen, auf denen die Geschwindigkeit der kleinen Masse null ist, und die Lage der auftretenden Librationszentren. Es gibt deren außer den klassischen Punkten L_1, \dots, L_5 unter gewissen Bedingungen noch zwei weitere, die „komplaren“ Librationszentren L_6 und L_7 , die außerhalb der Bahnebene der endlichen Massen liegen. Für verschiedene Durchmesser und Dichten der kleinen Masse ergeben sich für die Librationszentren geometrische Örter (Librationsachsen). Der Durchgang der Erde durch die Librationsachsen des Systems Sonne-Jupiter könnte sich eventuell durch verstärktes Leuchten des Nachthimmels verraten. Auch könnte die Entstehung quasiparabolischer Kometen aus der Ansammlung interplanetarer Materie auf den Librationsachsen erklärt werden. *K. Stumpff.*

Contopoulos, Georg: Beitrag zur Dynamik der Kugelsternhaufen. *Z. Astrophys.* **35**, 67—73 (1954).

Die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes innerhalb eines kugelförmigen Sternsystems mit irgendeiner Dichtefunktion $\rho(r)$ werden untersucht und integriert; eine Diskussion der gefundenen Lösung ergibt, unter welchen Bedingungen die Bahn geschlossen ist. Als Beispiel wird am Schluß der Fall einer isothermen Dichteverteilung behandelt. *F. Schmeidler.*

Cox, J. F. et F. H. van den Dungen: Comparaison des déplacements sur la sphère céleste et sur la sphère terrestre de l'axe instantané de rotation de la terre. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci. V. Sér.* **40**, 768—778 (1954).

Sidentopf, Heinrich: Methoden und Ergebnisse der Radioastronomie. II. *Z. angew. Phys.* **6**, 422—430 (1954).

Bericht.

Holmberg, Erik: On the masses of double galaxies. *Fysiogr. Sällsk. Lund Förh.* **24**, Nr. 11, 20 p. (1954).

Die Arbeit handelt von der Ermittlung der mittleren Massen von Doppelsystemen aus den der Beobachtung zugänglichen Größen. Die Ergebnisse werden dann angewandt auf Doppelsterne und insbesondere auf Doppelnebel. Außer den mittleren Massen wird auch das mittlere Verhältnis von Masse zu Leuchtkraft für die Doppelnebel abgeleitet. *H. Vogt.*

Chandrasekhar, S.: The instability of a layer of fluid heated below and subject to the simultaneous action of a magnetic field and rotation. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **225**, 173—184 (1954).

Es wird der Einfluß eines Magnetfeldes und einer Coriolis-Beschleunigung auf die thermische Instabilität einer horizontalen, von unten erhitzten Flüssigkeitsschicht untersucht. *H. Vogt.*

Sen, N. R. and T. C. Roy: On a steady gravitational field of a star cluster free from singularities. *Z. Astrophys.* **34**, 84—90 (1954).

Durch eine geeignete statistische Verteilung von in Kreisbahnen sich bewegenden Sternen wird nach einer von Einstein vorgeschlagenen Methode ein stationäres Gravitationsfeld eines kugelförmigen Sternhaufens konstruiert, wobei sowohl der innere als auch der äußere Teil des Feldes frei von Singularitäten sind und das äußere Feld stetig in das allgemeine Feld des expandierenden Universums übergeht. Anschließend werden noch einige physikalische Eigenschaften des Feldes diskutiert. *H. Vogt.*

Sedov, L. I.: Über theoretische Formeln für die stellaren Gesetzmäßigkeiten „Helligkeit – Masse“ und „Radius – Masse“. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 643–646 (1954) [Russisch].

In den Grundgleichungen des Sternaufbaues werden bei Vernachlässigung des Strahlungsdrucks für das Molekulargewicht, den Absorptionskoeffizienten und die Energieerzeugung in Abhängigkeit von Dichte und Temperatur verallgemeinerte Potenzprodukte mit im ganzen sechs willkürlich wählbaren Exponenten angesetzt und damit in Anlehnung an B. Strömgren eine entsprechend parameterreiche Masse-Leuchtkraft-Radius-Beziehung abgeleitet. *H. Bucerius.*

Lüst, R. und A. Schlüter: Kraftfreie Magnetfelder. Z. Astrophys. **34**, 263–282 (1954).

Es wird die Bedeutung von kraftfreien Magnetfeldern, d. h. von Magnetfeldern mit verschwindender Lorentzkraft, für den Kosmos erörtert, und zwar wird dabei in erster Linie an Magnetfelder gedacht, wie sie in der Umgebung eines magnetischen Sternes auftreten können. *H. Vogt.*

Wilkes, M. V.: A table of Chapman's grazing incidence integral $\text{Ch}(x, \chi)$. Proc. phys. Soc., Sect. B. **67**, 304–308 (1954).

Die Funktion $\text{Ch}(x, \chi) = x \sin \chi \int_0^{\chi} \exp\left(x - \frac{x \sin \gamma}{\sin \gamma'}\right) \text{cosec}^2 \gamma' d\gamma'$, die eine Rolle spielt in der Chapmanschen Theorie der Absorption der solaren Strahlung durch eine exponentielle Atmosphäre, wird mit Hilfe der elektronischen Rechenmaschine EDSAC berechnet. Die Funktionswerte werden auf drei Dezimalen in einer Tabelle angegeben für $50 \leq x \leq 500$ in Intervallen von 50, für $500 \leq x \leq 1000$ in Intervallen von 100 und für $20^\circ \leq \chi \leq 100^\circ$ in Intervallen von 1° , wobei Funktionswerte größer als 100 weggelassen sind. *R. Lüst.*

Reiz, A.: Formulae and tables for the numerical computation of mean intensities and fluxes in a stellar atmosphere. Ark. Astron. **1**, 475–482 (1954).

Für die in der Theorie der Sternatmosphären häufig auftretenden Integrale der Form $I = \int_0^{\tau} f(t) E_{1,2}(\tau - t) dt$ [$E_{1,2}(\tau - t) = \text{Exponentialintegral 1. bzw. 2. Ordnung}$] werden Approximationsformeln nach der Newton-Coteschen Methode in Form von $\frac{1}{2} I = \sum_{i=1}^5 p_i(\tau) f(t_i)$ abgeleitet. Die Gewichte p_i und die äquidistanten Argumente t_i werden als Funktionen von τ für $0.1 \leq \tau \leq 4.9$ in Intervallen von 0.1 angegeben. *R. Lüst.*

Labs, D.: Untersuchungen zur inkohärenten Streuung in Fraunhoferlinien. II. Z. Astrophys. **34**, 173–181 (1954).

Fortsetzung der Arbeit des Verf., dies. Zbl. **42**, 239, unter den gleichen vereinfachenden Annahmen, jedoch mit einer Kirchhoff-Planck-Funktion der Form $B_\nu = B_0(1 - \beta_0 \tau - C e^{-\tau})$. Graphische Darstellung für die Mitte-Rand-Variation der Einsenkung für die Linienflügel in einem weiten Bereich der Parameter β_0 und C . *G. Burkhardt.*

Stibbs, D. W. N.: On a problem in the theory of formation of absorption lines. Monthly Not. Roy. astron. Soc. **113**, 493–504 (1954).

Vorgegeben ist eine planparallele Atmosphäre, deren Kirchhoff-Planck-Funktion linear mit der optischen Tiefe wächst. Das Verhältnis von Linien- zu kontinuierlicher Absorption soll unabhängig von der Tiefe sein, die Streuung in der Linie aus einem kohärenten und einem inkohärenten Anteil zusammengesetzt sein. Die inkohärente Emissionswahrscheinlichkeit wird proportional zu dem Linienabsorptionskoeffizienten und zu der Intensität in der Linienmitte angenommen. Je nach dem Verhältnis der beiden Anteile wird so die Bildung von „subordinate“ Linien oder von Resonanzlinien mit Stoßverbreiterung beschrieben. Die Streufunktion der Atmosphäre wird aus einem Invarianzprinzip für die diffuse Reflexion einer semiinfiniten planparallelen Atmosphäre bestimmt und damit die Winkelverteilung der austretenden Intensität gefunden. Die allgemeine Lösung hängt ab von gewissen Funktionen, welche zwei simultanen

linearen Integralgleichungen genügen; die Lösung für nur inkohärente Streuung von H -Funktionen und ihren Momenten. *G. Burkhardt.*

Schatzman, Evry: Sur une nouvelle théorie de la granulation solaire. II. Propagation dans une atmosphère isotherme. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **40**, 139—142 (1954).

Moran, P. A. P.: Some experiments on the prediction of sunspot numbers. J. Roy. statist. Soc., Ser. B **16**, 112—117 (1954).

Ginzburg, V. L.: Über die Rotverschiebung im Spektrum der Sonne und der Sterne. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 617—620 (1954) [Russisch].

Plumpton, C. and V. C. A. Ferraro: On the magnetic oscillations of a gravitating liquid star. Monthly Not. Roy. astron. Soc. **113**, 647—652 (1954).

Es werden die Schwingungen untersucht, die ein inkompressibler Stern unter dem Einfluß eines zentralen magnetischen Dipols und der Eigengravitation ausführen kann, und die Ergebnisse werden dann im Zusammenhang mit der Schwingungstheorie magnetischer veränderlicher Sterne diskutiert. *H. Vogt.*

Garibjan, G. M. und I. I. Goldman: Die Polarisation relativistischer Elektronen bei Bewegung in Magnetfeldern von Nebeln und Sternen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, fiz.-mat. estest. techn. Nauki **7**, Nr. 2, 31—41 (1954) [Russisch].

Matschinski, M.: Quelques considérations sur la théorie mathématique des tafoni. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **16**, 632—636 (1954).

Charney, J. G.: Numerical prediction of cyclogenesis. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 99—110 (1954).

Slichter, L. B.: Seismic interpretation theory for an elastic earth. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **224**, 43—63 (1954).

Die Hauptaufgabe der Seismik ist die Bestimmung der elastischen Konstanten der Erde als Funktion der Tiefe aus den Beobachtungen der Bodenbewegungen an der Erdoberfläche, die von Erdbeben oder Explosionen hervorgerufen werden. Hierzu sieht ein von Wiechert und Herglotz geschaffenes Verfahren zur Verfügung, welches auf dem Fermatschen Prinzip beruht. Von den Beobachtungen werden dabei nur die Ankunftszeiten diskreter Einsätze benutzt. Man erhält als Ergebnis die Geschwindigkeiten von Longitudinal- und Transversalwellen als Funktionen der Tiefe. In der vorliegenden Arbeit wird das Problem als „Interpretations-“ oder inverses Randwertproblem behandelt: Für eine isotrope Erdkugel werden die Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie aufgestellt, dann sind die Laméschen Konstanten und die Dichte unbekannte Funktionen des Abstandes vom Mittelpunkt. Diese Funktionen lassen sich aus den Beobachtungen der Verrückungen an der Oberfläche bestimmen, die durch eine zeitlich veränderliche Druck- und Spannungsbeanspruchung bewirkt werden. Eine Reihe von Spezialfällen wird durchgerechnet. Im Gegensatz zu den klassischen Verfahren wird ein sehr hoher Rechenaufwand benötigt. *W. Kertz.*

Haalek, H.: Die Gezeitenbewegungen des festen Erdkörpers und die dadurch für sehr genaue Gravimetermessungen notwendig werdenden Korrekturen. Gerlands Beiträge Geophys. **64**, 1—15 (1954).

Es werden in vereinfachter Form die wesentlichsten aus der Theorie der Gezeiten des festen Erdkörpers sich ergebenden Zusammenhänge, welche die Größe der Gezeitendeformation und die Störungen der Schwerkraft in Größe und Richtung betreffen, zusammengestellt und daraus abgeleitet, welche Korrekturwerte an die Meßergebnisse sehr genauer Gravimetermessungen angebracht werden müssen, wenn deren instrumentelle Meßgenauigkeit voll ausgenutzt werden soll. An Hand eines praktischen Berechnungsbeispiels wird dem praktischen Geophysiker die Handhabung des astronomischen Jahrbuches und der Berechnungsgang der Korrekturwerte erläutert. *Autoreferat.*

Miller, G. F. and H. Pursay: The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **223**, 521—541 (1954).

Für das Feld in einem beliebigen Punkt eines elastischen Halbraumes, dessen Oberfläche durch sinusförmig variierende Drucke beansprucht wird, werden Integralausdrücke angegeben. Aus diesen Integralen werden asymptotische Lösungen für das

Feld im Unendlichen abgeleitet. Die Lösungen werden weiterhin zur Berechnung des Wellenwiderstandes der Erregungsquellen benutzt. *W. Kertz.*

Goldsbrough, G. R.: Wind effects on the motion of the sea in an infinite channel and in a rectangular gulf. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **222**, 477—489 (1954).

Verf. untersucht die Bewegung der Wasseroberfläche in einem unendlich langen Kanal endlicher Tiefe mit rechteckigem Querschnitt, der entweder in Längs- oder in Querrichtung vom Wind angeblasen wird. Bei der Rechnung werden lediglich die Corioliskraft der Erddrehung, die Schwere sowie Zähigkeitskräfte (mit als konstant angenommener scheinbarer kinematischer Zähigkeit) berücksichtigt, während Trägheitskräfte vernachlässigt werden. Bei einer Wassertiefe $h = \frac{1}{2} \pi v / 2 \Omega \sin \Phi$ (v scheinbare kinematische Zähigkeit, Ω Winkelgeschwindigkeit der Erde, Φ geographische Breite) und Vielfachen davon bleibt der Wasserspiegel in Ruhe, wenn der Wind in Querrichtung bläst. Für $v = 100 \text{ cm}^2 \text{ sec}$ und $\Phi = 50^\circ$ ergibt sich $h = 41 \text{ m}$. Bei Zwischenwerten ist auf der einen Karvalseite die Wasserfläche erhöht, auf der anderen erniedrigt. Bläst der Wind in Kanalrichtung, so tritt der gleiche Fall bei der Hälfte der genannten Tiefe sowie ungeraden Vielfachen davon ein. Die Oberflächenform wird wesentlich abgeändert, wenn das eine Ende des Kanals geschlossen ist. Die für diesen Fall erhaltenen Rechenergebnisse werden für ein idealisiertes Nordsee-Modell diskutiert. *W. Wuest.*

Stoneley, R.: Rayleigh waves in a medium with two surfaces layers. Monthly Not. Roy. astron. Soc., geophys. Suppl. **6**, 610—615 (1954).

Die Ausbreitung von Rayleighwellen in einem elastischen Halbraum mit zwei Bedeckungsschichten wird untersucht. Die Wellen zeigen Dispersion. Für ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit erhält man eine zehnstufige Determinante. Aus dieser läßt sich eine Reihe bekannter Spezialfälle ableiten. Numerische Ergebnisse, die für eine Anwendung in der Seismik geeignet sind, sollen in einer späteren Arbeit mitgeteilt werden. *W. Kertz.*

Rogers, M. H.: The forced flow of a thin layer of viscous fluid on a rotating sphere. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **224**, 192—208 (1954).

Verf. untersucht die Strömungsverhältnisse in einer dünnen, sphärischen Flüssigkeitsschicht unter Berücksichtigung von Rotation, Reibung und Wärmeleitung und vergleicht die Ergebnisse seiner Rechnung mit der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre. Unter den üblichen vereinfachenden Annahmen werden Bewegungsgleichungen, Kontinuitätsbedingung und Wärmeleitungsgleichung aufgestellt und — zuerst in linearer Näherung, dann unter Berücksichtigung der nichtlinearen Terme — mittels Reihenentwicklung integriert. Die Lösungen der linearisierten Gleichungen ergeben Unabhängigkeit der Vertikalgeschwindigkeit von der Höhe. Die Berücksichtigung der nichtlinearen Terme zeigt hingegen ein wesentlich anderes Bild: die (absteigende) Vertikalströmung weist ein Maximum bei 25° N auf, während die Vertikalströmung südlich von 18° S aufwärts gerichtet ist. Ferner ergibt die Berücksichtigung dieser Terme Ostströmung zwischen Äquator und 10° N , was mit den tatsächlichen atmosphärischen Verhältnissen annähernd übereinstimmt. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Wirkung der nichtlinearen Terme in mittleren und höheren Breiten vernachlässigt werden kann, jedoch in den niederen Breiten das Strömungsbild wesentlich beeinflusst. *H. Nabl.*

Davies, D. R.: On diffusion from a continuous point source at ground level into a turbulent atmosphere. Quart. J. Mech. appl. Math. **7**, 168—178 (1954).

Benjamin, T. B. and M. J. Lighthill: On cnoidal waves and bores. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **224**, 448—460 (1954).

Bei der Berechnung von Schwerewellen in einem Kanal erweist es sich als zweckmäßig den „horizontalen Fluß“ einzuführen. Diese Rechengröße wird bei der Behandlung langer Wellen benutzt und die Theorie der cn-Wellen [nach der elliptischen Funktion $\text{cn}(x)$] neu dargestellt. Es wird ein Diagramm gegeben, aus dem man den Verlauf spezieller Wellenzüge, insbesondere hinter einer Bore, ablesen kann. *W. Kertz.*

Darwin, Sir Charles: Electron inertia and terrestrial magnetism. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **222**, 471—476 (1954).

Der Einfluß der Trägheit der Elektronen auf das Magnetfeld der Erde bei beschleunigter oder verzögerter Erdrotation wird untersucht. Es zeigt sich, daß der dadurch bewirkte Effekt wegen seiner Kleinheit bedeutungslos ist. *W. Kertz.*

Milin, V. B.: Über anomale elektrische Felder in der Atmosphäre. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 983—986 (1954) [Russisch].

Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem mit römischen Ziffern angegeben Stichwort die Mitteilungsnummer

- Aahoe, Asger (Al-Kāshī's iteration method) 1.
- Abbott, J. A. and H. C. Bolton (Polarizability of helium) 232.
- Abdel-Aty, S. H. (k -statistics) 128.
- Abdel-Messih, Moheb Aziz (Erzeugung von Funktionen mit Potentiometern) 363.
- Abeles, B. and S. Meibom (Galvanomagnetic effects in germanium) 446.
- Abhyankar, S. S. (Positive polynomials) 13.
- Abraham, G. ((d, p) scattering cross sections) 226.
- Abramov, A. A. (Abrundungsfehler bei linearen Gleichungen) 350.
- Abramowitz, Milton and H. A. Antosiewicz (Coulomb wave functions) 424.
- — — Philip Rabinowitz (Coulomb wave functions) 424.
- Achiezer, A. I. (Ausstrahlung von Photonen) 428.
- N. I. (Beste Annäherung auf der ganzen Achse) 294.
- Ackeret, J. (L. Prandtl) 2.
- Aczél, J. (Einige Funktionalgleichungstypen) 110; (Hausdorffsche Axiome) 412.
- Adirovič, E. I. und M. I. Podgoreckij (Wechselwirkung von Mikrosystemen) 216.
- Adkins, J. E. (Shear problem) 181.
- Agarwal, R. P. (Bessel polynomials) 301; (Basic hypergeometric functions) 302.
- Agmon, Shmuel (Linear inequalities) 350.
- Agnew, Ralph P. (Mercer's summability theorem) 57; (Abel and Riesz transforms) 290; (Central limit theorem) 367.
- Agranovič, M. S. (Verträglichkeit gewisser Summationsmethoden) 293.
- Ahmad, Mansoor (Theorem of Borel) 70; (Exceptional values of entire functions) 70.
- Aitken, A., H. Mahmoud, E. M. Henley, M. A. Ruderman and K. M. Watson (Relationships between π -meson nucleon scattering and π -meson production) 429.
- Aiyer, K. Rangaswami s. Rangaswami Aiyer, K. 142.
- Ajzenštāt, N. D. s. M. A. Krejnes 361.
- Ajzerman, M. A. und F. R. Gantmacher (Stabilitätsgebiet für ein automatisches Regulierungssystem) 319.
- Akbar-Zadeh, Hassan (Variété finisérienne) 406.
- Akeley, E. S. s. I. Jacobs 207.
- Akiba, Tomoya and Katsuro Sawada (Effective Hamiltonian for pseudoscalar meson) 430.
- Albert, A. A. (Right alternative algebras) 265.
- G. E. (Sampling characteristics) 374.
- Alexander, Mary K. s. H. S. Thurston 12.
- Alexandroff (Aleksandrov), P. S. (Folgerungen aus dem zweiten Dualitätsgesetz von Sitnikov) 164; (Gruppentheorie) 251.
- Alexandrov, A. D. (Synthetic methods) 409.
- Allen, D. N. de G. (Relaxation methods) 349.
- Allis, W. P. and D. J. Rose (Ambipolar diffusion) 237.
- Alpher, Ralph A. and Robert J. Rubin (Reflection of shock waves) 197.
- Altman, M. (Linear transformations in Banach spaces) 344.
- Amato, V. (Sistema di equazioni differenziali) 82.
- Amitsur, A. S. (Differential polynomials) 29; (Non-commutative cyclic fields) 30.
- S. A. (Radicals. II.) 26; (III.) 27.
- Anderson, R. L. (Autocorrelation in regression analysis) 134.
- Andreev, A. I. (Energie-niveau von helium-ähnlichen Atomen) 233.
- Andreoli, Giulio (Matematiche superiori. I. II. III.) 6; (Funzioni ortogonali) 294.
- Andrew, G. M. (Controlled motion) 174.
- Andrunakievič, V. A. (Radikal in verallgemeinerten Q -Ringen) 266.
- Ankeny, N. C. (Quadratic residues) 37.
- Anscombe, F. J. and E. S. Page (Sequential tests) 131; (Inspection rectifiante d'un lot) 137.
- Antosiewicz, H. A. s. M. Abramowitz 424.
- Aoki, Kiyoshi (Invariants of mappings) 166.
- Apostol, T. M. (Series involving Riemann zeta function) 69.
- Appel, J. (Galvanomagnetische Effekte) 447.
- Apte, Madhumalati (Variétés hermitiques) 157.
- Ara, Rahmat und M. Pinl (Integrallose Darstellung isotroper Kurven) 398.
- Araki, Gentaro and Huzihiro Araki (Interaction between electrons) 234.
- Huzihiro s. G. Araki 234.
- Arbous, A. G. and H. S. Sichel (Analysis of absenteeism data) 137.
- Argence, Émile et Marcel Mayot (Couche ionosphérique régulière) 202.
- Arkad'ev, Vladimir Konstantinovič 244.
- Armellini, Giuseppe (Variazione dell'eccentricità) 240.
- Arnowitz, R. and S. Gasiorowicz (Negative energy components in two-nucleon system) 215.
- Aronofsky, J. S. (Gas slip on unsteady flow) 199.
- Arrow, Kenneth J. and Gerard Debreu (Equilibrium

- for a competitive economy) 380.
- Arvesen, Ole Peder (Paraboles) 145.
- Asatur, K. G. (Instationäre Bewegung des Grundwassers) 198.
- Askafjan, G. A. (Pulsation der Mesonenhülle eines Nukleons) 429.
- Asselmeyer, Fritz (Kugelsonnenpiegel für Röntgenstrahlung) 443.
- Atkin, A. O. L. and P. Swinerton-Dyer (Partitions) 38.
- Atkins, K. R. (Helium films) 239.
- Aubert, Karl Egil (Bewertungen) 32.
- Audin, Maurice (Singularités des transformations linéaires bornées) 108.
- Auluck, F. C. and D. S. Kothari (Generation of pions) 218; (Random fragmentation) 370.
- Ayant, Yves (Raies de résonance magnétique nucléaire) 224.
- Azleckij, S. P. (Normalreihen Sylowscher Klassen) 18.
- Babkin, B. N.** (Randwertaufgabe für gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung) 316.
- Bachmann, Heinz (Normalfunktionen und Hauptfolgen) 49.
- K.-H. (Lösung von Gleichungen durch inverse Interpolation) 351.
- Bachrach, L. D. (Richtwirkung einer Antenne) 203.
- Backes, F. (Certains réseaux) 152; (Problèmes de dynamique) 173.
- Bader, F., K. Ganzhorn und U. Dehlinger (Ferromagnetismus) 448.
- Baebler, F. (Zerlegungssatz von Petersen) 171.
- Baer, Reinhold (Direkte Faktoren) 254.
- Bagchi, Hari Das (Equimomental complex of rigid body) 173.
- — — and Bhola Nath Mukherjee (Operational representations of special functions) 64.
- — — — Shib Sankar Sarker (Collineations in a plane) 144.
- Bailey, Martin J. (Edgeworth's taxation paradox) 137.
- Norman T. J. (Queueing processes) 369.
- W. N. (E. W. Barnes) 244.
- Baker, G. A. (Effect of selection) 378.
- N. s. O. Bergmann 213.
- jr., G. A. (Einstein numbers) 32.
- Bakke, F., H. Olsen, H. Wergeland and H. Øveraas (Integration of Hamiltonian equations) 172.
- Balachandran, V. K. (Σ -rings of subsets) 280.
- Balaguer, F. Sunyer i s. Sunyer i Balaguer, F. 54, 288.
- Baldin, A. (Isotopieinvarianz des π -Mesonfeldes) 218.
- Ball, B. J. (Countable paracompactness) 413.
- Balliccioni, A. (Coordonnées barycentriques) 145.
- Ballinger, R. A. and N. H. March (Thomas-Fermi method) 212.
- Bambah, R. P. (Lattice coverings with spheres) 42.
- Banerjee, M. K. and A. K. Saha (β -decay) 228.
- Banks, Charlotte (Crop productivity) 378.
- W. H. and C. C. Mill (Liquids between rotating rollers) 186.
- Baranger, E. s. D. R. Yennie 228.
- Barbašin, E. A. and N. N. Krasovskij (Ljapunovsche Funktionen) 320.
- Barbuti, Ugo (Teoremi di stabilità) 315.
- Bargmann, V. (Continuous groups) 103.
- Bari, N. K. (Ungleichungen von S. N. Bernštejn und A. A. Markov) 61.
- Barlotti, Adriano (Teoremi relativi al triangolo) 140; (Quartiche piane dotate di un tacnodo simmetrico) 146.
- Barna, Béla (Divergenzpunkte des Newtonschen Verfahrens. I.) 111.
- Barnard, G. A. (Decision functions) 129.
- Baron, M. L. s. H. H. Bleich 183.
- Barrett, P. R. s. T. W. Chaundy 241.
- Barrière, Robert Pallu de la s. Pallu de la Barrière, Robert 339.
- Barrow, D. F. and A. C. Cohen jr. (Functions involving Mill's ratio) 374.
- Barry, John V. (Ordered sets of projections) 108.
- Bartsch, Helmut (Kleinste charakterische Zahl einer hermiteschen Matrix) 12.
- Bass, J. (Space and time correlations. I.) 192.
- Basu, D. (Multistage sampling problems) 377; (Pseudoscalar interaction) 432.
- S. K. (Hypergeometric summability) 57; (Hausdorff methods equivalent to identity) 290.
- Batchelor, G. K. (Skin friction on infinite cylinders) 186.
- — — and Ian Proudman (Rapid distortion of a fluid) 192.
- Bateman, P. T. and S. Chowla (Conjectures in the theory of numbers) 275.
- Bates, D. R., R. T. S. Darling, S. C. Hawe and A. L. Steart (Hydrogen molecular ion. IV.) 235.
- — — and G. W. Griffing (Collisions between heavy particles. II.) 236.
- — — and H. S. W. Massey (Slow inelastic collisions) 236.
- — — and B. L. Moiseiwitsch (Heavy particle collisions. I.) 236.
- Batey, Charles s. T. W. Chaundy 241.
- Batley, J. F. s. S. Viswanathan 446.
- Bauer, A. (Kathodenfall in Lichtbögen) 238.
- Friedrich L. (Rang de l'algèbre de matrices) 213.
- — — s. K. Samelson 362.
- Baumgartner, L. (Geometrie im Raum von vier Dimensionen) 383.
- Bautin, N. N. (Differentialgleichungssystem) 318.
- Bayet, Michel (Plasmas soumis à un champ magnétique) 237.
- — — Jean-Loup Delcroix et Jean-François Denisse

- (Équation de Boltzmann) 237.
- Beatty, S. (Ruled surfaces) 152.
- Beauregard, Olivier Costa de s. Costa de Beauregard, Olivier 212.
- Bechert, H. (Kräfteumlagerungen bei einem Betonbalken) 182.
- Bechhofer, Robert E. (Decision procedure for ranking means of normal populations) 130.
- Becker, Oskar (Grundlagen der Mathematik) 242.
- Richard (Stationäre statistische Funktionen) 199.
- Beesley, E. M. (Differentiability of functions of class p) 285.
- Behnert-Smirnov, K. N. (Gleichgradige Stetigkeit von Funktionenmengen) 56.
- Behnke, H. und K. Stein (Severischer Satz über analytische Fortsetzung) 75.
- Behrend, F. A. (Steinitz-Gross theorem) 393.
- Bell, D. A. (Statistics of a population) 135.
- D. G., R. Hensman, D. P. Jenkins and L. Pincherle (Band structure of silicon) 445.
- P. O. (Nets in projective n -space) 401.
- Bellman, Richard and Alan Hoffman (Theorem of Ostrowski and Taussky) 11.
- Benedicty, Mario (Caratteri di matrici) 389; (Varietà $\omega M \omega_{-1} = 0$) 389.
- Bengston, J. s. R. M. Thaler 221.
- Benjamin, T. B. and M. J. Lighthill (Cn-oidal waves and bores) 456.
- Bennett, J. H. (Distribution of heterogeneity upon inbreeding) 380.
- Benoist, Pierre (Rayonnement nucléaire et rayonnement X) 226.
- Berestekij, V. B. (Winkelverteilung von π -Mesonen) 434.
- Bergen, A. C. van den s. L. J. F. Broer 197.
- Berger, J. M. (Deuteron photodisintegration) 223.
- Bergman, Gösta (Exceptional points of cubic curves) 35; (Exceptional group of a Weierstrass curve) 269.
- Bergmann, O. and N. Baker (Dirac equation) 213.
- Berman, D. L. (Gewisse lineare Operationen) 344.
- Bernard, Michel-Yves (Divergence créée par les coupures accélératrices) 206.
- Bernays, Paul (Axiomatic set theory. VII.) 46.
- Bernoulli, Daniel (Measurement of risk) 120.
- Bernstein, Ira B. and T. Holstein (Energy distributions in stationary discharges) 439.
- Berry, Clifford E. (Ion trajectories) 206.
- J. G. s. P. M. Naghdi 178.
- Bertolini, Fernando (Problema di Cauchy in due variabili indipendenti. I.) 89; (Problema di Cauchy in tre variabili indipendenti) 331.
- Bertotti, B. (Fundamental tensor and affinity) 210.
- Besicovitch, A. S. (Approximation to Borel sets by F_σ -sets) 285.
- Best, G. C. (Minimum problem) 114.
- Bethe, H. A. and L. C. Maximon (Bremsstrahlung and pair production. I.) 217.
- — — s. G. Breit 213.
- — — s. H. Davies 217.
- Beyer, Gudrun (Einbettungstheorie galoisscher Körper) 267; (Kubische Restcharaktere) 273.
- Bez, W. und K.-H. Höcker (Bewegung von Ladungsenergien) 237; (Anodenfall) 237.
- Bhatia, A. B. and G. E. Tauter (Characteristic temperatures for cubic crystals) 441.
- — — and E. Wolf (Circle polynomials of Zernike) 60.
- Bhatnager, P. L., E. P. Gross and M. Krook (Collision processes in gases. I.) 236.
- Bhattacharya, B. s. S. Y. Tiwari 212.
- Bieberbach, Ludwig (Stiefelsche magische Quadrate. I.) 36.
- Biedenbarn, L. C. and J. M. Blatt (Variation principle for eigenfunctions) 211.
- Bilby, B. A. s. R. Bullough 442.
- Bing, R. H. (Locally tame sets) 168.
- Bingel, W. (Bindungsordnung in der Quantenchemie) 234.
- Bird, R. B. s. J. de Boer 439.
- Birkhoff, Garrett (Homogeneous turbulence) 125.
- — et Joseph Kampé de Fériet (Turbulence homogène isotrope) 369.
- — and Jack Kotik (Heat equation) 86.
- Birman, M. Š. (Spektrum singulärer Randwertaufgaben) 330.
- Birnbaum, Allan (Tests for the mean of a rectangular distribution) 130; (Poisson processes) 375.
- Biswas, S. N. (Born's approximation) 435.
- Bizley, M. T. L. (Minimal lattice paths) 7.
- Blackwell, David (Representation problem) 288; (Optimal systems) 370.
- J. H. (Thermal constants) 200.
- Blanc, André (Résolution analogique d'équations aux dérivées partielles) 117.
- Blanc-Lapierre, André et Pierre Dumontet (Cohérence en optique) 205.
- Blanch, Gertrude (Modified divided differences. I. II.) 115.
- Blanchard, André (Espaces fibrés kähleriens compacts) 421.
- Blank, Hubert s. A. Seeger 443.
- Blanuša, Danilo (Einbettung elliptischer Räume) 382.
- Blaschke, Wilhelm (Keplero e Galileo) 2; (L. Bianchi) 2.
- Blatt, J. M. s. L. C. Biedenbarn 211.
- Bleich, H. H. and M. L. Baron (Free and forced vibrations of a shell) 183.
- — — s. M. L. Baron 183.
- Bloch, Claude (Nuclear level density) 222.
- Blondel, J. M. s. P. Delerue 62.
- Blum, Julius R. (Approximation methods) 378.
- Bobinger, Maximilian (Christoph Schissler) 243.

- Boechieri, P. and G. Feldman (Double pion production) 430.
- Bochner, S. (Time series) 110; (Homogeneous stochastic processes) 368.
- Bodiou, Georges (Seconde quantification) 214.
- Boer, J. de and R. B. Bird (Transport coefficients of gases) 439.
- — — s. E. G. D. Cohen 441.
- Böer, K. W. (Gisolfische Theorie) 446.
- Boesch, Walter (Berechnung komplexer Werte) 363.
- Bogdanoff, J. L. (Thermal stresses) 180.
- — — J. E. Goldberg and Hsu Lo (Vibration problems. II.) 354.
- Böleskei, E. (Stabilität des aufgehängten Balkens) 175.
- Bolsterli, Mark (Photon splitting) 217.
- Bolton, H. C. s. J. A. Abbott 232.
- Bolyai, Iános (Appendix) 243.
- Bompiani, Enrico (Teorema del Bianchi) 395; (Elementi curvilinei piani E_3 tangenti) 399.
- Bonnor, W. B. (Static magnetic fields) 209.
- Bononcini, Vittorio (Calcolo infinitesimale) 278.
- Bonsall, F. F. (Subadditive functionals) 100; (Norm in some Banach algebras) 338.
- — — and A. W. Goldie (Annihilator algebras) 106.
- — — and Morris Marden (Critical points of rational functions) 14.
- Boone, William W. (Problems of group theory. I.) 6.
- Booth, Andrew D. (Numerical solution of differential equations) 113.
- Boothby, William M. (Hermitian manifolds) 403.
- Bopp, Fritz (Natur der Wellen) 172.
- Borch, Karl (Distribution of income) 137.
- Borde, A. H. de (Auger effect) 220.
- Boreli, Mladen s. J. Kravtchenko 198.
- Born, Max (Freundlich's red-shift formula) 218.
- Borovikov, V. A. (Konstruktion eines Kompaktums) 415.
- Boscher, Jean (Méthode des réseaux électriques) 174.
- — — s. L. Malavard 174.
- Bose, S. N. (Affine connection) 210.
- Boss, Max s. W. Maurer 136.
- Bottari, Amerigo (Luoghi geometrici elementari) 384.
- Boughon, Pierre (Enveloppe d'une famille de variétés) 248.
- Bouix, Maurice (Direction de gain maximum) 203.
- Bouligand, G. (Équations aux dérivées partielles) 83.
- Bourbaki, N. (Théorie des Ensembles. Chap. I. II.) 279.
- Box, G. E. P. (Theorems on quadratic forms. I.) 373.
- Boyer, C. B. (Carnot) 243.
- Boys, S. F. and V. E. Price (Electronic wave functions. XI.) 437.
- — — and R. C. Sahni (Electronic wave functions. XII.) 437.
- Brandsen, B. H. and J. S. C. McKee (Scattering of neutrons by alpha particles) 432.
- Branstetter, R. Deane (Round-off theory for scalar products) 350.
- Brauner, Heinrich (Verlagerung kollinearer Räume) 385.
- Breit, G. and H. A. Bethe (Incoming waves in scattering problems) 213.
- — — s. R. M. Thaler 221.
- Brelot, M. (Théorie moderne du potentiel) 89.
- Bremermann, Hans J. (Holomorphiehüllen der Tuben- und Halbtubengebiete) 311.
- Brenig, W. (Kräfte zwischen Atomen) 451.
- Brenner, J. L. (Déterminant avec diagonale majorante) 8; (Linear recurrence relations) 35.
- Breusch, Robert (Prime number theorem) 40.
- Brewer, George R. (High-current electron beams) 206.
- Briggs, W. E. (Representation of primes by quadratic forms) 272.
- Briggs, W. E. s. S. Chowla 41, 275.
- Brillouin, L. (Negentropy and information) 208.
- Brinkman, H. C. (Thomas-Fermi equation) 232.
- Briquet, André (Cubiques de Mac Cay) 141.
- Briš, N. I. (Randwertaufgaben für $E y'' = f(x, y, y')$) 316.
- Broer, L. J. F. and A. C. van den Bergen (Shock structure. II.) 197.
- Brogie, Louis de s. J. Nicolle 241.
- Brouwer, L. E. J. (Points and spaces) 46; (Ordnungswechsel in bezug auf stetige Kurve) 168.
- Brovetto, P. and S. Ferroni (Nuclear polarizations in paramagnetic substances) 447.
- Browder, Felix E. (Eigenfunction expansion theorem. I. II.) 343.
- Brown, Arlen (Binormal operators) 339.
- T. M. (Errors of forecast of a complete economic model) 137.
- W. F. and T. Y. Thomas (Pressure derivatives behind shocks) 196.
- Bruceckner, K. A., C. A. Levinson and H. M. Mahmoud (Two-body forces and nuclear saturation. I.) 431.
- Bruhat, François (Représentations induites des groupes de Lie) 20; (Représentations induites des groupes de Lie complexes) 20; (Représentations induites des groupes de Lie réels) 20.
- Bruniak, R. (Rückströmung beim Verdichtungsstoß) 191.
- Brunk, H. D. (Growth of functions) 70.
- Bruwier, L. s. M. Dehalu 2.
- Büchi, J. R. (Totally heterogeneous spaces) 282.
- Bullough, R. and B. A. Bilby (Dislocations in anisotropic media) 442.
- Burgers, W. G. s. R. Houwink 442.
- Burgess, D. C. J. (Tauberian theorems) 102.
- Burniat, Pol (Surfaces algébriques) 147.

- Busemann, Herbert (Motions with maximal displacements) 409.
- Bushaw, D. W. s. R. W. Clover 137.
- Byrd, Paul F. (Slender quasi-axisymmetrical body) 188.
- — — and Morris D. Friedmann (Elliptic integrals) 119.
- Çabannes, Henri (Courbure des ondes de choc. I.) 196; (II.) 197.
- Cadwell, J. H. (Mean deviation) 127.
- Cahill, W. F. (Hypergeometric series) 118.
- Cairns, S. S. (Computational attacks on discrete problems) 363.
- Caldirola, P. (Momento magnetico dell'elettrone) 220.
- Callen, Herbert B. s. C. J. Kriessman 447.
- Cameron, R. H. (Heat flow equation) 327.
- Camier, E. D. (Conics) 144.
- Campbell, J. G. and Michael Golomb (Riccati equation) 314.
- Cap, Ferdinand (New spinor theory) 221; (Nonlinear meson theory of nuclear forces) 430.
- Capel, C. E. (Inverse limit spaces) 412.
- Carathéodory, C. (Functions of a complex variable. I.) 303.
- Cargal, Buchanan (Generalizations of continuity) 412.
- Carlitz, L. (Representations by quadratic forms) 13; (Factor of class number) 34; (Theorem on Bernoulli numbers) 35; (Cyclotomic polynomial) 35; (Polynomials of Hermite) 64; (Modular invariants) 248; (Special equations in a finite field) 268; (Ménage polynomials) 270; (Hankel determinants) 270; (Singular elliptic functions) 270.
- Carlson, B. C. s. F. Rohrllich 231.
- Cartan, Henri (Groupes d'Eilenberg-MacLane. I.) 418.
- Carver, D. R. s. H. L. Langhaar 179.
- Cassels, J. W. S. $(\lim_{x \rightarrow +\infty} x|\theta x + \alpha - y|)$ 44.
- Catalan, M. A., F. Rohrllich and A. G. Shenstone (Low atomic configurations) 233.
- Cavallaro, Vincenzo G. (Axes de l'ellipse) 140; (Equazioni difantee brocardiane) 384.
- Čavčanidze, V. V. (Anwendung der Methode von Markov) 231; (Methode von Markov und Fluktuationen der Energieverluste) 231.
- Cazenave, René (Expression intégrale de la fonction de Legendre) 63.
- ČBRM. (Équations aux dérivées partielles) 83.
- Čebotarev, G. N. (Matrizengleichung $e^B \cdot e^C = e^{B+C}$) 245.
- Čech, E. (Deformazione proiettiva) 400.
- Čermák, J. (Systems of difference equations) 322.
- Ceschino, Francis (Procédé de Runge-Kutta) 113, 355.
- Chalevov, E. A. (Halbgruppen von Matrizen) 14.
- Chamberlain, Owen and Martin O. Stern (Scattering of deuterons by protons) 227.
- Champernowne, D. G. (Farrell's model) 137.
- Chanda, K. C. (Likelihood equations) 129.
- Chandra, Dinesh s. S. C. Mitra 335.
- Chandrasekhar, S. (Viscous flow between rotating cylinders) 186; (Instability of a layer of fluid) 453.
- — — and Donna Elbert $(Y_n(\lambda, \eta) J_n(\lambda) - J_n(\lambda, \eta) Y_n(\lambda) = 0)$ 119.
- Chang, Chieh-Chien and Wen-Hwa Chu (Stresses in a metal tube) 180.
- Chariar, V. R. s. P. Iha 155, 398.
- Charney, J. G. (Cyclogenesis) 455.
- Chase, D. M. and F. Rohrllich (Scattering of protons by nuclei) 227.
- Chaundy, T. W., P. R. Barrett and Charles Batey (Printing of mathematics) 241.
- Chehata, C. G. (Extension of partial endomorphisms of groups) 252.
- Ch'en, Chang-Yi s. M. Takeo 238.
- Chen, Kuo-Tsai (Finitely generated groups) 17.
- Chen Moy, Shu-Teh (Conditional expectation) 125.
- Chenon, René (Théorie covariante des champs) 215.
- Chester, W. (Diffraction and reflection of shock waves) 197; (Reflection of shock weak waves) 197.
- Chevallier, J.-M. (Nombres premiers) 274.
- Chew, Geoffrey F. (Schwinger's variational principles) 219; (Renormalization of meson theory) 428; (Meson-nucleon problem) 428; (P-wave pion-nucleon scattering phase shifts) 429.
- Childress, N. A. s. W. R. Hutcherson 392.
- Chintschin (Činčin), A. J. (Methode der willkürlichen Funktionen) 365.
- Choudhury, A. C. (Boolean narings) 260.
- D. C. (Intermediate coupling) 222.
- Chow, Shou-Hsien (Non-linear diffusion equation) 201.
- Chowla, S. and W. E. Briggs (Discriminants of binary quadratic forms) 41; (Number of Integers $\leq x$ whose prime factors are $\leq y$) 275.
- — — s. P. T. Bateman 275.
- Chu, Sheng To and A. N. Tifford (Laminar boundary layer on a rotating body) 189.
- Wen-Hwa s. Ch.-Ch. Chang 180.
- Churchhouse, R. F. (Minakowski-Hlawka theorem) 42.
- Churchill, R. V. (Legendre transforms) 95.
- — — and C. L. Dolph (Products of Legendre transforms) 94.
- Cimino, Massimo (Distribuzione di equilibrio) 240.
- Čin, Jai-Sin (Argumente der Koeffizienten einer schlichten Funktion) 71.
- Cini, M. and S. Fubini (Scattering) 214.
- Cinquini, Silvio (Trigonometria e funzioni quasi-periodiche) 78.
- Citlanadze, É. S. (Extremum Aufgabe im Hilbertschen Raum) 341.

- Clark, A. C. (Binding energy of alpha particle) 222.
- Clarke, R. D. (Probability) 120.
- Clatworthy, Willard H. (Geometrical configuration) 133.
- — s. W. S. Connor 133.
- Clausen jr., J. M. s. G. Horvay 179.
- Clawson, J. W. (Chain of circles) 141.
- Clemental, E. (Sezione d'urto) 226.
- Clendenin, W. W. (Gyromagnetic ratio in the structure of doublet states) 232.
- Clifford, A. H. (Naturally totally ordered semi-groups) 15; (Bands of semi-groups) 250.
- Clower, R. W. and D. W. Bushaw (Price determination in stock-flow economy) 137.
- Clunie, J. (Bose-Einstein functions) 360.
- Cocchi, Giovanni (Moto laminare in tubi cilindrici) 185.
- Cocconi, Giuseppe (Nucleon-nucleon collisions) 226.
- Cockroft, W. H. (Vector cohomology groups) 22; (Aspherical complexes) 419.
- Coddington, E. A. (Spectral matrix and Green's function for boundary value problems) 80; (Spectral representation of differential operators) 342.
- Cohen, Clarence B. (Laminar boundary-layer equations) 190.
- D. E. (Spaces with weak topology) 161.
- Eckford (Rings of arithmetic functions. II.) 272; (Analogue of Goldbach problem) 274.
- E. G. D., M. J. Offerhaus and J. de Boer (Mixtures of helium isotopes) 441.
- jr., A. C. (Poisson parameter) 375.
- — — s. D. F. Barrow 374.
- Cohn, George I. and Bernard Saltzberg (Non-linear differential equations) 113.
- Harvey (Density of Abelian cubic fields) 269; (Cubic cyclotomic units) 269.
- P. M. (Group which cannot be covered by finite permutable subsets) 17; (Homomorphic images of Jordan algebras) 27; Pseudo-valuations) 32.
- Cole, G. H. A. s. R. Eisen-schitz 239.
- Collatz, L. (Newtonsches Verfahren) 111; (Fehlerabschätzung bei linearen Gleichungssystemen) 112; (Newtonsches Verfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben) 113.
- — und Henry Görtler (Rohrströmung mit Drall) 187.
- Colli, L., U. Facchini, E. Gatti and A. Persano (Corona discharge) 238.
- Conforto, Fabio (Elenco delle pubblicazioni) 244.
- Conn, Ralph B. (Linear, real-time control systems) 362.
- Connor, W. S. and W. H. Clatworthy (Partially balanced designs) 133.
- — — s. M. Hall jr. 133.
- Conrad, Paul (Ordered division rings) 32.
- Conte, Luigi (Equazioni algebriche) 2; (Centro isogono) 140.
- Contopoulos, Georg (Dynamik der Kugelsternhaufen) 453.
- Conway, H. D. (Stress concentration) 178.
- Cooke, J. C. (Integrals of Bessel functions) 63.
- Cookinboo jr., Leslie (Costs of operating oil pipe lines) 137.
- Cooley, Hollis R. (Calculus) 279.
- Cooper, R. (Rapidly increasing sequences) 59.
- Cooperman, Philip (A variational problem) 92.
- Copping, J. (Theorem of Pólya) 108.
- Corinaldesi, E. (Scattering of electrons) 228; (Construction of potentials from phase shift) 426.
- Corlett, W. J. (Distribution of income) 137.
- Corominas, Ernest et Ferran Sunyer i Balaguer (Fonction infiniment dérivable) 54; (Unendlich oft differenzierbare Funktion) 288.
- Cossu, Aldo (Connessioni affini associate ad una connessione asimmetrica) 158.
- Costa de Beauregard, Olivier (Particule plongée dans un champ donné) 212; (Particule liée) 212.
- Cotlar, M. (Theorem of Beurling and Kaplansky) 266.
- — and R. Ricabarra (Characters in topological groups) 257.
- Coulson, C. A. (Free-electron network model) 444.
- Court, Nathan Altshiller (Tétraèdres) 142.
- Cox, D. R. and Walter L. Smith (Superposition of renewal processes) 124.
- J. F. et F. H. van den Dungen (Déplacements de l'axe instantané de rotation de la terre) 453.
- Coxeter, H. S. M., M. S. Longuet-Higgins and J. C. P. Miller (Uniform polyhedra) 142.
- Craggs, J. W. (Characteristic surfaces) 182.
- Cronin, Jane (Topological degree of mappings) 167.
- Csonka, P. (Stabilität des aufgehängten Balkens) 175.
- Čudov, L. A. s. I. G. Petrovskij 325.
- Cugiani, Marco („Catene di numeri primi) 274.
- Čunichin, S. A. (Zerlegung π -trennbare Gruppen) 254.
- Cunliffe, A. s. R. N. Gould 424.
- Cunningham, W. J. (Differential-difference equation of growth) 316.
- Curtis, Charles W. (Non-semisimple algebras) 264.
- G. C. (Sound-ranging problem) 361.
- M. L. (Monotone deformation-free mappings) 416.
- Curtiss, J. H. („Monte Carlo“ methods) 113.
- Czyzak, S. J. (Variable mass in Wessel's theory of the electron) 431.
- D**ahlquist, Germund (Hyperbolic difference equation) 358.
- Dalgarno, A. and G. Poots (Molecular orbitals. I.) 234.
- Dallaporta, N. (χ -meson) 220.
- Dalmasso, Liana (Terne di curve sghembe) 155.
- Dantzig, D. van (Das mathematische Modell) 3.
- George B. and Wm. Orchard-Hays (The inverse

- in the simplex method) 351.
- Dardel, G. F. von (Interaction of neutrons) 227.
- Darling, R. T. S. s. D. R. Bates 235.
- Darwin, Sir Charles (Electron inertia) 456.
- Dash, J. G. (Superfluidity and dissipative processes) 239; (Liquid He II) 239.
- Datta Majumdar, S. s. Majumdar, Datta S. 234.
- Daunt, J. G. and R. S. Smith (Liquid helium) 441.
- Davenport, Anne s. I. M. Vinogradov 275.
- David, F. N. and N. L. Johnson (Statistical treatment of censored data) 130; (Test for skewness) 131.
- H. A. s. H. O. Hartley 128.
- Davidson, P. M. (Mobility of electrons) 237.
- Davies, D. R. (Diffusion from a source into a turbulent atmosphere) 456.
- Handel, H. A. Bethe and L. C. Maximon (Bremsstrahlung and pair production. II.) 217.
- Davis, Chandler (Remarks on a previous paper) 412.
- Philip and J. L. Walsh (Bounded linear functionals) 338.
- Davison, B. and M. E. Mandl (Neutron spectrum for σ -absorption cross section) 436.
- Debever, R. (Structure infinitésimale régulière) 404.
- Debreu, Gerard (Valuation equilibrium) 380.
- — s. K. J. Arrow 380.
- Debrunner, H. s. H. Riedwil 143.
- Dehalu, M., L. J. Pauwen, G. Gueben et L. Bruwier (R. H. Germay) 2.
- Deheuvels, René (Cohomologie d'Alexander-Cech à coefficients dans un faisceau) 164; (Filtration de la cohomologie singulière) 165.
- Dehlinger, U. s. F. Bader 448.
- Delcroix, Jean-Loup s. M. Bayet 237.
- Delerue, Paul (Calcul symbolique) 94.
- — et J. M. Blondel (Fonction de Mittag-Leffler) 62.
- Demaria, Davide Carlo (Invarianti affini di elementi curvilinei) 155.
- Dempsey, E. s. D. ter Haar 447.
- Dénes, Peter (Logarithmische Hilfsfunktionen) 34; (Letzter Fermatscher Satz) 268.
- Denffer, Herbert von (Zufällige Sterblichkeitschwankungen) 380.
- Denisjuk, I. N. (Laguerresche Polynome und Cauchysches Problem) 299.
- Denisse, Jean-François s. M. Bayet 237.
- Denjoy, Arnaud (Mesure des ensembles géométriques) 51; (Identité fondamentale de la fonction ζ (s) de Riemann) 69; (Dérivation) 283; (Expression asymptotique des fonctions entières) 306; (Zéros de certaines fonctions entières) 306.
- Deresiewicz, H. (Contact of elastic spheres) 184.
- Derwidué, L. (Méthode de L. Couffignal) 112.
- Descombes, R. (Certaines formes linéaires) 277.
- Deser, Stanley (Meson-nucleon scattering) 219.
- Desoyer, K. s. A. Slibar 174.
- Destouches, Jean-Louis (Théorie der Voraussagen) 172.
- Dettmar, H.-K. (Eigenwertaufgaben bei linearen Differentialgleichungen) 355.
- Devinatz, A. (Semi-groups of unbounded selfadjoint operators) 342.
- Dewar, M. J. S. and H. C. Longuet-Higgins (Aromatic molecules. I.) 439.
- Dezin, A. A. (Randwertaufgabe für polyharmonische Gleichung) 332.
- Diananda, P. H. (Central limit theorem for m -dependent variables) 123.
- Diaz, Joaquin et Geoffrey Ludford (Equations linéaires aux dérivées partielles) 324.
- Dienes, G. J. s. G. H. Vineyard 443.
- Dieudonné, Jean (Isomorphismes entre les groupes classiques) 19; (Espaces de Montel métrisables) 98; (Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie) 256; (Biorthogonal systems) 337; (Produit de composition) 340.
- Dicke, R. H. (Coherence in radiation processes) 217.
- Dijksterhuis, E. J. (Intégrationsmethoden von Archimedes) 242; (Von Sehne zu Sinus) 243.
- Dinghas, Alexandre (Théorème de Lusternik) 411; (Théorème de Brunn-Minkowski) 411.
- Dirac, G. A. (Four colour conjecture) 170.
- — and S. Schuster (Theorem of Kuratowski) 170.
- Dixmier, Jacques (Anneaux d'opérateurs dans les espaces hilbertiens) 107; (Sous-anneaux dans les facteurs de type fini) 107.
- Doetsch, Gustav (Transformation bidimensionnelle de Laplace) 94.
- Dolph, C. L. s. R. V. Churchill 94.
- Donnert, Hermann (Elementarteilchen im elektromagnetischen Feld) 213.
- Donovan, B. (Magnetoresistance effect in metals) 446.
- — s. N. H. March 447.
- Donth, Hans (Statistik der Versetzungen) 443.
- Dorman, L. I. (Météorologiques Effekte der kosmischen Strahlen) 230.
- Dörr, Johannes (Übertragungs- und Regelungsprobleme) 362.
- Doss, Raouf (Almost periodic functions) 313.
- Dowker, Yael Naim and F. G. Friedlander (Limit sets in dynamical systems) 104.
- Downton, F. (Least-squares estimates) 377.
- Dragonì, Giuseppe Scorza s. Scorza Dragoni, Giuseppe 278.
- Drobot, S. (L'oeuvre de M. T. Huber) 2.
- Drummond, W. E. and C. S. Gardner (Point source kernel for diffusion) 231.
- Dubikajtis, L. (Separability of topological spaces) 161.
- Duculot, Camille (Modes vibrationnels) 234.
- Duff, G. F. D. (Partial differential equations) 87; (Tensor boundary value problem) 331.

- Dufresne, Pierre (Dépouillements) 121.
- Dufresnoy, Jacques et Charles Pisot (Ensemble d'entiers algébriques) 34.
- Dugas, René (Pseudo-paradoxes de la relativité restreinte) 208.
- Dugdale, J. S. and D. K. C. MacDonald (Vibrational anharmonicity) 442; (Low boiling point elements) 442.
- Dul'nev, V. B. (Instationäre Bewegung einer Flüssigkeit) 185.
- Dumas, Maurice (Épreuve économique) 374.
- Dumontet, Pierre s. A. Blanc-Lapierre 205.
- Duncan, W. J. (Articulated quadrilateral) 394.
- Dungen, F. H. van den s. J. F. Cox 453.
- Dunski, Vital (Fonctions de Bessel et fonctions de Kelvin) 298.
- Duparc, H. J. A. (Recurring sequences. I.) 262.
- — — and W. P. — — — (Positive definite matrices) 244.
- — — and A. van Wijngaarden (Fermat's last theorem) 40.
- Durand, David (Multiple regression coefficients) 133.
- Émile (Équations de Maxwell et Équations de Dirac) 200.
- Dutron, O. (Puissance d'un point) 142.
- Dutta, M. (Derivation of statistics for particles) 236.
- Duvakin, A. P. and A. M. Letov (Stabilität von Reglersystemen) 320.
- Dwinger, Ph. (Ascending chain condition) 48.
- Dyer, Walter G. (Boundary value problems. I.) 355.
- Dynke, Milton D. van (Hypersonic small-disturbance) 195.
- Éaves, J. C. (Sets of matrices) 9.
- Eckart, Gottfried (Fourierreihen) 297.
- Ecker, G. (Positive column) 238.
- Edge, W. L. (Geometry in three dimensions over $GF(3)$) 144; (Linear fractional group $LF(4,2)$) 285.
- Edwards, R. E. (Fourier transforms) 103.
- Egerváry, E. (Lemma of Stieltjes) 9.
- Eggleston, H. G. (Measureless set) 285.
- Eggwertz, Sigge (Stresses in a swept multicell cantilever box beam) 175.
- Ehrenfeucht, A. et J. Loś (Produits cartésiens des groupes) 253.
- Ehresmann, Charles (Structures locales) 420.
- Eilenberg, Samuel and Saunders MacLane (Groups $H(\Pi, n)$. II.) 417.
- Einstein, Albert (Relativity) 208; (Relativité) 208.
- — and B. Kaufman (Algebraic properties of the field) 159.
- Eisenhart, Luther P. (Riemann spaces and relativity. II.) 408.
- Eisenschitz, R. and G. H. A. Cole (Effect of an electric field on liquid viscosity) 239.
- Elbert, Donna S. S. Chandrasekhar 119.
- Elcock, E. W. (Collective electron antiferromagnetism) 450.
- — —, P. Rhodes and A. Teviotdale (Magnetic and thermal properties of metals and alloys) 445.
- Eliustratova, T. A. s. N. A. Lednev 117.
- Ellis, David (Saddler-points $1 \oplus 4$) 24; (Normal topologies) 413.
- Elsässer, Hans (Lichtstreuung an dielektrischen Kugeln) 205.
- Enatsu, Hiroshi, Hiroichi Hasegawa and Pong Yul Pac (Unstable heavy particles) 431.
- Engel, A. von s. W. L. Harries 238.
- Engvall, Albert (Gaußsches Fehlerintegral) 289.
- Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi (Integral transforms. I.) 364.
- Erdős, J. (Groups with finite classes of conjugate elements) 252.
- Paul, Fritz Herzog and George Piranian (Taylor series of functions regular in Gaier regions) 68.
- Ergen, William Krasny (Kinetics of circulating-fuel nuclear reactor) 230.
- Ericksen, J. L. and R. S. Rivlin (Deformations of anisotropic materials) 181.
- Erskine, G. A. (α -particles in helium) 232.
- Eršov, B. A. (Stabilität der Bewegung im Großen) 320.
- Eshelby, J. D. (Distortion of a crystal) 442.
- Espagnat, B. d' (Meson production) 219.
- Esper, F. s. W. Riezler 233.
- Esseen, Carl-Gustav (Fourier-Stieltjes transforms) 335.
- Eubanks, R. A. and E. Sternberg (Axisymmetric problem of elasticity theory) 175.
- Eulerus, Leonhardus (Opera Omnia. Ser. 1. Vol. XXVII.) 380.
- Evans, J. P. s. J. L. Walsh 68, 300.
- Robert L. (Factorial series in solution of ordinary differential equations) 315.
- Trevor (Embedding theorem for semi-groups) 250.
- W. Duane (Structural matrix errors) 352.
- Fabre de la Ripelle, Michel (Équations de perturbation) 83.
- Fabricius-Bjerre, Fr. ((3,1)-Transformation) 387; (Plane closed curves) 392.
- Facchini, U. s. L. Colli 238.
- Facciotti, G. (Generalizzazione della iperbole) 387.
- Faddeev, D. K. (Hypothese von Hasse) 31.
- Fadnis, Rhaskar Sadashiv (Boundary layer on rotating spheroids) 189.
- Fairbairn, W. M. (D - I reaction) 433.
- Falk, Sigurd (Matrizen-eigenwertproblem) 351.
- Falk-Vairant, Paul (Désintégration de quelques émetteurs α) 435.
- Falkenhagen, H. und G. Kelbg (Klassische Statistik. II.) 199.
- Fan, Ky (Commutators of matrices) 246.
- — and Raimond A. Struble (Terms of connectedness) 162.

- Fano, U. (Polarization in quantum mechanics) 218.
 — — s. L. V. Spencer 437.
 Farrell, M. J. (Theory of the firm) 137.
 Federhofer, K. (Knicklast der Kreiszylinderschale) 179.
 Fehlberg, Erwin (Dirichlet-sches Problem) 356.
 Fejes Tóth, L. (Dichteste Horozyklenlagerung) 382; (Close-packings of spheres) 383.
 Feldman, G. (Propagators in field theory) 215.
 — — s. P. Bocchieri 430.
 Felsenfeld, Gary (Pauling theory of ferromagnetism) 447.
 Fenyő, I. (Stefan) (Dirichlet-sches Problem) 89; (Nicht-lineare Gleichungen) 345.
 Fer, Francis (Surfaces de raccord des phases) 221.
 Fériet, Joseph Kampé de s. Kampé de Fériet, Joseph 369.
 Fermi, E. (Polarization of protons) 227.
 Ferraris, Giulia Pozzolo s. Pozzolo Ferraris, Giulia 384.
 Ferraro, V. C. A. s. C. Plumptre 455.
 Ferroni, S. s. P. Brovetto 447.
 Fesenkov, V. G. (Dichte der Fasern von Nebeln) 240.
 Fet, A. I. (Überdeckungen von Sphären) 416.
 Fettis, Henry E. (Differential equation in theory of heat flow) 191.
 Few, L. (Displaced convex cylinder) 43.
 Feyerherm, Arlin M. (Kronecker products) 244.
 Feynman, R. P. and G. Speisman (Proton-neutron mass difference) 219.
 Filippov, L. P. (Wärmeübertragung) 200.
 Fincke, K. (Nukleon-Nukleon-Streuung) 221.
 Fine, N. J. (Conjecture of Goodman) 4; (Asymptotic distribution of certain sums) 275.
 Finikoff, G. (Systèmes de congruences W) 400.
 Finkelstein, R., S. G. Gasiorowicz and P. Kaus (Composite particle) 431.
 Finsler, Anne (Kreuzkern und Kugel) 143.
 Finsler, P. (Unendlichkeit der Zahlenreihe) 46.
 Fisher, Edward (Van der Pol limit cycle) 315.
 Fjeldstad, Jonas Ekman (Dixon's formula) 8.
 Fladt, Kuno (Transformationen der Hauptgruppe) 139.
 Fleischer, Isidore (Espaces normés non-archimédiens) 99.
 Fletcher, G. C. (First ferromagnetic anisotropy coefficient) 449.
 Flett, T. M. (Function-theoretic identity) 72; (Conformal mapping) 72.
 Flint, H. T. and E. M. Williamson (Theory of electron) 431.
 Florian, A. und P. Urban (Schalenmodell leichter Kerne) 432.
 — — — und K. Wildermuth (Angeregte Zustände leichter Kerne) 431.
 Flügge, W. (Tables of transcendental functions) 119.
 Fodor, G. und I. Ketskeméty (Singuläre Kardinalzahlen) 48.
 Foldy, Leslie L. (Elementary particles) 218.
 Foley, H. M., R. M. Sternheimer and D. Tycko (Nuclear quadrupole coupling) 235.
 — — — s. R. M. Sternheimer 235.
 Föppl, Ludwig (Elastizitätstheorie) 181.
 Forsberg jr., P. W. (Pressure of barium titanate) 450.
 Forsythe, George E. (Frequencies of polygonal membranes) 355.
 Fortet, Robert et Edith Mourier (Fonctions aléatoires) 123.
 Foster, F. G. and A. Stuart (Distribution-free tests) 378.
 — — — Malcolm (Envelopes) 151.
 Foulkes, H. O. (Pléthysm of S -functions) 248.
 Fourès, Léonce (Groupes fuchsien) 77.
 Fowler, C. M. (Finite difference approximations) 200.
 — — — G. N. (Electron-neutrino angular correlation) 229; (Forbidden beta transitions and nuclear spin orbit interaction) 436.
 Fox, L. (Numerical integration of differential equations) 353.
 — — — Ralph H. (Free differential calculus. II.) 17.
 — — — s. G. Torres 168.
 Fradkin, E. S. (Renormierung in Quantenelektrodynamik) 427.
 Frajese, Attilio (L'incommensurable nel dialogo „Menone“) 1.
 Frame, J. S., G. de B. Robinson and R. M. Thrall (Hook graphs of symmetric group) 254; (Theorem of Osima) 255.
 Francis, N. C. and K. M. Watson (Deuteron stripping reactions) 225.
 Franckx, Éd. (Corps convexes non séparables) 371.
 Frank, Evelyn and Oskar Perron (Continued fractions) 304.
 — — — Marguerite Strauss (Simple Lie algebras) 265.
 — — — R. M. and J. L. Gammel (Scattering of protons and neutrons by deuterons) 227.
 Franklin, Joel (Functional differential equations) 317.
 Franz, W. s. J. Homilius 452.
 Fraser, D. A. S. (Order statistics) 128.
 — — — P. A. (Multiple expansion of scalar potential) 200; (Electronic transition moment) 439.
 Freese, E. und K. Hain (Elektronenstreuung an Atomkernen) 228.
 Freud, Géza (Hermite-Fejérsches Interpolationsverfahren) 59.
 Freudenthal, Hans (Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene. I.) 20.
 Freytag, H. (Meßkurvenscharen) 378.
 Fried, E. (Als echte Quotientenkörper darstellbare Körper) 28.
 Friedel, J. (Electron dans un réseau périodique perturbé) 445.
 Friedlander, F. G. s. Y. N. Dowker 104.
 Friedmann, Morris D. s. P. F. Byrd 119.
 Frink, Orrin (Ideals in partially ordered sets) 259.
 Frisch, O. R. and D. J. Littler (Pile modulation) 230.

- Fröhlich, A. (Fields of class two) 33; (Absolute class-group of Abelian fields) 33; (Class number of Abelian fields) 268.
- Fröhlich, H. (Superconductivity) 441.
- Fubini, S. s. M. Cini 214.
- Fuchs, L. (Commutative ideal theory) 27.
- Fucks, Wilhelm (Nahordnung und Fernordnung in samples) 135.
- Fujii, Saburo, Junji Iwadore, Shoichiro Otsuki, Mitsuo Taketani, Smio Tani and Watato Watari (Meson theory of nuclear forces. II.) 218.
- Fujiwara, Kaichirō (Anneaux des fonctions continues) 338.
- Fukuda, Nobuyuki, Shigeo Coto, Susumu Okubo and Katurō Sawada (Pion-nucleon scattering) 429.
- Fürth, R. and C. L. Williams (Opalescence and concentration fluctuations. II.) 440.
- G. Allen, D. N. de s. Allen, D. N. de G. 349.
- Gabard, E. (Factorisations) 35.
- Gaffney, Matthew P. (Special Stoke's theorem) 403.
- Gaier, D. und K. Zeller (*O*-Umkehrsatz für C_k -Verfahren) 292.
- Galafassi, Vittorio Emanuele (Tendenze nel progredire della geometria) 380.
- Galanin, A. D. und V. G. Solov'ev (Lebensdauer des π^0 -Meson) 430.
- Gallagher, K. J., A. R. Ubbeholde and Ida Woodward (Hydrogen bond in crystals. IX.) 234.
- Gammel, John L. (Scattering of pions by nucleons) 429. — — — s. R. M. Frank 227.
- Ganapathy Iyer, V. (Linear space generated by a sequence of integral functions) 99.
- Ganelius, Tord (Sequences of analytic functions) 69.
- Gantmacher, F. R. s. M. A. Ajzerman 319.
- Ganzhorn, K. s. F. Bader 448.
- Garabedian, P. R. and H. L. Royden (One-quarter theorem for mean univalent functions) 71.
- Garabedian, P. R. and M. Schiffer (Electrostatic capacity) 89.
- García Pradillo, Julio (Permanentes) 8.
- Gårding, Lars (Applications of direct integrals of Hilbert spaces) 342.
- Gardner, C. S. s. W. E. Drummond 231.
- Garibjan, G. M. und I. I. Goldman (Spektren der π - und μ -Mesonen) 230; (Polarisation relativistischer Elektronen) 455.
- Garnier, René (Cinématique. I.) 151.
- Garwick, Jan V. (Punched card machine) 362.
- Garza, A. de la (Spacing of information in polynomial regression) 132.
- Gasapina, Umberto (Flessioni delle superficie sviluppabili) 399.
- Gasirowicz, S. G. s. R. Arnowitt 215.
- — s. R. Finkelstein 431.
- Gates jr., Leslie D. (Differential equations in distribution of Schwartz) 341.
- Gatha, K. M., G. Z. Shah and N. J. Patel (Nuclear density in light elements) 432.
- Gatteschi, Luigi (Formula di Hilb-Szegő) 301.
- Gatti, E. s. L. Colli 238.
- Gatto, R. (Λ -particle production) 219; (Indipendenza dalla carica nella produzione di particelle Λ) 431.
- Gaus, Heinrich (Energie-Impuls- und Ladungsdichte) 216.
- Gautschi, Werner (Bounds of matrices) 245.
- Gavrilov, Ju. M. (Iterationsprozesse) 112.
- Gehring, F. W. (α -variation. I.) 286.
- Geiringer, Hilda (Theorie der Charakteristiken) 323.
- Gejlikman, B. T. (Kondensation eines Bose-Gases im Schwerfeld) 440; (Supraleitfähigkeit) 441.
- Gel'fer, S. A. (Typisch-reelle Funktionen) 308.
- Gel'fond, A. O. (Gleichungen in ganzen Zahlen) 271; (Polynome, die am wenigsten von Null abweichen) 294.
- Gentzen, Gerhard (Vollständige Induktionen) 5.
- Gerber, Nathan s. J. C. Martin 195.
- Gercenštejn, M. E. (Eigenschwingungen in der Gasentladung) 238.
- Gerjuoy, E. and David S. Saxon (Intermediate and high-energy scatterings) 226.
- Germain, P. (Partial differential equations of mixed type) 85.
- Germay, R. H. (Équations intégral-différentielles récurrentes) 92; (Fonctions inverses) 287; (Équation intégrale) 333.
- Geronimus, J. L. (Kinematische Probleme) 244.
- Gerstenhaber, Murray (Modular group and similar groups) 311.
- Geymonat, Ludovico (Spazi astratti) 412.
- Ghurye, S. G. and Herbert Robbins (Difference between means) 129.
- Giese, J. H. (Computing flow fields) 193.
- Gilbarg, D. and M. Shiffman (Extreme values of critical Mach number. I.) 188.
- Gilbert, E. N. (Frontal switching functions) 201.
- Gillies, A. W. (Variational equations of van der Pol) 319.
- Gillings, R. J. (Euler-Diderot incident) 2.
- Gillis, P. (Équations aux dérivées partielles du second ordre) 331.
- Ginsburg, Seymour (Partially ordered sets) 280.
- Ginzburg, V. L. (Rotverschiebung) 455.
- — — und V. P. Silin (Relativistische Wellengleichungen mit Massenspektrum) 431.
- Giorgi, Ennio de (Misura $(r-1)$ -dimensionale in uno spazio ad r dimensioni) 285.
- Girault, Maurice (Transformation de fonctions caractéristiques) 122.
- Givens, Wallace (Characteristic values of a real symmetric matrix) 350.
- Glatzel, E. und H. Schlechtweg (Spannungszustand im kreiszylindrischen Rohr) 181.

- Glenn, Oliver E. (Invariants when the transformation is infinitesimal) 323.
- Gluškov, V. M. (Nilpotente, lokal bikompakte Gruppen) 256.
- Gnedenko, B. V. (Summen unabhängiger Summanden und Markovsche Ketten) 366; (Lokaler Grenzwertsatz für Dichten) 366.
- Godeaux, Lucien (Points de diramation d'une surface multiple) 147; (Représentation plane de la surface cubique) 147; (Suites de Laplace) 156; (Congruences engendrées par les directrices de Wilczynski) 156; (Homographies cycliques) 385; (Quatre suites de Laplace) 400.
- Godement, Roger (Caractères. I. II.) 21.
- Godwin, H. J. (Minima of sequences of binary quadratic forms) 276.
- Goebel, Wolfgang (Biegungsflächen) 155.
- Goffman, Casper (Theorem of H. Blumberg) 57.
- Gohier, Simone (Rigidité des calottes) 154.
- Golab, S. (Courbes planes) 151; (Kovariante Ableitung) 394; (Dérivée covariante des objets géométriques) 394; (Courbures d'une courbe) 402.
- Goland, Martin and Yudell L. Luke (Linear panel flutter at supersonic speeds) 197.
- Goldberg, J. E. s. J. L. Bogdanoff 354.
- Karl, Morris Newman, E. G. Straus and J. D. Swift (Representation of integers by binary quadratic rational forms) 41.
- Michael (Rotors within rotors) 145.
- Goldenberg, H. (Roots of transcendental equation) 303.
- Goldie, A. W. s. F. F. Bon-sall 106.
- Goldman, I. I. s. G. M. Garibjan 230, 455.
- Goldsbrough, G. R. (Wind effects on the motion of the sea) 456.
- Golomb, Michael s. J. G. Campbell 314.
- Gomes, Ruy Luís (Begriff der Distanz) 208.
- Gonçalves, J. Vicente (Dérivées partielles similaires) 286.
- Good jr., R. H. (Hamiltonian mechanics of fields) 214; (Atomic electron screening) 228.
- Goodman, Leo A. (Serial number analysis) 129.
- Goormaghtigh, R. (Affinité complexe) 144.
- Gordeev, G. V. (Plasmaschwingungen) 440.
- Gorissen, L. (Quadrangle orthocentrique) 141.
- Görtler, Henry s. L. Collatz 187.
- Goto, Shigeo s. N. Fukuda 429.
- Gouarné, René (Méthode des polygones) 244; (Polynômes d'Hermite) 299.
- et Isaac Samuel (Matrices à polynômes caractéristiques) 9.
- Gould, H. W. (Paper of Grosswald) 8.
- R. N. and A. Cunliffe (Perturbation theory) 424.
- Grab, Edwin L. and I. Richard Savage (Value of $1/x$ for positive Bernoulli and Poisson variables) 127.
- Grace, Edward E. (Linear spaces and uncoherence) 417.
- Graeb, W. (Schwächste Uniformisierende) 73.
- Graffi, Dario (Sistemi non lineari a due gradi di libertà) 318.
- Graham, E. W. s. A. M. Rodriguez 189.
- Walter J. and Arthur J. Ruhlig (Noble gas discharges) 238.
- Granás, A. (Local disconnection of Euclidean spaces) 416.
- Grant, I. P. ((d, p) and (d, n) reactions. I.) 434.
- Graybill, Franklin A. (Quadratic estimates of variance components) 376.
- Green, A. E. and E. B. Spratt (Deformation of elastic bodies) 181.
- John W. (Smoothness of integral means) 53.
- Louis C., Margaret N. Lewis, Marjorie M. Mulder, Cynthia W. Wyeth and John W. Woll jr. (Correlation energies and wave functions) 232.
- Green, L. C., Marjorie M. Mulder, Margaret N. Lewis and John W. Woll jr. (Analytic and Hartree-Fock wave functions) 233.
- Gregoric, Romano (Hautkondensation) 239.
- Gremillard, Jean (Solutions périodiques) 452.
- Grey, L. D. (Fermat's last theorem) 40.
- Griffing, G. W. s. D. R. Bates 236.
- Griffith, H. C. s. O. G. Harold jr. 168.
- Grigorov, N. L. (Zusammenstoß von Nukleonen mit leichten Kernen) 222.
- Grim, O. (Rollschwingungen eines Schiffes) 174.
- Gröbner, Wolfgang (Hilbertfunktion eines H -Ideals) 148; (Krise unserer Kultur) 241.
- Grošev, A. V. s. N. A. Lednev 117.
- Grosjean, C. C. (Non-isotropic random flight problem) 229.
- Gross, E. P. (Boltzmann equation) 236.
- — s. P. L. Bhatnager 236.
- Oliver (Polynomial-like approximation) 293.
- Grothendieck, A. (Produits tensoriels topologiques) 97; (Sous-espaces de L^p) 98; (Opérations linéaires. I. II.) 336.
- Grümm, H. (Chromatische Aberration von Elektronenlinsen) 206.
- Grün, Otto (Direktes Produkt regulärer p -Gruppen) 18.
- Grunsky, Helmut (Anfangswertprobleme bei linearen Differentialgleichungen) 355.
- Guderley, Gottfried (Flow over a flat plate) 195.
- Gueben, G. s. M. Dehalu 2.
- Guérindon, Jean (Idéaux minimaux) 262.
- Guest, P. G. (Equally spaced observations) 360.
- Gumbel, E. J. (Circular normal distribution) 127; (Maxima of the mean largest value) 127; (Momente für die Zahl der Überschreitungen) 372.
- Gunn, J. B. (Metal-semiconductor contact) 451.

- Günther, Alfred (Transzendente p -adische Zahlen. I.) 45; (II.) 277.
- Gunther-Mohr, G. R., C. H. Townes and J. H. van Vleck (Spectrum of $N^{14}H_3$. II.) 439.
- Gupta, K. K. (Equation for a particle of two mass states) 213.
- Gurevič, G. B. (Algebraische Liesche Gruppen) 20.
- Gurland, John (Autocorrelated disturbances in linear regression) 378.
- Gustin, Wm. (Conformal singularities) 156.
- Guy, Jean, Monique Harrand et Jacques Tillieu (Polarisabilités des orbitales atomiques) 437.
- s. J. Tillieu 233.
- Roland (Équation vectorielle intégrale) 108; (Équations fonctionnelles non linéaires) 346.
- Haack, Wolfgang (Darstellende Geometrie. I.) 422; (II.) 423.
- — und Günter Hellwig (Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung) 86.
- — und Jürgen Zierep (Berechnungsmethoden von Lavaldüsen) 195.
- Haack, H. (Gezeitenbewegungen des festen Erdkörpers) 455.
- Haantjes, J. (Differentialgeometrie) 151; (Special class of spaces A_n) 407.
- Haar, D. ter (Freundlich's red-shift) 218.
- — and E. Dempsey (Ferromagnet) 447.
- Haasen, P. s. G. Leibfried 443.
- Haber-Schaim, U. and G. Yekutieli (Nuclear collisions. I.) 231.
- Hack, M. N. (Theory of scattering) 425.
- Hadamard, J. (Équations du type parabolique) 325.
- Hadwiger, H. (Deckungsäquivalenz und Zerlegungsäquivalenz) 50; (Zerlegungsgleichheit) 50; (Zerlegung der Kugel) 385; (Funktionale von Eipolyedern) 410.
- — und W. Nef (Invariante Integration in abstrakten Räumen) 284.
- Hailperin, Theodore (Identity and description) 4.
- Haimo, Franklin (Extensions of completely divisible groups) 17; (Automorphisms) 253.
- Hain, K. s. E. Freese 228.
- Hajós, G. and A. Rényi (Facts concerning order statistics) 374.
- Hall, P. (Splitting properties of groups) 252.
- jr., Marshall (Theorem of Jordan) 18.
- — and W. S. Connor (Embedding theorem for block designs) 133.
- Halmos, Paul R. (Commutators of operators. II.) 107.
- Halperin, Israel (Uniform convexity in function spaces) 337; (Reflexivity in L^1 function spaces) 337.
- Halpern, Otto (Positronium decay) 218.
- Hamermesh, Morton and James Monahan (Scattering of electrons) 232.
- Hammel, Edward F. s. J. E. Kilpatrick 236.
- Hammersley, J. M. and K. W. Morton (Transposed branching processes) 369; (Monte Carlo methods) 369.
- Händler, W. (Nomographierbarkeit höherer Funktionen) 361.
- Hanszen, Karl-Joseph (Phänomenologische Theorie irreversibler Prozesse) 199.
- Harary, Frank and Robert Z. Norman (Linear graphs) 172.
- Hardiman, N. Jessie (Elastic inclusion in an elastic plate) 179.
- Harish-Chandra (Plancherel formula) 103, 340; (Semi-simple Lie groups. II. III.) 340.
- Harley, B. I. (Correlation coefficient) 132.
- Harlow, Francis H. and Boris A. Jacobsohn (Nucleon isobars) 218.
- Harmuth, Henning (Gezeichnete Kennlinien) 362.
- Harrand, Monique s. J. Guy 437.
- Harries, W. L. and A. von Engel (Light quanta in electric breakdown of gases) 238.
- Harrold jr., O. G., H. C. Griffith and E. E. Posey (Tame curves) 168.
- Hartley, H. O. and H. A. Davig (Bounds for mean range) 128.
- Hartman, Philip and Aurel Wintner (Linear differential equations) 79; (Non-oscillatory linear differential equations) 79; (Systems of partial differential equations) 84; (Parabolic curves) 152; (Continuous area-preserving transformations) 159; (Curves defined by differential systems) 318; (Non-parabolic partial differential equations. II.) 324; (Umbilical points and W -surfaces) 396.
- Hartmann, Hermann (Chemische Bindung) 438.
- Harvey, R. B. (Elastic deformations of a plate) 178.
- Hasegawa, Hiroichi s. H. Enatsu 431.
- Haselgrove, C. B. and H. N. V. Temperley (Partitions) 274.
- Haskey, H. W. (Mean in a stochastic epidemic) 125.
- Hastings jr., Cecil and James P. Wong jr. (Analytical approximations) 111.
- Haupt, Otto (Kurven n -ter Ordnung) 409.
- — und Christian Y. Pauc (Durch Ableitungsbasen bestimmte Topologien) 283.
- Havas, Peter (Particles interacting with fields. I.) 220; (Singularities of meson fields) 430.
- Hawe, S. C. s. D. R. Bates 235.
- Hayakawa, Satio, Masaaki Kawaguchi and Shigeo Minami (Pion-nucleon interactions) 429.
- Hayashi, Chushiro (Field equations) 427.
- Kyuzo (Differential equation of Carathéodory's type) 286; (Transformations of differential equations) 317.
- Hayes, Wallace D. (Superposition of wave systems) 114.
- Hazay, I. (Zylinderprojektionen) 424.
- Heaslet, Max A. and Harvard Lomax (Integral trans-

- forms of wave equation) 193.
- Heber, G. (Spinwellentheorie) 448.
- Heer, W. J. C. de (Zinsfußproblem) 136.
- Heinhold, J. (Integriermaschinen) 117.
- Heinz, Erhard (Fläche konstanter mittlerer Krümmung) 153.
- Heitler, W. (Quantum theory of radiation) 216.
- Helbig, Manfred und Hans Storck (Sterblichkeitsbeobachtungen) 379.
- Heller, Alfred s. J. R. M. Radok 183.
- Hellsten, Ulf (Eigenvalues of certain integral equations) 92.
- Hellwig, Günter s. W. Haack 86.
- Helson, Henry (Conjecture of Steinhaus) 62.
- Hély, Jean (Représentation du champ unitaire) 159.
- Hemer, Ove (Diophantine equation $y^2 - k = x^3$) 36.
- Henderson, G. P. (Parallel curves) 395.
- Henley, E. M. s. A. Aitken 429.
- Henrici, P. (Aufgabe von van der Pol) 59.
- Henry, W. G. (Self-consistent field for Au) 233.
- Hensman, R. s. D. G. Bell 445.
- Herrmann, Oskar (Hilbertsche Modulgruppen) 76; (Hilbertsche Modulfunktionen) 312.
- Herstein, I. N. (Primitive matrices) 9; (Theorem of Jacobson) 25; (Lie ring of a simple ring) 25; (Rings with central nilpotent elements) 260.
- Hervé, Michel (Fonctions fuchsienues) 77.
- Herzog, Fritz s. P. Erdős 68.
- Hess, F. G. (Ehrenfest problem) 370.
- Hesselberg, O. K. s. H. Q. Rasmussen 452.
- Hewitt, Edwin (Orthonormal sets in $L_2(a, b)$) 60; (Fourier transforms of the class L_p) 103.
- Heymans, P. (Algebraic doubly infinite line systems) 392.
- Heywood, Philip (Theorem of Hardy) 295.
- Higgins, P. J. (Lie rings) 26.
- Higman, D. G. (Modules with a group of operators) 255; (Indecomposable representations) 255.
- Graham and B. H. Neumann (Two questions of Itô) 16.
- — and A. H. Stone (Inverse systems with trivial limits) 25.
- Hille, Einar (Kolmogoroff's differential equations) 123; (Problème de Cauchy) 345.
- Hilton, P. J. (Triple Whitehead product) 418.
- Hiong, King-Lai (Normalité d'une famille de fonctions holomorphes) 70.
- Hirsch, K. A. (Infinite soluble groups. V.) 16.
- Hirzebruch, Friedrich (Theorem of Riemann-Roch) 388.
- Hitchcock, A. (Spins of odd-odd nuclei. I. II.) 225.
- Hittmair, Otto (Spektrum von Kristallionen) 450.
- Hjortnaes, Margarethe Munthe s. Munthe Hjortnaes, Margarethe 293.
- Hlavatý, Václav (Elementary basic principles. C₁. C₂.) 209.
- Hochberg, S., H. S. W. Massey and L. H. Underhill (Scattering of nucleons by alpha particles) 435.
- Hochschild, G. (Restricted Lie algebras) 265; (Lie algebra kernels) 266.
- Höcker, K.-H. s. W. Bez 237.
- Hodge, W. V. D. and D. Pedoe (Algebraic geometry. III.) 387.
- Hoel, Paul G. (Mathematical Statistics) 371.
- Hoffman, Alan s. R. Bellman 11.
- — J. and Olga Taussky (Normal matrices) 10.
- Höfner, E. (Pochhammer'sche Differentialgleichung) 65.
- Hofmann, E. (Wärmeübergangsgesetz der turbulenten Rohrströmung) 191.
- Jos. E. (F. Viète) 1; (Mathematik an althayerischen Hochschulen) 2; (Archimedes von Syrakus) 242; (Portasche Quadratur) 243.
- Hoheisel, Guido (Distanzfunktionen) 414.
- Höhler, G. (Theorie des Polaronen) 447.
- Holmberg, Erik (Masses of double galaxies) 453.
- Holstein, T. s. I. B. Bernstein 439.
- Holte, Fritz C. (Binomiale Verteilungsfunktion) 365.
- Holyoke, T. C. (Extensions of dihedral groups) 18.
- Homilius, J. und W. Franz (Zenersche Formel) 452.
- Homma, Tatsuo (Unknotted polygons) 421.
- Homma, Tatsuo and Shin'ichi Kinoshita (Dilatation in L^3) 422.
- Honda, Kin'ya (Primary groups) 18; (Finite groups and their representations) 19.
- Hönig, Chaim Samuel (Well-ordering of cardinal numbers) 281.
- Hope, J. s. H. A. Jahn 437.
- Hopf, Eberhard (Markoff process) 367.
- Horie, Nobuo (Holonomy groups of group-spaces); 257; (Trajectories of the group-spaces) 257.
- Horn, Alfred (Eigenvalues of a matrix) 9; (Doubly stochastic matrices) 246.
- Hornich, H. (Verallgemeinerte Eulersche Differentialgleichung) 323.
- Horowitz, J. et A. M. L. Messiah (Corrélations angulaires ($dp\gamma$)) 226.
- Horton, G. K. and E. Phipps (Perturbation theory) 445.
- Horvay, G. and J. M. Clausen jr. (Stresses and deformations of flanged shells) 179.
- Hosszú, M. (Autodistributivity) 347.
- Hostinsky, L. Aileen (Loewy chains) 23.
- Householder, Alston S. (Errors in digital computation) 363.
- Houwink, R. (Elasticity, plasticity and structure of matter) 442.
- Hove, L. van s. G. Placzek 444.
- Howell, K. M. (Van der Waals energy) 236.
- Howson, A. G. (Divisibility closure operations) 47.
- Hsu, Pao-Lu (Characteristic functions) 96.
- Huber, Alfred (Theorem of Ostrowski) 286; (Sphäroidfunktionen) 301; (Gammaquotienten) 301.

- Huckemann, Friedrich (Typusänderung bei Riemannschen Flächen) 74; (Wertverteilung der Gammafunktion) 74; (Ahlfors distortion theorem) 309.
- Hukuhara, Masuo (Équations différentielles linéaires à coefficients périodiques) 81.
- Hull, T. E. and W. A. Wolfe (Inverting Laplace transforms) 93.
- Humbert, J. (Potentiels critiques) 224.
- Hume, J. N. P. (Sub-routines for ferut) 118.
- Hunt, G. A. (Green's functions) 331.
- Hunter, L. P. (Semiconductor Hall effect) 452.
- Huron, R. et J. Méric (Schéma d'urnes de Poisson) 121.
- Hurwitz jr., H. s. P. F. Zweifel 436.
- Hutcherson, W. R. et N. A. Childress (Involution cyclique) 392.
- Hyers, D. H. (A. D. Michal) 2.
- — — s. A. D. Michal 345.
- Ibrahim, E. M. (Paper by Murnaghan) 248.
- Ide, Saburo (Connections in higher order spaces) 407.
- Igusa, Jun-ichi (Grassmann variety) 390.
- Iha, P. and V. R. Chariar (Rectilinear congruences) 155, 398.
- Ikedo, Masatosi and Tadasu Nakayama (Quasi-Frobenius rings) 26.
- Imai, Isao (Oseen's equations) 188; (Beugung am Kreiszylinder) 205.
- Tiyuti s. K. Takano 158.
- Infeld, L. (Equations of motion and coordinate conditions) 209.
- — and J. Plebanski (Electrodynamics without potentials) 207.
- Ingraham, R. (Conformal geometry and elementary particles) 220.
- Inonu, E. and E. P. Wigner (Convergence to a singular matrix) 21.
- Inzinger, Rudolf (Faltungsgruppe im Hilbertschen Raum) 159.
- Ioffe, B. L. (Divergenz einer Reihe) 427.
- Ishida, Kin-ichi and Atsushi Takahashi (Pion-nucleon scattering) 429.
- Ishiguro, Eiichi, Sayoko Yussa, Michiko Sakamoto and Tōsaku Kimura (Molecular integrals. V.) 233.
- Ismuchametov, B. Ch. s. K. B. Vlasov 449.
- Itabashi, Kiyomi (Generalization of Tamm-Dancoff approximation) 429; (Renormalization in Tamm-Dancoff-approximation) 429.
- Itabashi, Kiyomi s. I. Sato 432.
- Ito, Takashi, Yukito Tanabe and Masataka Mizushima (Line width of rotational spectra) 433.
- Iwadare, Junji s. S. Fujii 218.
- Iyengar, S. B. D. s. R. Rammanna 436.
- Iyer, R. Venkachalam (Hindu abacus) 1.
- V. Ganapathy s. Ganapathy Iyer, V. 99.
- Izumi, Shin-ichi (Trigonometrical series. VI.) 295; (VII. VIII.) 296.
- Jabłoński, A. (Rotation of plane of polarization) 217.
- Jackson, T. A. S. (Separation of angle variables) 235.
- Jacobs, Ira and E. S. Akeley (Transverse motion of an electron) 207.
- Jacobsohn, Boris A. s. F. H. Harlow 218.
- Jacobson, N. (Kronecker factorization theorem) 265.
- Jaeckel, K. (Ebene stationäre Gasströmungen) 186.
- Jaffé, George (Raum, Zeit und Kausalität) 3.
- Jager, J. de (Sampling distributions) 135.
- Jaglom, A. M. s. M. S. Pinsker 368.
- Jahn, H. A. and J. Hope (Wigner 9j-symbol) 437.
- Jain, S. C. and Sir K. S. Krishnan (Distribution of temperature. I.) 200.
- Jakimovski, Ammon (Tauberian theorem) 292.
- Jakobi, R. (Parabeigenenschaften) 145.
- James, A. T. (Normal multivariate analysis) 132.
- G. S. (Tests of linear hypotheses) 129.
- I. M. (Iterated suspension) 418.
- James, R. D. (nth primitives) 52.
- — — and Ivan Niven (Factorization in multiplicative systems) 270.
- Jamison, Free (Trisection approximation) 143.
- Jankiewicz, C. (Espaces riemanniens dégénérés) 403.
- Jauho, Pekka (Artificial nuclear reactions) 225.
- Jean, Maurice (Théorie métrique pseudoscalaire) 428.
- — et Jacques Prentki (Excitation des noyaux) 433.
- Jecklin, H. und P. Strickler (Reserveberechnung) 136.
- Jeger, M. (Kurven - 3 - Gewebe) 401; (Erzeugung ebener Figuren) 423.
- Jenaer Jahrbuch 1954. 241.
- Jenkins, D. P. and L. Pincherle (Electronic wave functions in crystals) 444.
- — — s. D. G. Bell 445.
- James A. (A note of Kolbina) 72; (Bieberbach-Eilenberg functions) 308.
- Jenne, Werner (Punktdarstellung einer Matrix) 351.
- Jensen, Arne (Distribution model applicable to economics) 380.
- Jindra, F. (Nichtlineares Elastizitätsgesetz) 180.
- Johnson, N. L. (Sequential procedures) 373.
- — — s. F. N. David 130, 131.
- R. E. (Semi-prime rings) 261.
- S. M. (Representations of an integer) 272.
- Jonas, Hans (W-Strahlensysteme) 155; (Abbildungsproblem) 396.
- Jones, Burton W. and Donald Marsh (Automorphs of quadratic forms) 12.
- C. W. (Gas flow in one dimension) 196.
- F. Burton (Separability in metric spaces) 414.
- G. A. and D. H. Wilkinson (Isotopic spin selection rules. V.) 226.
- R. P. N. (Flexural vibration problems) 183.
- Jörgens, Konrad (Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$) 84.
- Jorgensen, Leland H. (Nose shapes for minimum pressure drag) 195.

- Jouvet, Bernard (Théorie électroneutrinienne du photon) 220.
- Joyson, R. E. (Elastic spectrum of zinc) 443.
- Juan, Ricardo San s. San Juan, Ricardo 54, 288.
- Juncosa, M. L. and David Young (Equation of diffusion) 86.
- Jung, E. (Dynamik der Drahtseile) 183.
- Junger, Miguel C. (Dynamic behavior of shells) 179.
- Juve, Yrjö (Verzerrungseigenschaften konformer Abbildungen) 310.
- K**adec, M. I. (Bedingt konvergente Reihen) 290.
- Kadison, Richard V. (Infinite linear groups) 19.
- Kaempffer, F. A. (Two-fluid model of matter) 431: (Field quantization) 440: (Self-energy of single roton states) 440.
- Kale, M. N. (Magic squares) 36.
- Kallianpur, G. (Stochastic approximation method) 378.
- and H. Robbins (Sums of independent random variables) 367.
- Kaluza jr., Theodor (Grenzperiodische Funktionen) 313.
- Kamenkov, G. V. (Stabilität der Bewegung) 321.
- Kamke, E. (Mathematische Erkenntnis) 3.
- Kampé de Fériet, Joseph s. G. Birkhoff 369.
- Kamynin, L. I. (Méthode der Geraden) 324.
- Kane, R. P. (Geophysical problems) 115.
- Kaplun, Saul (Coordinate systems in boundary-layer theory) 190.
- Karanikolov, Chr. (Mechanische Quadratur) 59.
- Karmanov, V. G. (Randwertaufgabe für Gleichung von gemischtem Typus) 329.
- Karzel, Helmut (Ordnungsfunktionen) 138.
- Kasch, Friedrich (Frobeniuserweiterungen) 263.
- Katsuma, Shōichirō s. M. Urabe 318.
- Katsura, Shigetoshi (Cooperative phenomena) 449.
- Katz, Leo and James H. Powell (Directed graphs) 422.
- S. and A. M. Peiser (Partial differential equations) 84.
- Kaufman, B. s. A. Einstein 159.
- H. s. R. L. Sternberg 201.
- Kaus, P. s. R. Finkelstein 431.
- Kawada, Yukiyo (Galois group of infinite extensions. I. II.) 30.
- Kawaguchi, Akitsugu (Areal spaces) 406.
- Masaaki s. S. Hayakawa 429.
- Kawata, Tatsuo (Fourier transform) 334.
- Kaye, Joseph (Friction coefficients) 195.
- Keesee, John W. (Sets which separate spheres) 416.
- Kelbg, G. s. H. Falkenhagen 199.
- Keldyš, Ljudmila (Eindimensionales Kontinuum) 415.
- M. V. (Reihen nach rationalen Brüchen) 307.
- Keller, Ott-Heinrich (Geometrie der Zahlen) 277.
- William E. s. J. E. Kilpatrick 236.
- Kells, L. M. (Differential equations) 79.
- Kelly, John B. (Quadratic residues) 37.
- P. J. (Barbilian geometry) 410.
- Kendall, M. G. (Theoretical statistics) 372.
- Kent, Gordon (Space charge waves) 207.
- Kertész, A. (Subgroups and homomorphic images) 253.
- Ketskéméty, I. s. G. Fodor 48.
- Khamis, Salem H. (Reduced moment problem) 336.
- Kikuta, Takashi (Superstationary variational method) 426: (Deuteron problem) 432.
- Kil'čevskij, N. A. (Tensorrechnung) 393.
- Kilpatrick, John E., William E. Keller, Edward F. Hammett and Nicholas Metropolis (Virial coefficients of He^3 and He^4) 236.
- Kimura, Tōsaku s. E. Ishiguro 233.
- Toshifusa (Points singuliers des équations différentielles ordinaires) 80.
- King, R. W. and D. C. Peaslee (Matrix elements in β decay) 228.
- Kinoshita, Shin'ichi s. T. Homma 422.
- Toichiro (Families of spinor fields) 426.
- Kiprijanov, I. A. (Summierung von Interpolationsprozessen) 294.
- Kirste, L. (Verformung dünnwandiger Kreiszylinder) 179.
- Kiss, I. (Radizierung mit der Rechenmaschine) 363.
- Kittel, C. (Effective mass of electrons) 444.
- Klee, V. L. and W. R. Utz (Continuous transformations) 162.
- Klee jr., V. L. (Linear functionals) 100.
- Klein, Hans (Streugrenzen statistischer Verteilungskurven) 378.
- Joseph (Trajectoires d'un système dynamique) 157.
- Klemens, P. G. (Thermoelectric power of metals) 447: (Thermal conductivity) 452.
- Klenikov, N. P. (Ausstrahlung von Photonen) 217.
- Kline, Morris (Freshman mathematics) 241.
- Klingenberg, Wilhelm (Hyperbolische Geometrie) 139: (Symmetrische und alternierende Formen) 248: (Sfere nella geometria di Laguerre) 399.
- Kneser, Hellmuth (Monoton gekrümmte ebene Kurven) 395.
- Martin (Kristallgitter) 43.
- Knight, A. J. (Surfaces containing irrational pencils) 146: (Overlapped algebraic surfaces) 146.
- Knobloch, Hans-Wilhelm (Primzahlreihen) 273.
- Knothe, Herbert (Eigenschaft der Ellipse) 398.
- Kobayashi, Shōshichi (Connexion des variétés fibrées) 166: (II.) 421.
- Kodaira, K. (Kähler varieties) 157.
- Koecher, Max (Modulformen n -ten Grades. I.) 77.
- Kofoed-Hansen, O. (Angular correlations in beta transitions) 229.
- Kohn, W. and N. Rostoker (Schrödinger equation in periodic lattices) 444.

- Koizumi, Sumiyuki and Gen-ichirō Sunouchi (Fourier integrals) 297.
- Kolbina, L. I. (Extremalprobleme) 71.
- Kolesnikov, N. N. (Kernperiodizitäten) 224.
- Kołos, Włodzimierz (Scattering of slow neutrons) 435.
- Kompaneec, A. S. (Self consistent field) 223.
- Konopinski, E. J. (Pseudoscalar β coupling and nuclear spin-orbit coupling) 228.
- Korevaar, Jacob (Littlewood's theorem) 58; (Numerical Tauberian theorem) 59; (Dirichlet and Lambert series) 305.
- Kosambi, D. D. (Metric in path-space) 408.
- Kosko, E. (Local modification in redundant structures) 174.
- Koster, G. F. s. J. C. Slater 444.
- Kostjukov, A. A. (Wellenwiderstand und Auftrieb von Körpern) 189.
- Kostovskij, A. N. (A. S. Kovanko) 2.
- Koszul, J. L. (Algèbres de Lie résolubles) 21.
- Kothari, D. S. (Production of pions) 219.
- — — s. F. C. Auluck 218, 370.
- L. S. (Riesz potential and quantum electrodynamics. II.) 428.
- Kotik, Jack s. G. Birkhoff 86.
- Kovancov, N. I. (Geradenkomplex) 401.
- Kövari, T., V. T. Sós and P. Turán (Problem of K. Zarankiewicz) 7.
- Koźniewska, I. (Central moment for Pólya's distribution) 121.
- Kračkovskij, S. N. (Singularitätsgebiete des Operators $T\lambda = E - \lambda A$) 344.
- Kracmar, F. (Magnetisches Feld stromdurchflossener Leiter) 201.
- Krames, Josef (Hauptaufgabe der Luftphotogrammetrie) 423; (Gegenseitige Orientierung von Luftaufnahmen) 423.
- Krasner, Marc (Prolongement analytique) 268.
- Krasnosel'skij, M. A. und L. A. Ladyženskaja (Uryson'sche Sätze) 109.
- — — und Ja. B. Rutickij (Orlicz'sche Räume) 344.
- Krasovskij, N. N. (Stabilität einer Bewegung im Großen) 320.
- — — s. E. A. Barbašin 320.
- Kravtchenko, Julien, Gaston Sauvage de Saint-Marc et Mladen Boreli (Singularités des écoulements plans permanents) 198.
- Kreis, H. (Interpolierte Zahlenreihen) 57.
- Kreisel, G. (Complete interpretations by models) 6.
- Krejn, M. G. (Integralgleichungen) 333.
- Krejnes, M. A. und N. D. Aizenstat (Nomogrammdarstellung) 361.
- Krettner, J. (Schiefwinklige Platten) 177.
- Krickeberg, Klaus (Hypotheses de Vitali) 51; (Integralsatz. II.) 149.
- Kriessman, C. J. und Herbert B. Callen (Magnetic susceptibility of transition elements) 447.
- Krishnan, Sir K. S. s. S. C. Jain 200.
- Kristesku (Cristescu), N. (Belastungs- und Entlastungswellen) 184.
- Krjučin, A. F. (Strömung um keilförmiges Profil) 188; (Widerstand eines Profils) 189.
- Krook, M. s. P. L. Bhatnager 236.
- Kručkovič, G. I. (Klassifikation Riemannscher Räume nach Bewegungsgruppen) 402.
- Krull, Wolfgang (Variationsrechnung) 92.
- Kruskal, Martin D. (Components under a random mapping function) 370; (Bridge theorem) 396.
- William (Non-central t density functions) 127.
- Krylov, V. I. (Mechanische Quadraturen) 359.
- Kubo, Tadao (Symmetrization and univalent functions) 308.
- Kudō, Hirokichi (Experiments and statistics) 375.
- Kudrjavcev, L. D. (Satz von S. M. Nikol'skij) 286.
- Kuessner, H. G. (Unsteady lifting surface theory) 188.
- Kuipers, L. and B. Meulenbeld (Convergents of a continued fraction. II.) 45.
- Kumar, Ram (Operational calculus) 335.
- Kümmel, Hermann (Fester Körper) 447.
- Kurepa, Georges (Généralisation des matrices) 281.
- Kuznecov, P. I., R. L. Stratonočič und V. I. Tichonov (Zufallsfunktion) 365.
- Kyle, R. H. (Branched covering spaces) 421.
- Laberrigue-Frolow, Jeanne et Roger Nataf (Spectres β interdits) 228.
- Labs, D. (Streuung in Fraunhoferlinien. II.) 454.
- Lachenbruch, S. H. s. L. Marton 206.
- Lacroix, Roger (Courbes de résonance paramagnétique) 447.
- Ladopoulos, Panaiotis D. (Théorème de Clifford) 386.
- Ladyženskaja, O. A. (Allgemeine Beugungsaufgabe) 204.
- Ladyženskij, L. A. (Vollständigkeit eines Urysonschen Operators) 344.
- — — s. M. A. Krasnosel'skij 109.
- Lafleur, Charles (Développement en série de Taylor de la fonction de Dirac) 335.
- — — et V. Namias (Équation de Wiener-Hopf) 335.
- Laforge, Alexandre (Solution itérative de l'équation de Schrödinger) 211.
- Lagerstrom, P. A. s. A. M. Rodriguez 189.
- Lagrange, René (Réseaux d'hélices) 397.
- Lah, Ivo (New kind of numbers) 379; (Ableitungen der Versicherungswerte nach Zinsmaßen) 380.
- Laha, R. G. (Bessel function distributions) 365.
- Lakshmana Rao, S. K. s. Rao, S. K. Lakshmana 93.
- Lal, Goverdhan, Georges Papy et Jakob Sonnenschein (Calcul en algèbre extérieure) 322.
- Laigue, Pierre (Fonctions indéfiniment dérivables) 288.

- Lammel, Ernst (Reelle Zahlenfolgen) 266.
- Lampard, D. G. (Wiener-Khintchine theorem) 208.
- Landahl, M. s. H. Merbt 189.
- Landau, L. D. und E. M. Lifšic (Singularitäten einer Strömung) 186.
- Landé, Alfred (Quantum mechanics. II.) 211.
- Landecker, K. (Equiangular spirals) 204.
- Landsberg, Peter T. (Temple's laws of transition) 211.
- Lane, A. M. and L. A. Radiati (Intermediate coupling. II.) 222.
- Ralph E. (Integral of a function) 52.
- Lang, E. D. s. S. Rushton 302.
- J. M. B. and K. J. Le Couteur (Statistics of nuclear levels) 433.
- Reinhard (Sterblichkeitsbeobachtungen) 379.
- Langer, R. E. (Ordinary differential equations) 79.
- Langhaar, H. L. and D. R. Carver (Strain energy of shells) 179.
- Laplume, Jacques (Courant de recombinaison en surface) 452.
- Larnaudie, Marcel (Vibrations moléculaires) 235.
- Laskar, Williams (Méthode de factorisation de Schrödinger) 109.
- Latyševa, K. Ja. (Resultat von B. S. Popov) 315.
- Laue, M. v. (Le Chatelier-Braun'sches Prinzip) 208.
- Lauffer, Rudolf (Konfiguration (10₃)) 144, 386.
- Launay, Jules de (Isotope effect in superconductivity) 240.
- Laval, Jean (Élasticité cristalline) 442; (Diffusion des électrons) 443.
- Lavrent'ev, M. A. (Satz von Liouville) 396.
- M. (Lineare Gleichungssysteme) 351; (Systeme linearer Gleichungen) 351.
- Lawson, J. D. (Čerenkov radiation and Bremsstrahlung) 218.
- Robert W. s. A. Einstein 208.
- Lax, Melvin (Localized perturbations) 445.
- Peter D. (Nonlinear hyperbolic equations) 194.
- Lazard, Michel (Groupes nilpotents et anneaux de Lie) 251; (Groupes de Lie) 256.
- Le Couteur, K. J. s. J. M. B. Lang 433.
- Le Lionnais, F. (Développement des sciences mathématiques) 244.
- Leaderman, Herbert (Linear viscoelasticity theory) 182.
- Lebedev, A. A. (Stabilität einer Bewegung) 321.
- Lednev, N. A., A. V. Grošev, T. A. Elistratova, B. D. Nikitin, M. V. Pentkovskij, M. A. Preobraženskij und L. Z. Rumšiskij (Mathematisches Praktikum) 117.
- Lee, E. W. (Saturation magnetostriktion) 449.
- Leepin, Peter (Volkerversicherung) 136.
- Legendre, Robert (Écoulement supersonique) 194.
- Lehmann, H. (Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten) 214.
- Lehmer, D. H., Emma Lehmer and H. S. Vandiver (Fermat's last theorem) 40.
- Emma s. D. H. Lehmer 40.
- Lehner, Joseph (Schwarz triangle functions) 77.
- Lehnert, Bo (Magneto-hydrodynamic waves) 207.
- Lehto, Olli (Values of meromorphic functions) 307.
- Leibfried, G. (Versetzungsverteilung) 443.
- und P. Haasen (Plastische Verformung) 443.
- Leisenring, Kenneth B. (Theorem in projective n-space) 381.
- Leja, Franciszek (Analytische Geometrie) 143.
- Lemaitre, Georges (Comment calculer?) 363.
- Lemoine, Simone (Rigidité des V_{n-1} d'un espace riemannien S_n) 157; (Variétés riemanniennes) 403.
- Lense, J. (Hankelsche Funktionen) 65.
- Lenz, Friedrich (Streuung mittelschneller Elektronen) 233.
- Hanfried (Dimensionsformeln der projektiven Geometrie) 137; (Desargues'scher Satz) 138; (Winkelteilung) 384; (Kernstrahlen) 423.
- Leont'ev, A. F. (Überkonvergenz einer Reihe) 305.
- Leontief, Wassily (Mathematics in economics) 136.
- Lepage, Th. (Équation du second ordre et transformations symplectiques) 322.
- Lepore, Joseph V. and Richard N. Stuart (Nuclear events at high energies) 225.
- Lesieur, Léonce (Algèbre de la topologie) 161.
- Letov, A. M. s. A. P. Duvaikin 320.
- Levi, F. W. (Geometrisches Überdeckungsproblem) 411.
- Levi-Civita, Tullio (Opere matematiche. I.) 401.
- Levin, A. M. (Hydraulischer Sprung) 191.
- J. J. and Norman Levinson (Singular perturbations of differential equations) 82.
- Levinson, C. A. s. K. A. Brueckner 431.
- Norman (Expansion theorem for differential operators) 316.
- s. J. J. Levin 82.
- Levitan, B. M. (Entwicklung nach Eigenfunktionen) 87.
- Lévy, M. M. and R. E. Marshak (S-wave in pion-nucleon scattering) 219.
- Paul (Théorèmes de calcul des probabilités) 122; (Mouvement brownien à p paramètres) 125.
- Lewis, D. J. (Singular quartic forms) 12.
- Magarett N. s. L. C. Green 232, 233.
- T. J. (Irregular metal surfaces) 451.
- Liber, A. E. (Verallgemeinerte Gruppen) 250.
- Libermann, Paulette (Courbure et torsion de structures infinitésimales) 404.
- Lichnerowicz, A. (Équations de Laplace) 86; (Groupes d'holonomie des variétés) 404.
- Lidiard, A. B. (Ideal Fermi-Dirac gas) 440; (Antiferromagnetism in metals) 450.
- Lifšic, E. M. s. L. D. Landau 186.
- Lighthill, M. J. (Compressible flow theory) 185; (Sound generated aerodynamically. II.) 191.

- Lighthill, M. J. s. T. B. Benjamin 456.
- Lin, Shao-Chi (Cylindrical shock waves) 196.
- Ling jr., Daniel S. (Expansion of wave packets) 425.
- Linnik, Ju. V. (Stationäre Wahrscheinlichkeitsgesetze) 122.
- — — und N. A. Šanin (A. A. Markov) 2.
- Lionnais, F. Le s. Le Lionnais, F. 244.
- Lippmann, Horst (Differentialoperatoren im Hilbertraum) 342.
- Lipps, F. W. and H. A. Tolhoek (Polarization phenomena. I.) 218; (II.) 427.
- Littler, D. J. s. O. R. Frisch 230.
- Livingston, A. E. (Convergence of $\int_a^\infty f(x)dx$) 54; (Inequality due to Beurling) 287; (Zeros of indefinite integrals) 287; (Lebesgue constants for Euler (E, p) summation) 295.
- Ljusternik, L. A. (Differenzapproximationen des Laplaceschen Operators. I. II.) 328.
- Llosá, Ricardo San Juan s. San Juan Llosá, Ricardo 334.
- Lo, Hsu s. J. L. Bogdanoff 354.
- Y. T. (Field of a dipole source) 202.
- Löbbeck, Frank (Integrabilität von Richtungsübertragungen) 397.
- Locher-Ernst, L. (P. Finsler) 3.
- Lochs, Gustav (Diffusion bei geringem Umsatz) 200.
- Lock, R. C. (Hydrodynamic stability of the flow) 190.
- Logunov, A. A. und Ja. P. Terleckij (Beschleunigung geladener Teilchen) 207.
- Lokken, J. E. (Specific heat of helium II.) 239.
- Lomax, Harvard s. M. A. Heaslet 193.
- Lombardo-Radice, Lucio (Sistemi cartesiani di coordinate) 381.
- Longuet-Higgins, H. C. and M. de V. Roberts (Electronic structure of MB_6) 234.
- — — s. M. J. S. Dewar 439.
- Longuet-Higgins, M. S. s. H. S. M. Coxeter 142.
- Loomis, L. H. (Linear functionals) 101.
- Loonstra, F. (Extensions du groupe additif) 17.
- Lorch, Edgard Raymond (Concetto di volume) 160.
- Lee (Lebesgue constants) 295.
- Lord, R. D. (Hankel transform in statistics) 122.
- Lorent, H. (Transformation sur une conique) 387.
- Lorentz, G. G. and A. Robinson (Methods of summability) 289.
- Lorenzen, Paul (Korrespondenzen einer Struktur) 23.
- Łoś, J. (Categoricity in power of elementary deductive systems) 5.
- — — and C. Ryll-Nardzewski (Boolean algebras) 259.
- — — s. A. Ehrenfeucht 253.
- Lotkin, Mark (Problems solvable on computing machines) 118.
- Lozinskij, S. M. (Existenzintervall) 352; (Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen) 353.
- Lublin, Mogens (Loi d'âge commun) 379.
- Lucas, Ilse (Spinpräzession) 448.
- Luce, R. Duncan (Stability for n -person games) 370.
- Ludford, Geoffrey s. J. Diaz 324.
- G. S. S. (Riemann's formula) 85.
- — — — and M. H. Martin (Anisentropic flows) 186.
- Ludwig, Rudolf (Iterationsverfahren für Gleichungssysteme. I.) 349; (Abbildung von Skalen und Nogrammen) 361.
- Lukaes, Eugène (Loi de Gauss-Laplace) 122; (Stochastic processes) 123.
- — — — and Otto Szász (Fourier transforms of distributions. II.) 96; (Trigonometric polynomials) 96.
- Luke, Yudel L. s. M. Golland 197.
- Lundqvist, S. O. s. I. Waller 443.
- Lurçat, François (Résonance quadrupolaire) 224.
- Lüst, R. und A. Schlüter (Kraftfreie Magnetfelder) 454.
- Lyndon, R. C. (Identities in finite algebras) 27.
- Maas, G. J. van der (Dolphtchebycheff arrays) 203.
- Maccoll, J. W. (Method of characteristics) 323.
- MacColl, L. A. (Two-dimensional wave motion) 86.
- MacDonald, D. K. C. (Information theory) 127; (Brownian movement) 199.
- — — — s. J. S. Dugdale 442.
- MacDuffee, C. C. (Theory of equations) 13.
- Machlup, Stefan (Noise in semiconductors) 207.
- Mackie, A. G. (Expansion of a gas cloud into a vacuum) 193.
- MacLane, Saunders s. S. Eilenberg 417.
- Macphail, M. S. (Theory of series) 289; (Reversible matrices) 289.
- Maehly, Hans J. (Algebraische Gleichungen) 111.
- Magenes, Enrico (Problemi al contorno misti) 329.
- Magnus, Arne (Volume-preserving transformations) 311.
- Wilhelm und Ruth Moufang (Max Dehn) 2.
- — — s. A. Erdélyi 364.
- Mahmoud, H. s. A. Aitken 429.
- — — M. s. K. A. Brueckner 431.
- Maier, W. (Inhaltsmessung) 381.
- Majumdar, K. and Y. P. Varshni (Spectroscopic constants of molecules. I.) 235.
- S. Datta (Energy levels) 234.
- Makal, E. (Heun's differential equation) 314.
- Makinson, R. E. B. (Thermal conductivity of metals) 452.
- Malavard, Lucien et Jean Boscher (Méthode des réseaux superposés) 174.
- Malgrange, Bernard (Équations de convolution) 102.
- Malkin, I. G. (Satz von Ljapunov) 320.
- Mammana, Carmelo (Varietà delle curve algebriche) 390.

- Manaresi, Fabio (Equazione differenziale alle derivate parziali) 87.
- Mandel, L. (Random output fluctuations) 373.
- Mandl, M. E. s. B. Davison 436.
- Manneback, C. and A. Rahman (Vibrational spectra of electronic bands. II.) 439.
- Manning, P. P. (Chemical valency. XVII. XVIII.) 438.
- Manukjan, M. M. (Eisenbetonlemente unter Druck) 182.
- March, N. H. (Momentum distribution) 444; (Cohesion of alkali metals) 446.
- — — and B. Donovan (Free electron diamagnetism) 447.
- — — s. R. A. Ballinger 212.
- Marchetti, Luigi (Moti oscillatori) 198.
- Marden, Morris s. F. F. Bon-sall 14.
- Marin Tejerizo, J. A. (Verallgemeinerung von $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$) 54.
- Markus, L. (Differential equations) 81.
- Marsh, Donald s. B. W. Jones 12.
- Marshak, R. E. s. M. M. Lévy 219.
- Marshall, W. (Magnetic scattering of neutrons) 443.
- Marstrand, J. M. (Cartesian product sets) 51.
- Martin, John C. and Nathan Gerber (Pitching airfoils at supersonic speeds) 195.
- M. H. s. G. S. Ludford 186.
- Norman M. (Sheffer functions) 5.
- Marton, L., J. Arol Simpson and S. H. Lachenbruch (Electron-optical shadow method) 206.
- Marty, C., R. Nataf et J. Prentki (Spin de l'état fondamental) 225.
- Marx, Imanuel (Spheroidal wave functions) 300.
- Maslov, V. P. (Quantenmechanische Größen beim Grenzübergang) 425.
- Masotti, Arnaldo (Moti centrali relativi) 174; (Media nei moti centrali) 240.
- Massey, H. S. W. and C. B. O. Mohr (Gaseous reactions) 438.
- — — s. D. R. Bates 236.
- — — s. S. Hochberg 435.
- W. S. (Algebraic methods in topology) 166.
- Masuyama, Motosaburo (Area sampling) 128; (Sample survey results) 134.
- Mathen, K. K. and S. J. Poti (Infant mortality rates) 380.
- Mathews, P. M. s. A. Ramakrishnan 239.
- Matschinski, Matthias (Résultats d'observations) 134; (Tafoni. I.) 455.
- Matsumoto, Masahiko and Wataro Watari (Nucleon scattering by a potential) 227.
- Matsumura, Hideyuki (Automorphism-groups of differential fields) 266.
- Matthews, P. T. and Abdus Salam (Covariant Fock equations) 215.
- Matusita, Kameo (Minimum distance method) 376.
- Maue, A.-W. (Entspannungswelle) 183.
- Maurer, Willy und Max Boss (Verfeinerte *t*-Methode) 136.
- Maurers, H. s. W. Riezler 223.
- Maurin, L. (Elektrische Oktupollinien im Röntgenspektrum) 224.
- Mautner, F. I. (Geodesic flows) 339.
- Mavridès, Stamatia (Métrique et champ électromagnétique) 210; (Théorie unitaire d'Einstein) 210.
- Maxfield, John E. (Graphical group representations) 16.
- Maximon, L. C. s. H. A. Bethe 217.
- — — s. H. Davies 217.
- Mayot, Marcel s. E. Argence 202.
- Mazelsky, Bernard (Power spectral methods of generalized harmonic) 126.
- McKee, J. S. C. s. B. H. Brandsen 432.
- McKenzie, Lionel (Equilibrium in Graham's model of world trade) 137.
- McLachlan, N. W. (Oscillation problem) 173.
- McLaughlin, J. E. and C. J. Titus (Analytic functions) 310.
- McLean, David (Idempotent semigroups) 14.
- McShane, E. J. (Convergence) 413.
- McWeeny, R. (Valence bond theory. I.) 234.
- Meibom, S. s. B. Abeles 446.
- Meidell, Birger (Anwendung des Mittelwertsatzes) 379.
- Meijer, C. S. (*G*-functions. VI. VII.) 66; (VIII.) 67.
- Meinardus, Günter (Partitionen) 38.
- Meixner, J. (Elastische Relaxation) 199.
- Melan, E. (Wärmespannungen) 180.
- Mel'nik, S. I. (Oscillierende Funktionen) 358.
- Menger, Karl (Géométrie) 160.
- Meňšov, D. E. (Teilsummen von trigonometrischen Reihen) 294.
- Merbt, H. and M. Landahl (Oscillating wing) 189.
- Mergeljan, S. N. und A. P. Tamadjan (Nicht-Jordan-sche Gebiete) 338.
- Méric, Jean (Constantes d'un test binomial de Wald) 131.
- — s. R. Huron 121.
- Merli, Luigi (Polinomi di Tchebychef-Hermite) 299.
- Meschkowski, Herbert (Orthonormalsysteme) 72; (Poissonsche Integralformel) 308.
- Meshkov, Sydney and C. W. Ufford (Bacher and Goudsmit method) 233.
- Messiah, A. M. L. s. J. Horowitz 226.
- Méthée, Pierre-Denis (Distributions invariantes) 341.
- Metropolis, Nicholas s. J. E. Kilpatrick 236.
- Meulenbeld, B. s. L. Kuipers 45.
- Meyer, Burnett (Spherical harmonics) 63.
- H. J. G. (Transitions of *F* centers) 451.
- Meyerott, R. E. (Hartree-type wave functions) 446.
- Michael, Ernest (Local properties of topological spaces) 162.
- Michal, A. D. (Polynomials in hyperspheres) 100.

- Michal, A. D. and D. H. Hyers (Solutions of differential equations as analytic functionals) 345.
- Michlin, S. G. (Ausartende elliptische Gleichungen) 329.
- Middleton, David (Information loss) 208.
- Mikeladze, Š. E. (Cauchy-sches Problem) 356.
- Mikolajska, Z. (Oscillations entretenues) 318.
- Mikura, Ziro (Liquid helium II at high pressures) 441.
- Mikusiński, J. (G.-) (Méthode d'approximation de Newton) 44; (Fractions continues finies) 45; (Parquetage du plan par des polygones) 169.
- Milín, V. B. (Elektrische Felder in der Atmosphäre) 456.
- Mill, C. C. s. W. H. Banks 186.
- Miller, G. F. and H. Pursey (Mechanical radiators) 455.
- J. C. P. s. H. S. M. Coxeter 142.
- Kenneth S. (Stability) 174.
- jr., S. C. (WKB-type approximations) 424.
- Mills, W. H. (Diophantine equations) 271; (Four person game-edge of the cube) 371.
- Milnor, John (Link groups) 169.
- Minakov, A. P. (Konturbewegung eines Fadens) 174.
- Minakova, I. I. (Theorie der Synchronisation) 202.
- Minakshisundaram, S. (Eigenfunctions on Riemannian manifolds) 87.
- Minami, Shigeo (Cross sections of meson-nucleon scattering) 429.
- s. S. Hayakawa 429.
- Minardi, E. (Quantizzazione della massa) 427.
- Mineo, Corradino (Superficie delle quali una semplice infinità di geodetiche sono eliche) 152.
- Minorsky, Nicolas (Systèmes à deux degrés de liberté) 82.
- Mises, R. von (Transonic flow) 194.
- Mitchell, B. E. (Unitary transformations) 8.
- Mitchell, L. H. (Fourier integral solution for stresses) 179.
- Mitra, S. C. and Dinesh Chandra (Functions which are self-reciprocal) 335.
- Mittleman, M. H. (Potential effects in radiative correction) 218.
- Miyazakai, Hiroshi (Hopf's classification theorems) 420.
- Mizushima, Masataka (Structure of NO molecules) 235.
- s. T. Ito 433.
- Moessner, Alfred and George Xeroudakes (Sets of integers) 271.
- Moh, Shaw-Kwei (Logical paradoxes) 5.
- Mohanty, R. and M. Nanda (Fourier coefficients) 62.
- Mohr, C. B. O. s. H. S. W. Massey 438.
- Moise, Edwin E. (Affine structures in 3-manifolds. VIII.) 168.
- Moiseiwitsch, B. L. (Electron affinities) 233.
- — — and A. L. Stewart (Approximate molecular orbitals. II.) 234.
- — — s. D. R. Bates 236.
- Moitz, Lloyd (Nonconservation of rest mass) 221.
- Molinari, Anna Maria (Trasformazioni cremoniane di S_n) 392.
- Molinaro, Italo (Équivalence d'Artin) 24.
- Molnár, J. (Überdeckung durch Kreise. II.) 412.
- Monahan, James s. M. Hammermesh 232.
- Monjallon, Albert (Méthode statistique) 372.
- Mönkemeyer, Rudolf (Fareynetze) 276.
- Monna, A. F. (Théorème de Hahn-Banach) 99.
- Moór, Arthur (Oskulierende Riemannsche Räume) 158.
- Moore, John C. (Homotopy groups of spaces) 419.
- Moppert, K. F. (Rechnen mit Operatoren) 108.
- Moran, P. A. P. (Prediction of sunspot numbers) 455.
- Morduchaj-Boltovskoj, D. D. (Bogenlänge einer Kurve) 398.
- Moreau, Jean-Jacques (Tenseurs isotropes et tenseurs de révolution) 150.
- Morel-Viard, (Opérateurs α -correspondants en mécanique ondulatoire) 424.
- Moretti, Fiorenza (Diseguglianze relative alle funzioni armoniche) 332.
- Morgantini, Edmondo (Varietà tridimensionali) 390.
- Morgenstern, Dietrich (Vollständigkeitskriterium von Kacmarz und Steinhaus) 60.
- Morin, F. J. (Lattice scattering mobility) 450.
- Morita, Akira (Theory of scattering) 447.
- Morpurgo, G. (Tamm-Dancoff method) 215.
- Morse, Anthony P. (Derivatives of continuous functions) 54.
- Morton, K. W. s. J. M. Hammersley 369.
- Moses, H. E. (Canonical transformation for an electron-positron field. II.) 425.
- Moskvitin, V. V. (Verbiegung eines Balkens) 182; (Torsion eines Stabes) 182.
- Mossakovskij, V. I. und P. A. Zagubiženko (Aufgabe der Elastizitätstheorie) 179.
- Moszyński, W. (Construction safety factors) 134.
- Motzkin, T. S. and I. J. Schoenberg (Linear inequalities) 350.
- Moufang, Ruth s. W. Magnus 2.
- Mourier, Édith s. R. Fortet 123.
- Moy, Shu-Teh Chen s. Chen Moy, Shu-Teh 127.
- Mrówka, S. (Completely regular spaces) 413.
- Mukherjee, Bhola Nath, s. Hari Das Bagchi 64.
- Mulder, Marjorie M. s. L. C. Green 232, 233.
- Mullender, P. (Prinzipien der Mechanik) 172.
- Muller, D. E. (Boolean algebras) 362.
- Müller, Max (Fourier-Koeffizienten) 115.
- R. (Spezielle gewöhnliche Differentialgleichungen) 354.
- W. (Vierpilzplatte) 176; (Biegungstheorie der Mehrpilzplatte) 177; (Durchbiegung von rechteckigen Platten) 177.
- Munsch, G. et P. Pluvinaige (États $2s$ de HeI) 233.

- Münster, Arnold (Anwendung der δ -Funktionen auf mikrokanonische Gesamtheit) 199.
- Munthe Hjortnaes, Margrethe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\right)$ 293.
- Mycielski, J. (Problem of Sierpiński) 282.
- Myrberg, Lauri (Integration von $\Delta u = c(P)u$) 73; (Green-sche Funktion von $\Delta u = c(P)u$) 73; Poissonsche Gleichung in einem Kreis) 100.
- P. J. (Iteration algebraischer Funktionen) 68.
- Mysovskich, I. P. (Randwert-aufgabe für $\Delta u = k(x, y)u^2$) 332.
- Nachbin, Leopoldo (Topological spaces) 98.
- Nagell, Trygve (Fermatscher Satz) 36; (Diophantine equations) 37.
- Naghi, P. M. and J. G. Berry (Motion of cylindrical shells) 178.
- Nakayama, Tadasi s. M. Ikeda 26.
- Namias, V. s. Ch. Lafleur 335.
- Nanda, M. s. R. Mohanty 62.
- Narasimhan, R. (Parabolic differential equations) 326.
- Nash, Stanley W. (Borel-Cantelli lemma) 123.
- William A. (Thin cylindrical shells) 179.
- Nataf, Roger (Fonctions d'onde de Dirac de l'électron) 228.
- — s. J. Laberrigue-Frow 228.
- — s. C. Marty 225.
- Natucci, Alpinolo (S. Pincherle) 2; (Teorema di Catalan) 36.
- Naya, Shigeo (Spontaneous magnetizations of lattices) 448.
- Naylor, V. D. (Stream function) 184.
- Nečepurenko, M. I. (Čebyševs Methode für Funktionalgleichungen) 110.
- Néel, Louis (Anisotropie magnétique superficielle) 448; (Structures d'orientation dues aux déformations mécaniques) 449.
- Nef, Walter (Zerlegungs-äquivalenz von Funktionen) 285.
- Nef, Walter s. H. Hadwiger 284.
- Nehari, Zeev (Zeros of solutions of differential equations) 315.
- Nejštuler, L. Ja. (Gleichungen mit vier separierbaren Veränderlichen) 118; (Taylorsche Zeile) 364.
- Neugebauer, H. E. J. (Clausius-Mosotti equation) 450.
- Neumann, B. H. (Groups covered by permutable subsets) 16.
- — — s. G. Higman 16.
- Neumer, Walter (Mischsummen von Ordnungszahlen) 48.
- Nevanlinna, Rolf (Metrische lineare Räume. IV.) 97; (Absolute Analysis) 97.
- Neville, E. H. (Oblique pedals) 384.
- Newman, Morris s. K. Goldberg 41.
- Newton, Roger G. (Mass operator in quantum electrodynamics) 216.
- T. A. (Cauchy-Maclaurin integral test) 57.
- Nicolle, Jacques (Symmetrie) 241.
- Nigam, Swami Dayal (Boundary layer on a rotating sphere) 189.
- Niira, Kazuo and Takehiko Oguchi (Magnetic anisotropy energy of FeF_2) 450.
- Nijenhuis, Albert (Holonomy groups of linear connections. II.) 407; (Sequences of local affine collineations and isometries) 407.
- Nikaidô, Hukukane (Neumann's minimax theorem) 100.
- Nikitin, B. D. s. N. A. Lednev 117.
- Nikodým, Otton Martin (Iterations of closure of convex sets) 337; (Opérateurs normaux maximaux dans l'espace hilbertien. I. II.) 341.
- Nitsche, Joachim (Verbiegung gekrümmter Flächenstücke) 397.
- Nobile, Vittorio (Argomento galileiano) 243.
- Noble, M. E. (Coefficient properties of Fourier series) 295; (Cardinal series) 305.
- Nollet, Louis (Axes du premier groupe de torsion) 391.
- Nomzu, Katsumi (Algèbre d'holonomie d'un espace homogène riemannien) 404.
- Nordsieck, A. (Integral in the theory of Bremsstrahlung) 216.
- Norman, Robert Z. s. F. Harary 172.
- Novák, J. (Completely regular sets) 413.
- Nužin, M. T. (Inverse Aufgabe der Filtration mit Druck) 199.
- balski, J. (Testing measuring instruments) 131.
- Oberhettinger, F. s. A. Erdélyi 364.
- Obi, Chike ($(E)\tilde{x} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x)\tilde{x} + x + \varepsilon_3 x^2 = 0$) 80.
- Obláth, R. ($x^m + 1 = y^n$) 36.
- Obreschkoff, Nikola (Algebraische Gleichungen mit reellen Koeffizienten) 247.
- O'Brien, Stephen and J. L. Synge (Instability of the tippe-top) 173.
- Obuchov, A. M. (Beschreibung stetiger Felder) 369.
- Oderfeld, J. (Operating characteristic curves of single sampling plans) 132.
- — and S. Zubrzycki (Testing flowmeters) 132.
- Odqvist, F. K. G. (Elastische Ringe starker Krümmung) 175.
- Offerhaus, M. J. s. E. G. D. Cohen 441.
- Ogawa, Shuzo, Hisaichiro Okonogi and Sadao Ōneda (Boson-Fermion interaction) 429.
- Ogieveckij, I. I. (Summierung von Doppelreihen) 293.
- Oguchi, Takehiko s. K. Niira 450.
- Öhman, Lars (Drag of a shock) 197.
- Ohmann, D. (Quermaßintegrals. II.) 160.
- Okonogi, Hisaichiro s. Sh. Ogawa 429.
- Okubo, Susumu s. N. Fukuda 429.
- Oldekop, W. und F. Sauter (Austrittsarbeit aus Metallen) 451.
- O'Leary, Austin J. (Equations for wave speeds) 183.
- Olejník, O. A. und T. D. Ventcel' (Cauchysches Problem) 326.
- Oliver, Henry s. F. V. Pohle 180.

- Oliver, H. William (Exact Peano derivative) 285.
- Olkin, I. and S. N. Roy (Multivariate distribution) 373.
- Olsen, H., H. Wergeland and H. Øveraas (Scattering from ionization tracks) 212.
- — s. F. Bakke 172.
- Olson, F. R. (Difference equations) 78.
- Óneda, Sadao s. Sh. Ogawa 429.
- Oppenheim, A. (Indefinite binary quadratic forms) 42; (Irrationality of certain numbers) 45.
- Orchard-Hays, Wm. s. G. B. Dantzig 351.
- Ording, F. B. (Winkelmesung) 110.
- Orgeval, Bernard d' (Surfaces de genres 1 et de rang 2) 392.
- Orts, J. Ma. (Satz von Poincaré) 300.
- Osima, Masaru (Basic rings. II.) 263; (Frobenius algebras. II.) 264.
- Ostrowski, A. M. (Nearly triangular matrices) 245.
- Otsuki, Shoichiro s. S. Fujii 218.
- Øveraas, H. s. F. Bakke 172.
- — s. H. Olsen 212.
- Owchar, Margaret and Arnold J. Tingley (Fourier-Hermite expansion of nonlinear functionals) 102.
- Ozgur, Cahit (Vitesse tangentielle dans un écoulement hélicoïdal) 186.
- Paasche, Ivan** (Integrale von Summengleichungen im Unendlichen) 346.
- Pac, Pong Yul s. H. Enatsu 431.
- Pack, D. C. (Laminar flow in a jet of compressible fluid) 190.
- Padmavally, K. (Cesàro summability) 291.
- Page, E. S. (Monte Carlo solution of integral equations) 358; (Mean of a normal population) 373.
- — — s. F. J. Anscombe 131.
- Pailloux, Henri (Équations différentielles linéaires) 81.
- Palamà, Giuseppe (Polinomi associati alle funzioni di Laguerre) 64; (Angolo e la sua proiezione ortogonale) 384.
- Pallu de la Barrière, Robert (Algèbres d'opérateurs) 339.
- Pan, T. K. (First curvature of a curve) 156.
- Pandey, Nirmala (Analytic continuation of series) 305.
- Papy, Georges (Réciproque du théorème de Volterra-Poincaré) 322.
- — s. G. Lal 322.
- Parker, W. V. (Matrices and polynomials) 9; (Normal matrices) 245.
- — — and W. A. Rutledge (Matrices over a polynomial domain) 9.
- Parkus, H. (Anlaufen einer Schubdüse) 187.
- Parodi, Maurice (Polynomes d'Hurwitz) 14; (Fonctions de Bessel) 63; (Zéros de la dérivée du rapport de deux polynomes d'Hurwitz) 247.
- Parzen, G. and T. Wainwright (Scattering of electrons and positrons) 435.
- Patel, N. J. s. K. M. Gatha 432.
- Pauc, C. Y. (Leibniz in Paris) 243.
- — — s. Otto Haupt 284.
- Pauwen, L. J. s. M. Dehalu 2.
- Peaslee, D. C. s. R. W. King 228.
- Pedoe, D. s. W. V. D. Hodge 387.
- Peeples jr., W. D. (Elliptic curves) 146.
- Peiser, A. M. s. S. Katz 84.
- Penez, Jacqueline (Approximation by boundary values) 303.
- Pentkovskij, M. V. s. N. A. Lednev 117.
- Peremans, W. s. H. J. A. Duparc 244.
- Perron, Oskar (Preece'sche Kettenbrüche) 304.
- — — s. E. Frank 304.
- Perrone, N. s. F. S. Shaw 176.
- Persano, A. s. L. Colli 238.
- Pestel, E. (Eigenschaften von Gleitlagern) 184.
- Peters, Johannes (Einschwingvorgänge) 201.
- Petrov, V. V. (Methode der kleinsten Quadrate) 376.
- Petrovskij (Petrowski), I. G. (Gewöhnliche Differentialgleichungen) 313.
- Petrovskij (Petrowski), I. G. and L. A. Čudov (Unstetigkeit der Wellengleichung) 325.
- Peyerimhoff, Alexander (Summierbarkeitsfaktoren) 57; (C_x -Mittel von Laplace-Integralen) 93.
- Phibbs, E. s. G. K. Horton 445.
- Picone, Mauro (Condizioni necessarie per un estremo) 90.
- Pidek, H. (Algèbre des objets géométriques dans l'espace X_1) 393; (Algèbre des objets géométriques dans l'espace X_m) 394.
- Pierce, J. R. (Coupling of modes of propagation) 203.
- R. S. (Homomorphisms of semi-groups) 15.
- Pikus, G. E. (Instationäre Wärmeaufgaben) 200.
- Piloty, H. (Zolotareffsche rationale Funktionen) 298.
- Pincherle, L. s. D. G. Bell 445.
- — s. D. P. Jenkins 444.
- Salvatore (Opere scelte. I.) 241.
- Pini, Bruno (Funzioni sub e super-biarmoniche) 332.
- Pinl, Max (Integrallose Darstellung isotroper Kurven) 152; (Gaußsche Krümmung reeller Minimalflächen) 153.
- — s. R. Ara 398.
- Pinsker, I. Š. (Funktion, die am wenigsten von Null abweicht) 294.
- M. S. und A. M. Jaglom (Extrapolation zufälliger Prozesse) 368.
- Pipping, Nils (Elemente der Diagonalkettenbrüche) 44.
- Piranian, George s. P. Erdős 68.
- Pisot, Charles s. J. Dufresnoy 34.
- Pitts, E. (Application of radiative transfer theory) 206.
- Piza, P. A. (Fermat coefficients) 8; (Théorème de Pythagore) 140.
- Pjateckij-Sapiro, I. I. (Analogon zu Satz von Lefschetz) 311.
- Placzek, G. and L. van Hove (Crystal dynamics) 444.
- Plebanski, J. s. L. Infeld 207.
- Pleijel, Åke (Certain Green's functions) 88.

- Pleijel, Arne (Laplace-Transformationen) 334.
- Plesset, M. S. (Stability of fluid flows) 185.
- Pliš, A. (Hyperbolic integro-differential equations) 92; (Uniqueness for the solution of a system of partial differential equations) 323; (Haantjes and Alt curvatures) 409.
- Pliskin, William A. (Tippe-top) 173.
- Plotkin, B. I. (Nilgruppen) 251.
- Plumpton, C. and V. C. A. Ferraro (Magnetic oscillations of a star) 455.
- Pluvinage, P. s. G. Munschy 233.
- Podgoreckij, M. I. s. E. I. Adirovič 216.
- Pogorelov, A. V. (Unendliche konvexe Flächen) 154.
- Pogorzelski, W. (Mouvement stationnaire dans une couche gazeuse rayonnante) 200.
- Pohle, Frederick V. and Henry Oliver (Model of supersonic wing) 180.
- Poincaré, Paul (Constante de temps d'un guide) 204; (Vitesse de groupe) 211.
- Pol, Balth. van der (Representation of numbers as sums of squares) 272.
- Polak, A. I. (Offene Abbildungen) 74.
- Polder, D. (Brownian motion) 199.
- Poli, L. (Images symboliques) 94.
- Polkinghorne, J. C. (S matrix) 213.
- Pollaczek, Félix (Théorie stochastique des compteurs électroniques) 126.
- Pólya, G. und G. Szegő (Aufgaben und Lehrsätze der Analysis. I. II.) 278.
- Poncet, Jean (Groupes simples localement compacts) 22.
- Poots, G. s. A. Dalgarno 234.
- Popadić, Milan S. (Ordered sets with finite chains) 47.
- Popoff, Kyrille (Osmose) 199.
- Popov, E. P. (Eigenschwingungen nicht-linearer Systeme) 353.
- Popruzenko, J. (Convergence de M. Sierpiński) 281; (Ensembles indénombrables. I.) 282.
- Pösch, H. und Th. Fromme (Programmorganisation bei kleinen Rechenautomaten) 363.
- — s. Th. Fromme 363.
- Posey, E. E. s. O. G. Harrold jr. 168.
- Postnikov, A. G. (Satz vom Abelschen Typus für eine Potenzreihe) 292.
- M. M. (Funktionenfamilien und Algebren) 264.
- Poti, S. J. s. K. K. Mathen 380.
- Pözl, Hans (Sternkörper) 276.
- Pounder, J. R. (Rigid surfaces of revolution) 208.
- Povarov, G. N. (Mehrpol-Kontakte) 201.
- Powell, James H. s. L. Katz 422.
- Pozzolo Ferraris, Giulia (Lato di poligoni regolari) 384.
- Prachar, K. (Integers having representations as a sum of two primes) 38.
- Pradillo, J. García s. García Pradillo, J. 8.
- Predonzan, Arno (Varietà algebriche) 149; (Sistemi lineari di superficie algebriche) 391.
- Premaswarup, D. (Intensity formulae for bands. III.) 235; (Perturbations in molecular electronic terms. I.) 439.
- Prentki, Jacques s. M. Jean 433.
- — s. C. Marty 225.
- Preobraženskij, M. A. s. N. A. Lednev 117.
- Preston, G. B. (Lattice of sub-algebras) 24; (Factorization of ideals) 25.
- Preuss, H. (Zweizentren-Wechselwirkungsintegrale. IV.) 233.
- Price, P. C. (Numerical integration) 115; (Reduction by least squares) 225.
- P. J. (Perturbation theory for wave equation) 212.
- V. E. s. S. F. Boys 437.
- Primrose, E. J. F. (Real projective geometry) 385.
- Prins, H. J. (Prüfmethoden) 373.
- Pritchard, H. O. and F. H. Sumner („Repeating“ secular determinants) 233.
- Proca, A. (Mécanique du point) 220; (Quantification en mécanique spinorielle) 220.
- Proceedings of the Eastern Joint Computer Conference (Information processing systems) 362.
- Prodi, Giovanni (Problemi al contorno non lineari per equazioni di tipo parabolico) 327.
- Pröll, A. (Schwingenflugproblem) 189.
- Protter, M. H. (Generalized Tricomi problem) 85; (Boundary value problems for the wave equation) 325; (Non-characteristic problem) 325.
- Proudman, Ian s. G. K. Batchelor 192.
- Pukánszky, L. (Theorem of Mautner) 104; (Theorem of Radon-Nikodym) 105.
- Purcell, E. M. (Nuclear magnetism) 224.
- Pursell, Lyle E. s. M. E. Shanks 421.
- Pursey, H. s. G. F. Miller 455.
- Putnam, C. R. (Riemann zeta-function) 69; (Limit-point criterion) 79; (Operators of quantum field theory) 213; (Continuous spectra of singular boundary value problems) 316.
- Pychteev, G. N. (Potential der Bewegung einer Flüssigkeit) 185.
- Quade, W. (C. Müller) 2.
- Quantie, Chow (Opalescence and concentration fluctuations. I.) 239.
- Quenouille, M. H. (2^o factorial experiment) 378.
- Rabi, I. I., N. F. Ramsey and J. Schwinger (Rotating coordinates in magnetic resonance problems) 433.
- Rabinowitz, Philip s. M. Abramowitz 424.
- Racine, C. (Riemann integral) 53.
- Rademacher, Hans (Riemann integrability) 53.
- Radicati, L. A. (Isotopic spin. II.) 224.
- — s. A. M. Lane 222.
- Rado, R. (Series of ordinal numbers) 48; (Decomposition of partitions) 49.

- Radok, J. R. M. (Instability of simply supported plates) 177.
- — — und Alfred Heller (Integralgleichungen gewisser Schwingungsprobleme) 183.
- Radsijewski, W. W. (Problem dreier strahlender und gravitierender Körper) 453.
- Ragab, F. M. (Integrals involving E -functions) 298.
- Rahman, A. (Determinants) 352.
- — — s. C. Manneback 439.
- Raimes, S. (Energy band shapes) 445; (Correlation energy in metals) 445.
- Raine, Charles W. (Fibonacci equiareal triangles) 36.
- Rajagopal, C. T. (Tauber's theorem, II.) 58; (Riess summability) 292; (Riemann-Liouville integral) 336.
- Rajski, C. (Optimal size of a sample) 128.
- Ramakrishna, Rao, V. s. Rao, V. Ramakrishna 437.
- Ramakrishnan, Alladi (Molecular distribution functions. I.) 239; (Counters with random dead time) 437.
- — — and P. M. Matthews (Stochastic problem) 239.
- Ramanna, R. and S. B. D. Iyengar (Distribution of thermal neutrons) 436.
- Ramanujan, M. S. (Summability methods of type M) 289.
- Ramsey, N. F. s. I. I. Rabi 433.
- Rangaswami Aiyer, K. (Quartic curve) 142.
- Rankin, R. A. (Horocyclic groups) 76.
- Rao, S. K. Lakshmana (Dirichlet's integral) 93.
- V. Ramakrishna s. V. Suryanarayana 437.
- Rapoport, I. M. (Eindimensionale Randwertaufgabe) 354.
- Rasmussen, H. Q. and O. K. Hesselberg (Motion of periodic comets) 452.
- Rastogi, R. P. and R. C. Srivastava (Thermal transpiration of a dissociating gas) 199.
- Rathie, C. B. (Infinite integrals involving E -functions) 301.
- Rauch, S. E. (Properties of Cesàro sums) 309.
- Ravenhall, D. G. s. D. R. Yennie 228.
- Rayski, Jerzy (Regular field theory, II.) 216; (III.) 426.
- Rédei, Ladislaus (Kreisteilungspolynom) 13; (Kantenbasen für Graphen) 171.
- László (Algebra, I.) 257.
- Redheffer, R. M. (Functional equations) 206.
- Redlich, Martin G. and Eugene P. Wigner (β -decay matrix element) 436.
- Redmond, P. J. (Fractional parentage coefficients) 232.
- Regge, T. (Tensor force and intermediate coupling) 223.
- Reich, Edgar (Subordinate analytic functions) 309.
- K. H. (Ferromagnetische Resonanz) 449.
- Reichardt, W. (Optische Elektronenübergänge) 451.
- Reichman, Raphael I. (Summation formula) 8.
- Reik, Helmut G. („Irreversible Vorgänge, II.“) 199.
- Reismann, Herbert (Bending of plates) 180.
- Reiz, A. (Intensities and fluxes in a stellar atmosphere) 454.
- Remak, Robert (Zahlkörper mit schwachem Einheitsdefekt) 268.
- Rembs, Eduard (Konvexe Kalotten) 154.
- Renaudie, Josette (Espaces harmoniques) 156.
- Rényi, A. s. G. Hajós 374.
- Rescher, Nicholas (Leibniz's logical calculi) 3.
- Reulos, René (Équations de Maxwell et de Lorentz) 208.
- Reynolds, J. (Variety with a certain singular point) 148.
- Reza, F. M. (RLC canonic forms) 201.
- Rhodes, P. s. E. W. Elcock 445.
- jr., J. Elmer (Thermal energy) 441.
- Ribeiro, Hugo B. s. B. L. van der Waerden 25.
- Ricabarra, R. s. M. Cotlar 257.
- Richert, H.-E. (Square-free numbers) 40.
- Richter, W. (Koordinatentransformationen mit Hilfe eines Fluchtliniennomogramms) 116; (Berührungsräume) 162.
- Rideau, Guy (Équations de la théorie des champs. I. II. III.) 215.
- Riedwil, H. und H. Debrunner (Quadratur des Kreises) 143.
- Riezler, W., F. Esper und M. Maurers (Reizschwelle des Auges) 223.
- Riguet, Jacques (Coordonnées relationnels. II. III.) 47.
- Riley, James D. (Dirichlet difference problem) 356.
- Ringel, Gerhard (Lokal-reguläre Zerlegungen) 169; (Maximalzahl der Nachbargebiete) 170.
- Rinow, W. (Innere Geometrie der Flächen) 159.
- Ripelle, M. Fabre de la s. Fabre de la Ripelle, M. 83.
- Rivlin, R. S. s. J. L. Ericksen 181.
- Rizza, Giovanni Battista (Algebra di Clifford) 28; (Funzioni nelle algebre complesse) 310.
- Robbins, Herbert s. S. G. Ghurye 129.
- — s. G. Kallianpur 367.
- Roberts, M. de V. s. H. C. Longuet-Higgins 234.
- Robertson, D. J. and I. L. B. Sturrock (Active investment policy) 136.
- Robinson, Abraham (Predicates in algebraically closed fields) 267.
- s. G. G. Lorentz 289.
- G. de B. s. J. S. Frame 254, 255.
- Lawrence Taylor (Stability for nuclear reactors) 230.
- W. J. (Two-particle spin-orbit interactions) 432.
- Robison, Gerson B. (Invariant integrals) 101; (Doodles) 141.
- Rodriguez, A. M., P. A. Lagerstrom and E. W. Graham (Drag reduction of wings) 189.
- Roederer, Juan G. (Nukleonenkomponente der kosmischen Strahlung) 437.
- Rogers, C. A. (Theorem of Macbeath) 43; (Product of linear forms) 43.
- M. H. (Forced flow of thin layer of viscous fluid) 456.

- Rogosinski, W. W. (Linear extremum problems for polynomials) 62.
- Rohleder, Hans (Dreiwertiger Aussagenkalkül und Beschreibung von Schaltungen) 362.
- Rohrberg, A. (Rechenmaschinen) 117.
- Rohrlich, F. and B. C. Carlson (Positron-electron differences in energy loss) 231.
- — s. M. A. Catalan 233.
- — s. D. M. Chase 227.
- Rooney, P. G. (Laplace integral of abstractly-valued functions) 93; (Inversion formula for Laplace transformation) 334.
- Rootselaar, B. van (G. F. C. Griss). 2.
- Rosada, Giorgio (Formula di Taylor) 289.
- Rosati, Luigi Antonio (Equazione diofantea) 36.
- Mario (Varietà di Piccard) 390.
- Rose, Alan (2-valued propositional calculus) 5.
- D. J. s. W. P. Allis 237.
- M. E. (Angular correlation) 226; (Spherical tensors in physics) 434.
- Rosen, Philip (Differential equations) 236.
- Ross, Marc (Pion photoproduction) 220.
- Rostoker, N. s. W. Kohn 444.
- Roth, J. P. s. R. Wilder 164.
- K. F. (Sets of integers. II.) 272.
- — s. I. M. Vinogradov 275.
- Leonard (Teorema di Castelnuovo-Humbert) 147.
- William E. (Product of two matrices) 9.
- Rothe, R. (Höhere Mathematik. Teil V. Formelsammlung) 278.
- Rothenstein, W. (Inelastic collisions of electrons with atoms) 438.
- Rothman, M. (Infinite plate under loading) 176.
- Roussopoulos, Paul N. (Diffusion élastique d'une particule) 232.
- Roy, Maurice (Ondes de choc stationnaires) 195.
- Purnendu Mohon (Block designs) 377.
- S. K. (Lattice series) 442.
- S. N. s. I. Olkin 373.
- T. C. s. N. R. Sen 453.
- Royden, H. L. (Quasi-conformal mapping) 73; (Subdomains on a Riemann surface) 309.
- — — s. P. R. Garabedian 71.
- Rozet, O. (A. Delgleize) 2.
- Ruben, H. (Order statistics in samples) 128.
- Rubin, Hanan (Dock of finite extent) 198.
- Robert J. s. R. A. Alpher 197.
- Vera Cooper (Fluctuations in space distribution) 240.
- Rubinstein, G. Š. (System von linearen Ungleichungen) 246.
- Ruderman, M. A. s. A. Aitken 429.
- Rüdiger, D. (Randstörungsproblem isotroper Kreiszylinderschalen) 178.
- Ruffini, Paolo (Opere. III.) 241.
- Ruhlig, Arthur J. s. W. J. Graham 238.
- Rumšiskij, L. Z. s. N. A. Lednev 117.
- Rund, Hanno (Curvature tensors) 404; (Generalised metric spaces) 405; (Nicht-holomone Geometrie) 405.
- Rushton, S. (Confluent hypergeometric function) 302.
- — and E. D. Lang (Confluent hypergeometric function) 302.
- Ruston, A. F. (Operators with a Fredholm theory) 109.
- Rutickij, Ja. B. s. M. A. Krasnosel'skij 344.
- Rutishauser, Heinz (Quotienten-Differenzen-Algorithmus) 347; (Analogon zum Quotienten-Differenzen-Algorithmus) 348.
- Rutledge, W. A. s. W. V. Parker 9.
- Rutowski, Edward S. (Aircraft performance problem) 189.
- Ryll-Nardzewski, C. (Cartesian product of spaces) 413.
- — s. J. Łoś 259.
- Ryžkov, V. V. (Transformation von isometrischen Flächen) 397.
- Rzewuski, Jan (Differential structure of non-local theories. I.) 427.
- Saalfeld, K. s. C. Weber 186.
- Sabidussi, Gert (Loewy-groupoids) 172.
- Safarevič, I. R. (Auflösbare Erweiterungen algebraischer Zahlkörper) 31; (Einbettung von Körpern) 31.
- Saha, A. K. s. M. K. Banerjee 228.
- Sahni, R. C. s. S. F. Boys 437.
- Saint-Marc, Gaston Sauvage de s. Sauvage de Saint-Marc, Gaston 198.
- Sakamoto, Michiko s. E. Ishiguro 233.
- Salam, Abdus s. P. T. Matthews 215.
- Salmon, Paolo (Curva semplice dello spazio S_3) 146.
- Salter, L. (Ideal crystal at absolute zero) 442.
- Saltzberg, Bernard s. G. I. Cohn 113.
- Salzer, Herbert E. (Osculatory interpolation) 116; (Inverse interpolation for the derivative) 116.
- Samelson, Klaus und Friedrich L. Bauer (Programme für Rechenautomaten) 362.
- Samet, P. A. (Algebraic integers. II.) 34; (Product of linear forms. I. II.) 276.
- Samoloff, J. (Iterative difference equations) 78.
- Sampei, Yoemon (Lattice completions and closure operators) 23.
- Samuel, Isaac (Dérivées partielles des équations séculaires) 438.
- — s. R. Gouarné 9.
- San Juan, Ricardo (Uneigentliche Integrale) 54; (Uneigentliche Doppelintegrale) 54; (Contre-exemple de fonctions quasi analytiques) 288.
- San Juan Llosá, Ricardo (Durch Laplace-Integrale darstellbare Funktionen) 334.
- Sandham, H. F. (Series of partitions) 38; (A square as sum of squares) 39.
- Šanin, N. A. s. Ju. V. Linnik 2.
- Sansone, Giovanni (Analisi matematica. II.) 278.
- Sarhan, A. E. (Mean and standard deviation) 377.
- Sario, Leo (Capacity of boundary) 74.
- Sarkar, Shib Sankar s. H. D. Bagchi 144.

- Sartori, L. and V. Wataghin (*P*-wave pion nucleon scattering) 219.
- Sasakawa, Tatuya (Error estimation of rearrangement collisions) 225.
- Sasaki, Usa (Orthocomplemented lattices) 259.
- Sasayama, Hiroyoshi (Extensions of fractional grade) 150.
- Satchler, G. R. (Radiative capture and stripping reactions) 226; (*j-j* coupling) 434.
- Sathe, L. G. (Problem of Hardy. III.) 275.
- Sato, Iwao and Kiyomi Itabashi (Deuteron) 432.
- Sauer, R. (Équations aux dérivées partielles du second ordre) 83.
- Saul'ev, V. K. (Aufsuchen von Eigenwerten) 356.
- Sauter, F. s. W. Oldekop 451.
- Sauvage de Saint-Marc, Gaston s. J. Kravtchenko 198.
- Savage, I. Richard s. E. L. Grab 127.
- Savage, Leonard J. (Foundations of statistics) 126.
- Savin, G. N. (Dynamische Kräfte im Aufzugsseil) 175.
- Sawada, Katurō s. T. Akiba 430.
- — s. N. Fukuda 429.
- Sawyer, D. B. (Lattice determinants of asymmetrical convex regions) 43.
- Saxon, David S. s. E. Gerjuoy 226.
- Sbrana, Francesco (Curve sghembe) 395.
- Sce, Michele (Algebra reale e complessa. I.) 74; (II.) 75; (III.) 310.
- Schafroth, M. R. (Fermion assemblies) 239; (Self-consistent spin-wave theory) 448.
- Scharn, H. (Seitenstabilität der Flugzeuge) 189.
- Schatzman, Evry (Granulation solaire. II.) 455.
- Schelling, Hermann von (Coupon collecting) 370.
- Scherk, Peter (Curve sferiche) 151.
- Schiff, B. (Eigenvalues of electronic states) 445.
- L. I. (Total cross section) 426.
- Schiffer, M. s. P. R. Garabedian 89.
- Schild, A. (Functions schlicht in the unit circle) 307.
- Schlechtweg, H. s. E. Glatzel 181.
- Schlegel, Richard (Properties of matter) 172.
- Schlichting, Hermann (Cascade flow) 187.
- Schliebs, Günter (Algebra der Logik) 4.
- Schlüter, A. s. R. Lüst 454.
- Schmeidler, W. s. R. Rothe 278.
- Schneider, Hans (Latent roots of a matrix) 12.
- Theodor (Charakterisierung algebraischer Funktionen) 68.
- Schnittger, Jan. R. (Vortex flow) 187.
- Schoenberg, I. J. s. T. S. Motzkin 350.
- Schoeneberg, Bruno (Quaternionen) 312.
- Scholomiti, N. C. (Euler φ -function) 37.
- Schöneborn, Heinz (Topologien in Abelschen Gruppen. I.) 22; (II.) 256.
- Schottlaender, Stefan (Automatisch gesteuerte Bewegungen) 362.
- Schröder, J. (Störungsrechnung für lineare Eigenwertprobleme) 355; (Potentialaufgaben) 357.
- Schrödinger, E. (Electric charge and current) 210.
- Schroeder, J. (Zu „Fehlerabschätzungen für Störungsrechnung“) 343.
- Schücking, E. (Schwarzschild'sches Linienelement) 210.
- Schuff, Hans Konrad (Polynome über Verbänden) 23; (Summation neutraler Zerschlagungen) 260.
- Schuh, Fred (Geometrische Örter. I. II. III. IV.) 141.
- H. (Turbulent boundary layers) 191.
- Schulz, Günter (Interferenzen und Längenmessung) 205.
- Schumann, Walter (Principe de B. de Saint-Venant) 174.
- Schuster, S. s. G. A. Dirac 170.
- Schütte, Kurt (Ordnungszahlen) 49.
- Schwaar, Pierre (Compresseurs axiaux supersoniques) 195.
- Schwabbhäuser, Wolfram (Geordnetes Paar von Mengen) 46.
- Schwartz, C. (Odd-odd nuclei) 224.
- J. (Change in variables in a multiple integral) 53.
- Schwarz, Eleonore (Randwertproblem der Potentialgleichung) 118.
- Schweber, S. S. (Tamm-Dancoff method) 215.
- Schwinger, J. s. I. I. Rabi 433.
- Scorza Dragoni, Giuseppe (Analisi matematica. I.) 278.
- Scott, Allen B. (Surface energy of sodium) 452.
- D. R. (Heat flow in anisotropic strata) 200.
- J. M. C. (Surface of a nucleus) 226; (Neutron scattering) 227.
- W. R. (Subgroups of given index) 17; (Automorphism group of a finite group) 253.
- Sears, D. B. (Integral transforms) 95; (Differential equation. II.) 315.
- Secrest, E. L. (Normal coordinates) 441.
- Sedov, L. I. (Stellare Gesetzmäßigkeiten) 454.
- Seeger, Alfred und Hubert Blank (Sprünge in Versetzungslinien) 443.
- Segre, Beniamino (Forme armoniche ternarie) 83; (Teoria delle algebre) 149; (F. Conforto) 244; (Forme armoniche. I. II.) 391.
- Seidel, Jacob (Angoli fra due sottospazi) 382.
- Seiden, Esther (Construction of orthogonal arrays) 7.
- Joseph (Instabilités des orbites) 207; (Couplage entre oscillations dans le cosmotron) 207.
- Selberg, Sigmund (Conjecture by E. Jacobsthal) 38.
- Seligman, George B. (Semi-simple restricted Lie algebras) 265.
- Selmer, Ernst S. (Rational points on cubic curves) 271.
- Simple, J. G. (Geometry of curve and surface elements) 145.
- Sen, Bibhutibhusan (Indentation problems) 180.

- Sen, N. R. and T. C. Roy (Gravitational field of a star cluster) 453.
- Septier, Albert (Pouvoir séparateur) 205.
- Ser, J. (Disposition des restes) 35.
- Serman, D. I. (Aufgabe der Potentialtheorie) 90.
- Serrin, J. B. (Subsonic flows) 187; (Wave equation) 324; (Phragmén-Lindelöf principle) 328.
- Severi, Francesco (Funzioni quasi abeliane) 269.
- Sevick, J. s. J. E. Storer 202.
- Sexton, C. R. (Twin primes) 35.
- Shah, G. Z. s. K. M. Gatha 432.
- S. M. and S. K. Singh (Maximum term of an entire series) 306.
- Shanks, Daniel (Logarithm algorithm) 120.
- M. E. and Lyle E. Pursell (Lie algebra of a smooth manifold) 421.
- Shapiro, Victor L. (Double trigonometric series) 298.
- Shaw, F. S. and N. Perrone (Nonlinear deflection of membranes) 176.
- Shenstone, A. G. s. M. A. Catalan 233.
- Shephard, G. C. (Wythoffian polytopes) 142.
- — — and J. A. Todd (Reflection groups) 143.
- Shepherdson, J. C. (Problems of Kurepa) 281.
- Shiffman, M. s. D. Gilbarg 188.
- Shiraiwa, Kenichi (A_n^2 -polyhedron) 165.
- Shoenfield, Joseph R. (Relative consistency proof) 4.
- Sibuya, Yasutaka (Système des équations différentielles ordinaires. I. II.) 317.
- Sichel, H. S. s. A. G. Arbous 137.
- Šidlovskij, A. B. (Werte von ganzen Funktionen) 278.
- Siedentopf, Heinrich (Radioastronomie. II.) 453.
- Sierpiński, W. (Racines d'une congruence) 271; (Progressions arithmétiques) 272; (Substitutions linéaires) 282.
- Signorini, A. (Linearisierte Theorie der Elastizität) 180; (Moti rigidi sferici) 394.
- Sikkema, P. C. (Differential operators of infinite order. II.) 109; (III. IV.) 346.
- Sikorski, R. (Notion of distribution) 102.
- Sil, N. C. (Electron capture by ions) 438.
- Silin, V. P. s. V. L. Ginsburg 431.
- Silov, G. E. (Vektoranalysis) 392.
- Silver, Alfred H. (Heat transfer in laminar boundary layer) 191.
- Silvey, Samuel D. (Statistics arising in certain tests) 373.
- Simon, A. and T. A. Welton (Polarization) 226.
- Simpson, J. Arol s. L. Marton 206.
- Sinden, Frank William (Oszillationssatz) 10; (Oscillation theorem for algebraic eigenvalue problems) 352.
- Singh, Daljit (Reciprocal of a prime) 35.
- K. (Hydrazoic acid) 439.
- S. K. s. S. M. Shah 306.
- Sips, R. (Fonctions de Mathieu. V. VI.) 300.
- Širokorad, B. V. (Anwendbarkeit des zentralen Grenzwertsatzes) 366.
- Širšov, A. I. (Unteralgebren) 27.
- Šitnikov, K. A. (Dualitätsbeziehungen für nicht-abgeschlossene Mengen) 163; (Kombinatorische Topologie. I.) 163; (Menge, die kein Gebiet des Raumes zerlegt) 415.
- Skitovič, V. P. (Linearformen von unabhängigen Zufallsgrößen) 367.
- Skopec, Z. A. (Vierecke im Lobačevskischen Raum) 381.
- Skopin, A. I. (p -Erweiterungen eines lokalen Körpers) 267.
- Skornjakov, L. A. (Topologische projektive Ebenen) 169; („Alternativkörper“) 266.
- Skorochod, A. V. (Stabile Verteilungen) 367.
- Skovgaard, H. (Inequalities of Turán type) 299.
- Slansky, Serge (Tenseur de Maxwell) 200.
- Slater, J. C. and G. F. Koster (LCAO method for periodic potential problem) 444.
- Slater, L. J. (Equivalent products) 293; (Confluent hypergeometric functions) 302.
- Slibar, A. und K. Desoyer (Pendel-Schwingungstilger) 174.
- Slichter, L. B. (Elastic earth) 455.
- Šlupecki, J. (Multiplication des types ordinaux) 48.
- Smagorinsky, Joseph (Numerical weather prediction) 363.
- Smart, J. Samuel (Cation distributions) 450.
- Šmidt, O. Ju. (Herkunft der Asteroiden) 240.
- Smirnov, Ju. M. (Nachbarschaftsräume) 163.
- Smith, C. A. B. (Separation of the sexes of parents) 135.
- J. H. (Nuclear scattering of high-energy electrons) 435.
- R. A. (Analytic function having independent real periods) 69.
- R. S. s. J. G. Daunt 441.
- Walter L. (Asymptotic renewal theorems) 124.
- — — s. D. R. Cox 124.
- Smordinskij, Ja. A. (Polarisation bei Streuung von Protonen an Protonen) 432.
- Snapper, Ernst (Equivalence relations) 148.
- Šnejder, A. A. (Verallgemeinerung der H -Mengen) 283.
- Sobolev, S. L. (Mathematische Physik) 84; (Numerische Lösung von Integralgleichungen) 358.
- Socio, Marialuisa De (Campo elettro-magnetico in una guida d'onda a pareti assorbenti) 203.
- Söhngen, Heinz (Endliche Hilbert-Transformation) 95.
- Soloŭev, V. G. s. A. D. Galanin 430.
- Solovine, Maurice s. A. Einstein 208.
- Sommerfeld, Arnold (Mechanik) 172; (Elektrodynamik) 172; (Differentialgleichungen der Physik) 172.
- Sonnenschein, Jakob s. G. Lal 322.

- Sonntag, Rudolf (Torsionsproblem der abgesetzten Welle) 175.
- Soós, Gy. (Affinitäten und Bewegungen in Finslerschen Räumen) 404.
- Sorgenfrey, R. H. (Mappings of convex sets) 166.
- Sós, V. T. s. T. Kövari 7.
- Spasskij, R. A. (Klasse von Regelsystemen) 319.
- Speiser, A. s. L. Eulerus 380.
- Speisman, G. s. R. P. Feynman 219.
- Spencer, L. V. and U. Fano (Energy spectrum) 437.
- Spetner, Lee M. (Errors in power spectra) 207.
- Spratt, E. B. s. A. E. Green 181.
- Spreiter, John R. (Basic equations of transonic flow) 194.
- Springer, T. A. (Theorem of H. Hopf) 28.
- Sprott, D. A. (Block designs) 377.
- Srinivasan, T. P. (Measurable sets) 285.
- Srivastava, R. C. s. R. P. Rastogi 199.
- Stahl, K. (Elastizitätsaufgaben) 174.
- Stallmann, Friedemann (Kreisbogenpolygone. I.) 72.
- Stear, A. L. s. D. R. Bates 235.
- Stech, Berthold (Elektrische Strahlung) 229.
- Stečkin, S. B. (Beste Annäherung von Funktionenklassen) 60.
- Stefánsson, Sigurkarl (Zwei geometrische Örter) 140.
- Stein, K. s. H. Behnke 75.
- S. (Fundamental theorem of algebra) 13.
- S. K. (Homology of two-fold symmetric product) 417.
- Steinfeld, O. (Paper of N. H. McCoy) 264.
- Steinhardt, F. s. C. Carathéodory 303.
- Steinhaus, Hugo (Shuffled four-digit numbers) 121; (Establishing paternity) 135.
- Stellmacher, K. L. (Erzwungene Schwingungen hoher Erregerfrequenz) 113.
- Stern, Martin O. s. O. Chamberlain 227.
- Sternberg, E. s. R. A. Eubanks 175.
- H. M. and R. L. Sternberg (Two-point boundary problem) 83.
- Robert L. (Two-frequency modulation product problem. I. II. III.) 201.
- — s. H. M. Sternberg 83.
- Sterne, Theodore E. (Confidence or fiducial limits) 128.
- Sternheimer, R. M. (Meson production) 219.
- — — and H. M. Foley (Li_2 molecule) 235.
- — — s. H. M. Foley 235.
- Stesin, I. M. (Berechnung von Eigenwerten) 333.
- Stewart, A. L. s. B. L. Moiseiwitsch 234.
- Stewartson, K. (Ellipsoid in a rotating fluid) 184.
- Stibbs, D. W. N. (Absorption lines) 454.
- Sticker, Bernhard (Tafel der trigonometrischen Funktionen) 119.
- Stock, John R. (Arithmetic unit for automatic digital computers) 118.
- Stolt, Bengt, (Gruppenaxiomatik) 249.
- Stone, A. H. s. G. Higman 25.
- Stoneley, R. (Rayleigh waves) 456.
- Storck, Hans s. M. Helbig 379.
- Storer, J. E. and J. Sevik (Plane-wave scattering from obstacles) 202.
- Stratonovič, R. L. s. P. I. Kuznecov 365.
- Straus, A. V. (Resolventen symmetrischer Operatoren) 109.
- Straus, E. G. s. K. Goldberg 41.
- Strebel, K. (Summe, die beim Problem der zwei Stichproben auftritt) 130.
- Strel'cov, V. V. (Gemeinsame Punkte von Geodätischen) 410.
- Strickler, P. s. H. Jecklin 136.
- Stroh, A. N. (Constriction and jogs in dislocations) 443.
- Strubecker, Karl (Potentialflächen) 153.
- Struble, Raimond A. s. K. Fan 162.
- Struik, Dirk J. (History of mathematics) 1; (Free and attached vectors) 393.
- Stuart, Alan (Distribution-free tests of randomness) 133.
- — s. F. G. Foster 378.
- J. T. (Stability of viscous flow) 207.
- Richard N. s. J. V. Lepore 225.
- Stuloff, N. (Dirichletsche Reihen) 78.
- Sturrock, I. L. B. s. D. J. Robertson 136.
- Suchanowskij, V. V. (Dielektrische Bedeckungen) 202.
- Sueoka, Seiichi (Matrix elements of spin-orbit interaction) 223.
- Sugar, George R. (Correlation coefficients from scatter diagrams) 132.
- Sugie, Atsushi (Effect of mass difference between charged and neutral pions) 429.
- Sumner, F. H. s. H. G. Pritchard 233.
- Sun, Kung (Gun Syn) (Sections of schlicht functions) 71; (Koeffizienten schlichter Funktionen) 308.
- Sundrum, R. M. (Lehmann's two-sample test) 374.
- Sunouchi, Gen-ichirō (Convergence criterion for Fourier series) 296.
- — s. S. Koizumi 297.
- Sunyer i Balaguer, F. s. E. Corominas 54, 288.
- Surtees, Walter J. s. J. R. Wait 202.
- Suryanarayana, V. and V. Ramakrishna Rao (Spectrum of chromium. II.) 437.
- Süss, W. (Ebenes Variationsproblem) 399.
- Švec, M. E. (Gleichung vom parabolischen Typus) 326.
- Svekló, V. A. (Lambsche Aufgabe) 174.
- Svenonius, Björn (Dreiecke) 140.
- Sverdllov, L. M. (Anharmonizität und Frequenzen isotoper Moleküle) 235.
- Swanson, John A. (Diode theory) 446.
- Swift, J. D. s. K. Goldberg 41.
- Swinnerton-Dyer, H. P. F. (Minima of cubic norm

- forms) 42; (Inhomogeneous lattices) 42.
- Swinnerton-Dyer, P. s. A. O. L. Atkin 38.
- Syngé, J. L. s. St. O'Brien 173.
- Szász, G. (Assoziativitätsbedingungen multiplikativer Strukturen) 249; (Complemented lattices) 259.
- Otto s. E. Lukacs 96.
- Paul (Hyperbolische Trigonometrie) 139.
- Szegő, Gabor (Eigenvalues of a membrane) 88.
- and A. Zygmund (Mean values of polynomials) 303.
- s. G. Pólya 278.
- s. Otto Szász 2.
- Szele, T. (Wedderburn-Artin structure theorem) 262.
- T**aam, Choy-Tak (Non-linear differential equation) 79.
- Table of secants and cosecants 119.
- Tables of Lagrangian coefficients 364.
- Takahashi, Atsushi s. Kin-ichi Ishida 429.
- Takehito (Invariant delta functions) 214.
- Takano, Kazuo and Tyuti Imai (Conformal theory of subspaces) 158.
- Takeno, Hyōtīrō (Matrix of a tensor of second order) 11.
- Takeo, Makoto and Shang-Yi Ch'en (Fine structure pressure) 238.
- Taketani, Mitsuo s. S. Fujii 218.
- Talbot, L. (Laminar swirling pipe flow) 187.
- Taldykin, A. T. (Eigenelemente bei gewissen linearen Operatoren) 343.
- Taliev, V. N. (Ausfließen einer Flüssigkeit aus einem Kanal) 185.
- Tamadjan, A. P. s. S. N. Mergeljan 338.
- Tamari, Dov (Monoïdes préordonnés) 15.
- Tamura, Taro (Neutron He^4 scattering) 435.
- Tanabe, Yukito s. T. Ito 433.
- Tani, Smio (Brueckner-Watson method) 428.
- Snio s. S. Fujii 218.
- Tarczy-Hornoch, A. (Ausgleichung von Streckennetzen) 424.
- Tarski, Alfred (Successors of cardinals and the axiom of choice) 48.
- Tatarkiewicz, K. (Transformations unfoliées) 417.
- Tatchell, J. B. (Absolute Riesz summability) 57; (Theorem by Bosanquet) 291.
- Tauber, G. E. and Ta-You Wu (p - and d -shell nuclei in intermediate coupling) 223.
- — — s. A. B. Bhatia 441.
- Taussky, Olga (Characteristic roots of quaternion matrices) 10.
- — s. A. J. Hoffman 10.
- Taylor, J. G. (Nucleon pion scattering) 429.
- Teisseyre, Roman (Coordinate conditions and equations of motion) 209.
- Tejerizo, J. A. Marín s. Marín Tejerizo, J. A. 54.
- Temkin, A. Ja. (Verwandlung zweier Photonen) 430.
- Temperley, H. N. V. s. C. B. Haselgrove 274.
- Tenca, Luigi (Iperboloide) 145.
- Terleckij, Ja. P. (Struktur der Elementarteilchen) 220.
- — — s. A. A. Logunov 207.
- Teuffel, E. (Rekursionsformel für Primzahlen) 41.
- Teviotdale, A. s. E. W. Elcock 445.
- Tewordt, Ludwig (Strahlungslose Rekombination) 446.
- Thaler, R. M., J. Bengston and G. Breit (Intermediate state coupling) 221.
- Thébault, Victor (Orthopôle) 140; (Pascal hexagons) 140.
- Thimm, Walter (Ausgearbeitete meromorphe Abbildungen) 75.
- Thirring, Walter (Meson-Meson-Wechselwirkung) 430.
- Thoma, Elmar (Erweiterungen linearer, stetiger Abbildungen) 97.
- Thomas, L. H. (Compressible flows including shocks) 194.
- T. Y. (Plastic yield condition) 182; (Rotation of grid lines) 182.
- — — s. W. F. Brown 196.
- Thompson, H. R. (Contagious distributions) 121.
- Thomsen jr., D. L. (Laplace method) 293.
- Thrall, R. M. s. J. S. Frame 254.
- Thurston, H. A. (Partly-associative operations) 249.
- H. S. and Mary K. Alexander ($X^2 + PX + Q = 0$ in binary matrices) 12.
- Tichomirova, E. S. (Klassifikation der Flächen zweiter Ordnung) 422.
- Tichonov, V. I. s. P. I. Kuznecov 365.
- Tideman, M. (Positive harmonic functions) 332.
- Tidman, D. A. (Scattering of μ mesons) 219.
- Tietze, Heinrich (Gespräche mit G. Herglotz) 2.
- Tifford, A. N. s. Sh. T. Chu 189.
- Tillieu, Jacques et Jean Guy (Polarisabilité des orbitales atomiques 2 p) 233.
- — s. J. Guy 437.
- Timman, R. (Oscillating airfoil) 189.
- Tingley, Arnold J. s. M. Owchar 102.
- Titchmarsh, E. C. (Eigenfunction expansions) 61.
- Tits, J. (Plan projectif des octaves) 139; (Espaces homogènes et isotropes) 383; (Etude géométrique d'un espace homogène) 383.
- Titus, C. J. s. J. E. McLaughlin 310.
- Tawari, S. Y. and B. Bhattacharya (Linearization of a relativistic Hamiltonian) 212.
- Tobocman, W. ((d,p) reaction) 226.
- Tocher, K. D. (Monte Carlo methods) 369.
- Todd, John (Condition of certain matrices. II.) 355; (Exponential integral) 360.
- J. A. s. G. C. Shephard 143.
- Tolhoek, H. A. s. F. W. Lipps 218, 427.
- Tominaga, Hisao (Primary ideal decompositions) 260; (Supplement to „primary ideal decompositions“) 261; (Radical ideals) 261.
- Tomita, Minoru (Convex hull of a set) 105; (Operator algebras) 105.
- Tonolo, Angelo (G. Ricci-Curbastro) 2.

- Tonooka, Keinosuke (Theory of subspaces, I.) 406.
- Torda, T. P. (Boundary layer control) 191.
- Torres, G. and R. H. Fox (Group of a knot) 168.
- Toscano, Letterio (Funzioni del cilindro parabolico) 63; (Fonction hypergéométrique confluyente) 65; (Ellipse de Lemoine) 384.
- Tóth, L. Fejes s. Fejes Tóth, L. 382, 383.
- Toulmin, G. H. (Shuffling ordinals) 414.
- Townes, C. H. s. G. R. Gunther-Mohr 439.
- Townsend, A. A. (Uniform distortion) 192; (Diffusion in homogeneous turbulence) 192.
- Tredgold, R. H. (Exchange interaction) 446; (Ferromagnetism) 447.
- Treiman, S. B. (Cosmic radiation) 230.
- Tremmel, E. (Kreisberandete Bogenscheiben) 178.
- Trent, Horace M. (Trees in a connected linear graph) 422.
- Tricomi, F. G. s. A. Erdélyi 364.
- Truesdell, C. („Vectors and tensors“) 150.
- Truter, Mary R. (Hollerith multiplying punch for crystallographic calculations) 118.
- Tumanjan, S. Ch. (Asymptotic distribution of χ^2 -Kriteriums) 127.
- Turán, P. (Hermite-expansion) 14; (Theory of graphs) 170.
- s. T. Kövari 7.
- Turner, C. H. M. (Birefringence in crystals) 450.
- J. S. (Triplet neutron-proton scattering) 221.
- Tutte, W. T. (Chromatic polynomials) 171; (Factor theorem for finite graphs) 171.
- Tweedie, M. C. K. (Iterative procedures for polynomial interpolation) 116.
- Tyabji, S. F. B. (Quantum theory for non-viscous fluids) 441.
- Tycko, D. s. H. M. Foley 235.
- Ubbelohde, A. R. s. K. J. Gallagher 234.
- Uchida, Shigeo (Compressible cascade flow) 185.
- Uehara, Hiroshi (Mappings of a polyhedron into a simply-connected space) 419.
- Uehling, Edwin A. s. J. A. Young jr. 449.
- Ufford, C. W. s. S. Meshkov 233.
- Uhler, Horace S. (Hamartixéresis) 364.
- Underhill, L. H. s. S. Hochberg 435.
- Urabe, Minoru and Shôichirô Katsuma (Poincaré-Bendixson theorem) 318.
- Urazbaev, B. M. (Zyklische Körper des Grades l^n) 33.
- Urban, P. s. A. Florian 431, 432.
- Utz, W. R. s. V. L. Klee 162.
- Vachaspati (Elastic scattering of electrons) 228.
- Vajnberg, M. M. (Hyperboloide und Funktionale im Hilbertschen Raum) 100.
- Vajnstejn, B. V. (Elektronendichte von Kristallen) 443.
- Vajsman, I. A. (Magnetische Kernmomente) 433.
- Valentiner, Siegfried (Vektoranalysis) 149.
- Valiron, Georges (Fonctions analytiques) 67.
- Vallese, L. M. (Pulsed currents in conductors) 204.
- Vandiver, H. S. s. D. H. Lehmer 40.
- Varga, O. (Finslersche Räume) 157; (Metrisierbarkeit von Linienelementmannigfaltigkeiten) 408.
- Richard S. (Circulant matrices) 10.
- Varini, Bruno (Calcolo tensoriale) 150.
- Varshni, Y. P. s. K. Majumdar 235.
- Vasil'eva, A. B. (Differentiation der Lösungen von Differentialgleichungssystemen) 83.
- Vaughan, Hubert (Polynomial interpolation) 116.
- Vaulot, Émile (Délais d'attente des appels téléphoniques) 126.
- Vautier, Roger (Phénomène de magnétostriction) 449.
- Vekua, N. P. (Randwertaufgabe) 67.
- Venkachalam Iyer, R. s. Iyer, R. Venkachalam 1.
- Venteel, T. D. s. O. A. Olejnik 326.
- Verschaffelt, J. E. (Minimum de production d'entropie) 199; (Thermomécanique de l'électrolyse) 239.
- Vesentini, Edoardo (Varietà covarianti d'immersione) 148.
- Vidav, Ivan (Théorème de Mandelbrojt-MacLane) 332.
- Vidsenskij, V. S. (Normal wachsende Funktionen) 57.
- Vigon, M. A. and K. Wirtz (Sondenstörungen im Neutronenfeld) 229.
- Vil'ner, I. A. (Nomogramme für elliptische Funktionen) 361.
- Vineyard, George H. (Multiple scattering of neutrons) 436.
- — — and G. J. Dienes (Defect concentration in crystals) 443.
- Vinograd, R. E. (Satz von Perron) 321.
- Vinogradov, I. M. (Verteilung der Primzahlen) 41; (Trigonometrical sums) 275.
- Višik, M. I. (Elliptische Gleichungen) 330.
- Visvanathan, S. and J. F. Battey (Diffusion of minority carriers) 446.
- Vituškin, A. G. (Beschränktheit der linearen Variation) 55; (Variation von Mengen) 55; (Variationen einer Menge) 55; (Variationen von Funktionen) 56; (Hilberts dreißigstes Problem) 56.
- Vivier, Marcel (Annulateurs des formes extérieures) 28.
- Vlasov, K. B. und B. Ch. Išmuchaetov (Ferromagnetismus) 449.
- Vleck, J. H. van s. G. R. Gunther-Mohr 439.
- Vogel, Walter (Witwenrentenversicherung) 135.
- Vojt, S. S. (Fortpflanzung des Schalls) 333.
- Volkin, Howard C. (Inelastic collisions) 229.
- Volkmann, Bodo (Hausdorffsche Dimensionen. IV.) 51.
- Volkov, A. B. (Shell model of odd-even nuclei) 223.
- E. A. (Dirichletsches Problem für die Laplacesche

- Gleichung) 357; (Genauigkeit der Netzmethode) 357.
- Volpato, Mario ($y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$) 80.
- Vollterra, Vito (Opere Matematiche, I.) 242.
- Vučković, Vladeta (Transformation de Stieltjes) 336.
- Vulich, B. Z. (Einbettung in den zweiten adjungierten Raum) 97.
- W**aelbroeck, Lucien (Calcul symbolique dans les algèbres commutatives) 107; (Structure des algèbres à inverse continu) 339.
- Waerden, B. L. van der (Einfall und Überlegung. II.) 1; (Tafeln des Ptolemaios) 1; (Moderne Algebra) 25; (Einfall und Überlegung. III.) 38.
- Wagner, Carl (Volterra integral equations) 114.
- Harvey M. (Inverting matrices on a card-programmed calculator) 351.
- Wainwright, T. s. G. Parzen 435.
- Wait, James R. (Antenna with infinite corner reflector) 202.
- Wait, James R. and Walter J. Surtees (Impedance of a toploaded antenna) 202.
- Wakulicz, A. (Polynômes ne prenant que des valeurs entières) 247.
- Wald, A. (Congruent imbedding in f -metric spaces) 383.
- Walker, A. M. (Distribution of serial correlation coefficients) 134.
- Gordon L. (Fermat's theorem for algebras) 28.
- L. R. (Dispersion formula) 207.
- Wall, H. S. (Harmonic matrices) 92.
- Wallace, A. D. (Partial order and indecomposability) 413.
- Waller, I. and S. O. Lundqvist (Overlapping in X-ray scattering) 443.
- Walsh, J. L. (Interpolation problem) 90.
- — — and J. P. Evans (Approximation by bounded analytic functions) 68; (Zeros of extremal polynomials) 300.
- Walsh, J. L. and David Young (Solution of the Dirichlet problem) 89.
- — — s. Ph. Davis 338.
- Walter, Edward (Prüfung der Symmetrie bezüglich Null) 131.
- Wang, Hsien-Chung (Closed manifolds) 166.
- Ward, A. J. (Fréchet distance of two curves) 414.
- E. E. (Transients in dynamical systems) 94.
- jr., L. E. (Partially ordered topological spaces) 161.
- Ware, A. A. (Collisional effects) 237.
- Wataghin, V. s. L. Sartori 219.
- Watari, Watato s. S. Fujii 218.
- — — s. M. Matsumoto 227.
- Watson, A. G. D. (Sturmian theory) 82.
- K. M. s. A. Aitken 429.
- — — s. N. C. Francis 225.
- Weber, C. und K. Saalfeld (Schmierfilm bei Walzen) 186.
- Sophus (Laminare Strömung und Selbstdiffusionskoeffizient) 439.
- Wecken, Fr. (Ausgleichung von Wertefolgen) 379.
- Weier, Josef (Normale Abbildungsscharen) 167; (Fixpunktmindestzahlen in Polyedern) 167.
- Weijdemans, J. (Exchange of liquid) 199.
- Weil, Herschel (Distribution of radial error) 127.
- Weinberger, Hans F. (Problème de Tricomi) 85.
- Weitzenböck, Roland (Transversalenproblem. I. II.) 385.
- Weizel, Walter (Quantenmechanische Wellengleichung) 211.
- Welter, C. P. (Games on a sequence of squares) 7.
- Welton, T. A. s. A. Simon 226.
- Wergeland, H. s. F. Bakke 172.
- — — s. H. Olsen 212.
- Wermer, J. (Normed rings) 99.
- Westlake, W. J. (Conformally Kähler manifolds) 157; (Hermitian spaces) 493.
- Wever, Franz (Relationen endlicher Gruppen) 254.
- Whaples, G. (Additive polynomials) 26.
- Whitehead, J. H. C. ($(n-1)$ -connected complex) 419.
- Whiteman, A. L. (Power residue character of 2) 271.
- Whittle, Peter s. H. Wold 134.
- Wick, G. C. (Scattering of neutrons) 434.
- R. F. (Field of germanium gyrator) 452.
- Widder, D. V. (Convolution transform) 334.
- Widom, B. (Virial series) 440.
- Wielandt, Helmut (Eigenwerte Hermitescher Matrizen) 11.
- Wigner, Eugene P. (Rayleigh-Schrödinger perturbation theory) 212.
- — — s. E. Inonu 21.
- — — s. M. G. Redlich 436.
- Wijnngaarden, A. van s. H. J. A. Duparc 40.
- Wild, Wolfgang und Karl Wildermuth (Kernbindungsenergien und Zweikörperkräfte) 432.
- Wilder, R. L. and J. P. Roth (Inequalities relating Betti numbers) 164.
- Wildermuth, K. s. A. Florian 431.
- — — s. W. Wild 432.
- Wilkes, M. V. (Chapman's grazing incidence integral) 454.
- Wilkinson, D. H. s. G. A. Jones 226.
- Will, Herbert (Satz von Hammerstein) 75.
- Williams, C. L. s. R. Fürth 440.
- J. (Hydrodynamic forces on obstacles) 184.
- Kenneth P. (Integration of $x''(t) = G(x)$) 114.
- Williamson, E. M. s. H. T. Flint 431.
- J. H. (Compact linear operators) 109.
- Wilson, R. (Previous paper) 306.
- Wiman, A. (Punkte auf Kurven dritter Ordnung) 271.
- Winogradski, Judith (Géodésiques de l'univers d'Einstein-Schrödinger) 408.
- Winston, Harvey (Localized orbitals) 445.
- Winter, Clasine van (Asymetric rotator) 425.

- Wintner, Aurel (Theorem of Bôcher) 81; (Remarks to an earlier note) 314.
- — s. Ph. Hartman 79, 84, 152, 159, 318, 324, 396.
- Wirtz, K. s. M. A. Vigon 229.
- Wittich, H. (Riccatische Differentialgleichung) 80.
- Włodarski, L. (Méthodes continues de limitation) 290.
- Woeste, K. (Eigenwerte des Rechteckpotentials) 222; (Bindungsenergie) 433.
- Wold, Herman (Stationary time series) 134.
- Wolf, E. s. A. B. Bhatia 60.
- Paul (Dualitätssatz der Darstellungstheorie) 19.
- Wolfe, R. (Optical absorption) 451.
- W. A. s. T. E. Hull 93.
- Wolfowitz, J. (Theorem of Glivenko-Cantelli) 365; (Components of stochastic structures) 376; (Minimum distance method) 376.
- Wolfson, Kenneth G. (Algebra of bounded functions) 107.
- Woll jr., John W. s. L. C. Green 232, 233.
- Wong, Y. K. (Non-negative-valued matrices) 11.
- jr., James P. s. C. Hastings jr. 111.
- Woodward, Ida s. K. J. Gallagher 234.
- Worobjow, N. N. (Fibonacci-Zahlen) 59.
- Wrench jr., J. W. (Reciprocal of π) 120.
- Wright, E. M. (Representing functions) 41.
- Wu, Ta-You s. G. E. Tauber 223.
- Wunderlich, W. (Zwölfstabegetriebe) 151; (D -Kurven von Kegeln) 387.
- Wundt, Hermann (Längsströmung zwischen koaxialen Kreiszylindern) 187.
- Wuyts, P. (Convergence-abszissa) 93.
- Wyeth, Cynthia W. s. L. C. Green 232.
- Xeroudakes, George s. A. Moessner 271.
- Yamashita, Chitose (Double six theorem of Schläfli) 386.
- Yang, Chung-Tao (Paracompact spaces) 414.
- Yano, Kentaro (Groups of motions) 402.
- Yekutieli, G. s. U. Haber-Schaim 231.
- Yennie, D. R., D. G. Ravenhall and E. Baranger (Phase shift in scattering of electrons) 228.
- Yiftah, Shimon. (Théorie quantique des champs) 215; (Problèmes non-résolus en théorie de particules élémentaires) 220.
- Yih, Chia-shun (Temperature distribution) 191.
- Yntema, L. (Birth- and death-process) 135.
- Yoccoz, J. (Coulomb effect) 434.
- Yoneda, Nobuo (Inverse chain maps) 165.
- Yood, Bertram (Homomorphisms between Banach algebras) 106.
- Yoshimura, Tetz (Salpeter-Bethe kernel) 428.
- Young, Andrew (Summation of products on Hollerith) 117; (Application of product-integration) 358; (Product-integration) 360.
- David (Richardson's method for linear systems) 112; (Partial difference equations) 357.
- — s. M. L. Juncosa 86.
- — s. J. L. Walsh 89.
- jr., J. A. and Edwin A. Uehling (Ferromagnetic resonance) 449.
- Yu, Yi-Yuan (Bending of thin plates) 176.
- Yuasa, Sayoko s. E. Ishiguro 233.
- Yûjôbô, Zuiman (Fourier series) 297.
- Zadiraka, K. V. (Näherung für Eigenwerte einer Randwertaufgabe) 354.
- Zagubiženko, P. A. s. V. I. Mossakovskij 179.
- Žak, I. E. (Satz von Zygmund) 297.
- Zappa, Guido (Piani grafici finiti h - l -transitivi) 380.
- Zarankiewicz, K. (Problem of P. Turan) 416.
- Zaremba, S. K. (Divergence of vector fields) 81.
- Zariski, Oscar (Teoria delle valutazioni) 388; (Singularités d'une variété algébrique) 388.
- Žautykov, O. A. (K. P. Persidskij) 2.
- Zel'dovič, Ja. B. (μ -Meson im Wasserstoff) 218; (π -Mesonen) 218.
- Zelinsky, Daniel (Raising idempotents) 262.
- Zeller, K. s. D. Gaier 292.
- Zemanian, Armen H. (Evaluating integral transforms) 114.
- Zenchen, O. (Cauchysches Problem) 314.
- Zeuli, Tino (Moto di un punto su una sfera) 173.
- Ziebur, A. D. (Double eigenvalue problem) 154.
- Zierep, Jürgen s. W. Haack 195.
- Ziman, J. M. (Propagation of heat) 239.
- Zimmerberg, Hyman J. (Fundamental matrix solution) 322.
- Zmorovič, V. A. (Zweikörperproblem) 173.
- Zubarev, D. N. (Konfigurationsintegrale) 446.
- Zubrzycki, S. s. J. Oderfeld 132.
- Zulauf, Achim (Darstellung natürlicher Zahlen) 39.
- Zumino, B. (Collision matrix for Dirac particles) 427.
- Zweifel, P. F. (Corrections to beta spectra) 436.
- — — and H. Hurwitz jr. (Transformation of scattering cross sections) 436.
- Zwinggi, E. (Rendite von Anleihen) 136.
- Zygmund, A. s. G. Szegő 303.